



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

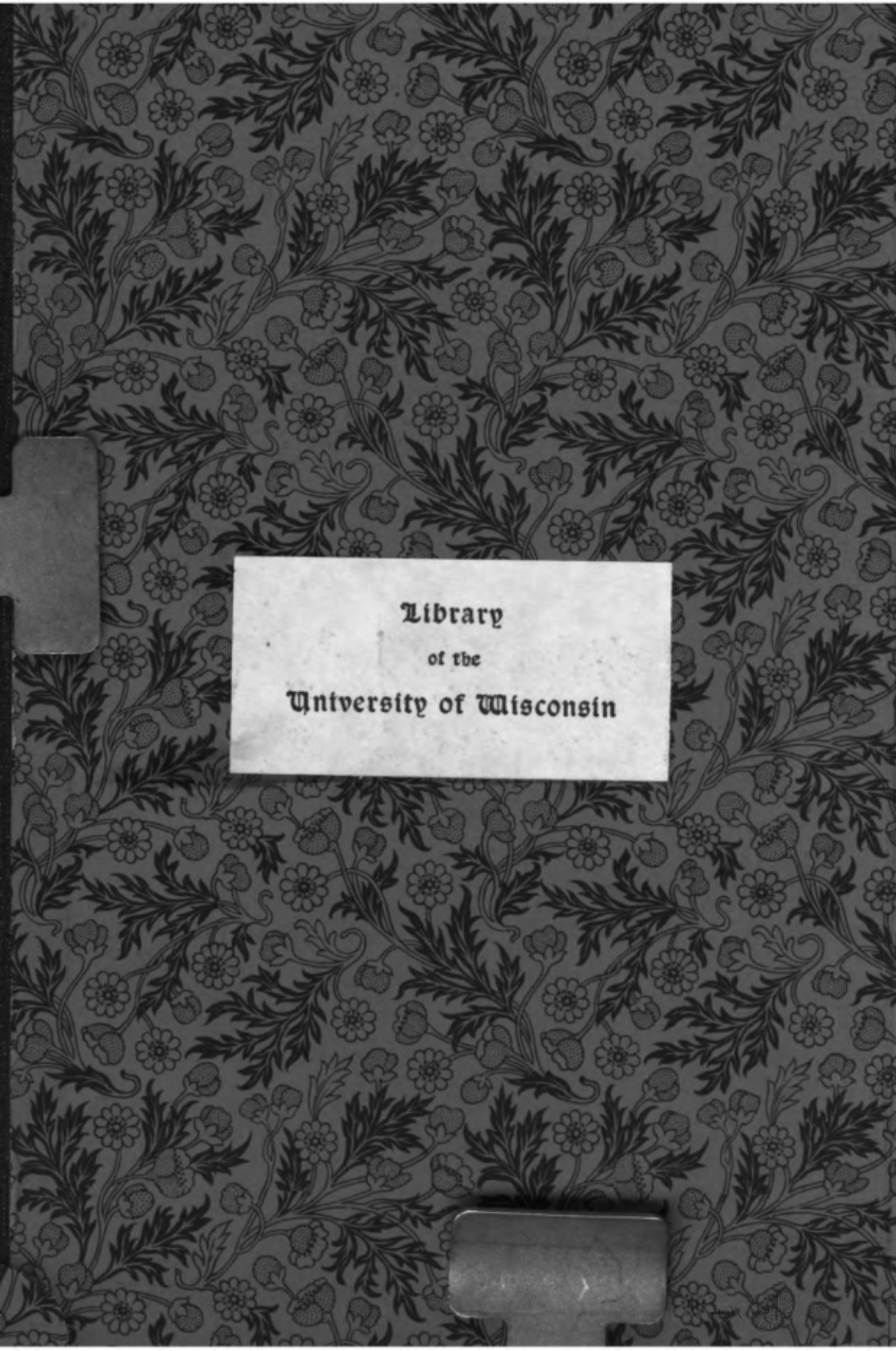
Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.



*Gesammelte mathematische
Abhandlungen*

Elwin Bruno Christoffel, L. Maurer, Adolf Krazer, G. Faber



Library
of the
University of Wisconsin





Prof. Dr. E. B. Christoffel

E. B. Christoffel, Gesammelte Abhandlungen

Brunner & Cie., Kunstanstalt, Zürich

E. B. CHRISTOFFEL
GESAMMELTE
MATHEMATISCHE ABHANDLUNGEN

UNTER MITWIRKUNG VON
A. KRAZER UND G. FABER
HERAUSGEGEBEN VON
L. MAURER

ERSTER BAND
MIT EINER BIOGRAPHIE E. B. CHRISTOFFELS VON C. F. GEISER
UND SEINEM BILD IN LICHTDRUCK SOWIE 15 TEXTFIGUREN



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910

COPYRIGHT 1910 BY B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

152341
APR 17 1917
LB
.9C46
T

VORWORT.

Es sind zehn Jahre verflossen, seit Christoffel kurz nach Vollendung seines 70. Lebensjahres gestorben ist. Seine Publikationen erstrecken sich über einen Zeitraum von 40 Jahren. Da ist es selbstverständlich, daß einiges davon veraltet, ein erheblicher Teil durch neue Arbeiten überholt ist. Aber so manches, was er geschaffen hat, gehört heute zum festen Besitz der Wissenschaft — so die Begriffsbildungen, die er in die Flächentheorie eingeführt hat, und die Theorie der Unstetigkeiten, die mit dem Fortbestehen partieller Differentialgleichungen verträglich sind. Seine Arbeiten über algebraische Funktionen und ihre Integrale, mit denen er sich in den beiden letzten Jahrzehnten seines Lebens fast ausschließlich beschäftigt hat, üben noch heute ihren Einfluß aus.

Allen Christoffelschen Arbeiten gemein ist die klare, sorgfältig durchgearbeitete Darstellung; ein Vorzug, der ihr Studium besonders für die heranwachsende mathematische Generation empfehlenswert macht.

Ein großer Teil der Abhandlungen ist in den *Annali di matematica* von Brioschi erschienen und infolgedessen manchen Fachgenossen weniger leicht zugänglich. Um so dankenswerter erscheint es, daß der Teubnersche Verlag eine Gesamtausgabe seiner Werke unternommen hat.

Herr Geiser hat die Güte gehabt, den Abdruck seiner Biographie Christoffels aus dem 34. Band der *Mathematischen Annalen* zu gestatten und sie zugleich durch Zusätze zu bereichern, die das Bild der eigenartigen Persönlichkeit Christoffels schärfer hervortreten lassen. Wir verdanken ihm auch die Photographie Christoffels, die der vorstehenden Heliogravure zugrunde liegt.

Die Abhandlungen I—XXXII sind zu Lebzeiten Christoffels erschienen. Die Abhandlung XXXIII „Ueber die Vollwertigkeit und die Stetigkeit analytischer Ausdrücke“ hat er noch selbst an die Redaktion der *Mathematischen Annalen* eingesandt, aber ihre Drucklegung nicht mehr erlebt. Die Abhandlungen XXXIV und XXXV „Vollständige

Theorie der Riemann'schen θ -Function“ und „Querschnittstheorie“ haben sich im Nachlaß vorgefunden. Die erstere war mit dem Vermerk „druckreif“ versehen und ist ohne jede Änderung in den Annalen erschienen. In der letzteren hat der Herausgeber, Krazer, die einzelnen Abschnitte mit Überschriften versehen; im übrigen ist auch dieses Manuskript unverändert zum Abdruck gekommen.

Christoffel hatte die Absicht, diesen Abhandlungen noch weitere folgen zu lassen, die ebenfalls Fragen aus der Theorie der Abelschen Funktionen behandeln sollten. Aus seinen Vorlesungen ist bekannt, daß das Material dazu bereit lag. Leider hat seine fortschreitende Krankheit diese Absicht nicht zur Ausführung kommen lassen.

DIE HERAUSGEBER.

ELWIN BRUNO CHRISTOFFEL.

Von

C. F. GRISER in Zürich.

Elwin Bruno Christoffel ist am 10. November 1829 in Montjoie, einem kleinen Städtchen in der preussischen Rheinprovinz (nahe an der belgischen Grenze) geboren. Auf dem Friedrich-Wilhelms-Gymnasium in Köln, wo der bald darauf durch die Befreiung Kinkels berühmt gewordene Karl Schurz sein Mitschüler war, erwarb er sich das Maturitätszeugniss. Seine Studienzeit verbrachte er an der Universität Berlin, wo ihn vor Allem Dirichlets Vorlesungen anzogen, mit deren Form und Gedankeninhalt er sich aufs Genaueste und Tiefste vertraut machte; sie sind für seine ganze Thätigkeit als Lehrer und Forscher massgebend geworden. Daneben interessirten ihn Borchardt's gehaltvolle Vorträge über elliptische Functionen; Steiner's geometrische Lehren suchte er sich wenigstens in den Grundprincipien anzueignen. Scherzweise bekannte er sich auch als Schüler Martin Ohm's und belegte dies durch ein Blatt von zweifelhaftem künstlerischen Werthe, auf welchem er den bei diesem Docenten in der ersten Vorlesung gehörten Satz illustriert hatte: „Lagrange stand auf den Schultern von Euler, wir aber stehen auf den Schultern von Lagrange.“*)

Das Bedürfniss einen vollkommenen Einblick in die Voraussetzungen zu gewinnen, auf welchen Dirichlet einzelne seiner Vorlesungen aufbaute, veranlasste Christoffel, sich eingehender mit Experimentalphysik zu beschäftigen, als dies damals bei den Studirenden der Mathematik üblich war. Er kam dadurch in persönliche Beziehungen zu Dove,

*) Als Weierstrass seinen ersten Besuch bei Steiner machte, fragte ihn dieser in seiner ironischen Art: „Sie kommen wohl hauptsächlich nach Berlin, um Ohm kennen zu lernen?“ „Nein, ich wollte zu Ihnen und zu Dirichlet.“ „Dann haben Sie Grütze im Kopf; wer Grütze hat, kommt zu Dirichlet und mir, die andern gehen zu Ohm.“

was ihm die Möglichkeit gewährte, gelegentlich eigene physikalische Versuche anzustellen. Er muss in dieser Richtung eine entschiedene Begabung besessen haben; ich erinnere mich noch lebhaft an die Anschaulichkeit, mit welcher er mir einst unter blosser Benutzung eines eisernen Lineals, eines Bindfadens und der Brettchen einer Cigarrenkiste zeigte, wie gewisse Fundamentalgesetze des Magnetismus experimentell zu prüfen seien. Auch in dem Laboratorium des Chemikers Sonnenschein arbeitete er eifrig; er trug bei einer Explosion schwere Verwundungen am Kopfe davon, deren Narben noch lange Jahre sichtbar blieben.

Nachdem Christoffel verhältnissmässig spät seine Universitätsstudien abgeschlossen hatte (er promovierte am 12. März 1856), kehrte er nach Montjoie zurück und blieb dort bis zum Tode seiner Mutter, die er während der Leidenszeit einer Krankheit nicht hatte verlassen wollen. Der mehrjährige Aufenthalt in dem abgelegenen Orte, der keinerlei wissenschaftliche Anregung bot, ja sogar die einfachsten geselligen Beziehungen vermissen liess, ist von grosser Bedeutung für seine ganze Individualität geworden. Auf Grund einer hervorragenden Arbeitskraft und einer zielsicheren Intelligenz, unbeirrt von irgend welchen fremden Einmischungen, gewann er eine geistige Selbständigkeit, die sich in der Wissenschaft frei von Einseitigkeiten und unfruchtbaren Speculationen hielt. Er drang tief in die Riemann'schen Schöpfungen ein, soweit dieselben damals schon publicirt waren. In den Dirichlet'schen Vorlesungen erblickte er eine ausgezeichnete Vorschule für dieses Studium, ebenso in den functionentheoretischen Abhandlungen Cauchy's, die er damals schon genau gekannt haben muss. Er meinte gelegentlich, mit dem Citat in § 6 der Abhandlung über die Abel'schen Functionen habe sich Riemann die Hälfte des Umfangs der Ausarbeitung seiner Theorie gespart. Aber in diesen Jahren einsamer und angestrengter Studien bildeten sich auch einige Singularitäten des Charakters aus; er selbst sagte, in jenen Zeiten hätte er sogar das Sprechen verlernt. Und so verblieb ihm ein öfter hervortretender Zug von Menschenscheu, sowie eine Reizbarkeit, die auch den Freunden gegenüber sich leicht in Schroffheit und Misstrauen geltend machte. Selbst sein sonst so sachkundiges und gerne anerkennendes Urtheil über die wissenschaftlichen Leistungen anderer Mathematiker konnte in solchen Momenten getrübt erscheinen.

Als völlig reifer Mann habilitirte sich Christoffel im Jahre 1859 an der Universität Berlin, wo er ebensowohl durch seine wissenschaftliche Bedeutung wie durch seine Thätigkeit als Docent sich die volle Anerkennung von Kummer und Weierstrass erwarb. Hauptsächlich auf ihre Empfehlung hin wurde ihm 1862 die durch Dedekind's Weggang

erledigte Stelle am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich übertragen. Bei Annahme des Rufes freute er sich darauf, vor einen grösseren Hörerkreis treten zu können, bei dem er eine weitgehende mathematische Vorbildung glaubte voraussetzen zu dürfen. Unter dieser Annahme hatte er insbesondere als Einleitung zu seinen Vorlesungen eine exacte Darlegung der Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung sorgfältig ausgearbeitet. Der erwartete Erfolg blieb zunächst aus, und die Studirenden ersuchten ihn, nach Verfluss des ersten Quartals, einen zugänglicheren Weg einzuschlagen. Ohne jede Empfindlichkeit entsprach er dem geäusserten Wunsche, begann die Vorlesung noch einmal auf total veränderter Grundlage und nun mit einer Wirkung, dass er sofort zu den ausgezeichnetsten Lehrern der Anstalt gezählt wurde. Später durfte er auch erhöhte Anforderungen stellen, zudem vereinigte sich in seinen Privatvorlesungen ein grosser Kreis von Schülern, welche er mit denjenigen Parthieen der Wissenschaft bekannt machen konnte, in denen sich seine eigene Forschung bewegte.

Es war ein unvergleichlicher Genuss, den Vorträgen Christoffels zu folgen. Schon die äussere Erscheinung des kräftig gebauten Mannes mit der ungesucht eleganten Haltung, dem fest wie in Bronze geprägten und doch geistig durchgearbeiteten Kopfe, den wunderbaren Augen, übte eine grosse Anziehungskraft aus. Die Sprache war einfach und lebendig, von einem leichten Flusse, ohne jede unnöthige Wiederholung oder nachträgliche Correctur. In dem für die künftigen Techniker obligatorischen Unterrichte liebte er es, bis zu ausführbaren geometrischen Constructionen und numerischen Rechnungen vorzudringen, deren Schlussresultate er ohne Präntion und Pedanterie in übersichtlicher Ordnung an der Tafel zusammenstellte. Der Hauptreiz und der Hauptwerth aller seiner Vorträge aber lag darin, dass er in bewusster Nachfolge Dirichlet's die Mathematik als eine Wissenschaft des reinen Gedankens behandelte. Die allgemeinen Grundbegriffe und Methoden wurden immer mit der grössten Präcision erläutert, die speciellen Probleme klar und scharf begrenzt, die gefundenen Lösungen in Bezug auf die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen ihrer Richtigkeit umfassend discutirt. Betrachtungen über das Unendlichwerden, über den Grenzprocess, über Unstetigkeiten wandte er seine besondere Aufmerksamkeit zu, indem er sie von den zufälligen Umständen, unter denen sie sich darboten, befreite und in ihrer philosophischen, oder wie er lieber gesagt hätte, rein begrifflichen Bedeutung auseinanderlegte. Damit hing wohl die Kunst zusammen zu concentriren und zu condensiren. So gab er in ein- bis zweistündigen Semestervorlesungen eine Theorie der bestimmten Integrale, oder der partiellen Differentialgleichungen, oder der

krummen Oberflächen, die alles Wesentliche enthielt und hervortreten liess, ohne dass er nöthig gehabt hätte durch geistreiche Aperçus oder beziehungsreichen Citatenreichthum die dem Gegenstand an und für sich innewohnende Bedeutung noch besonders zu erhöhen und in künstlicher Beleuchtung erscheinen zu lassen. Freilich verwandte er auf derartige Collegien eine vorgängige Gedankenarbeit, dass er mir, jedenfalls ohne jede Uebertreibung, bei Beginn eines derselben sagen konnte: „Ich weiss jetzt schon, was ich in jeder der folgenden Stunden vorzutragen haben werde.“

Insofern man aus der Zeitfolge der von ihm publicirten Abhandlungen einen sichern Schluss ziehen darf, so ist der Züricher Aufenthalt für Christoffel auch in Bezug auf die selbständige wissenschaftliche Arbeit die reichste Zeit seines Lebens gewesen. Das Inhaltsverzeichniss des Crelle'schen Journals für die Bände 61—70 führt zehn hierhergehörige Abhandlungen auf, zu welchen man noch eine in den *Annali di Matematica* erschienene und eine von der Berliner Akademie der Wissenschaften veröffentlichte zu rechnen hat. Es war eine wohlverdiente Auszeichnung, dass er in Anerkennung dieser Leistungen von der eben genannten Körperschaft zu ihrem correspondirenden Mitgliede erwählt wurde.

Aber nicht nur durch seine eigene Thätigkeit als Forscher und Lehrer hat Christoffel dem Polytechnikum vorzügliche Dienste geleistet. Er suchte, namentlich seit ihm die Leitung der Fachlehrerabtheilung übertragen war, den mathematischen Unterricht durch neu einzuführende Vorlesungen jüngerer Docenten auszudehnen und auf eine höhere Stufe zu heben. Aber schon früher war es seiner Initiative zu verdanken gewesen, dass bei einer Budgeterhöhung im Jahre 1863 eine neue Professur für höhere Mathematik vorgesehen und an diese als Vertreter der Functionentheorie Herr Prym berufen wurde. Wie hoch Christoffel die wissenschaftliche Bedeutung dieses Collegien schätzte, klingt noch nach in der posthumen Abhandlung über die Theorie der Riemann'schen θ -Functionen, wo es heisst (*Math. Annalen*, Bd. 54 pag. 391): „Ich kann diese Gelegenheit nicht vorüber gehen lassen, ohne die unbeschreiblichen Verdienste in Erinnerung zu bringen, welche Herr Prym sich durch seine damaligen Publicationen um das Verständniss Riemann's erworben hat.“ In der That hat die Züricher Schule die Einführung in die Schöpfungen des grossen Göttinger Mathematikers schon zu einer Zeit in ihren Lehrplan aufgenommen, als dieselben noch schwer zugänglich und nur von einer kleinen Zahl von Mathematikern gekannt und nach ihrer ganzen Bedeutung gewürdigt waren.*)

*) Einer Darstellung der wissenschaftlichen Leistungen Clebsch's entnimmt man, dass dieser so vielseitige Mathematiker erst durch Herrn Gordan, nach

Zu den Collegen Christoffels am eidg. Polytechnikum hatte während einiger Zeit auch Reuleaux gehört, der von dort im Jahre 1864 als Professor an das Gewerbeinstitut in Berlin berufen und Ende 1867 zum Director der aus diesem hervorgegangenen Gewerbe-Akademie ernannt worden war. Dies gab die Veranlassung, dass auch Christoffel an die neu organisirte Anstalt gezogen wurde. Eine bald nach Uebernahme der neuen Stellung an ihn ergangene vertrauliche Anfrage, ob er eventuell die Leitung der polytechnischen Schule in Aachen übernehmen würde, beantwortete er in ablehnendem Sinne. Er wollte seine wissenschaftliche Thätigkeit nicht durch Amtsgeschäfte administrativer Natur einschränken lassen — und wohl mochte er auch fühlen, dass ihm manche der wesentlichen Eigenschaften fehlten, die eine solche Amtsführung nothwendig fordert.

Christoffel hat die Rückkehr in's Vaterland als eine grosse Ehre und Freude geschätzt. Der Aufschwung, den Berlin während seiner Abwesenheit genommen, liess ihn die Anregungen und Vortheile einer Grossstadt aufs lebhafteste empfinden. Vor allem pries er es als ein besonderes Glück, dass er die grosse Zeit von 1870—71 in dem Centrum der materiellen und geistigen Machtentfaltung Deutschlands miterleben durfte. Er erzählte, wie in den Tagen der Erwartung des Entscheides während einer seiner Vorlesungen plötzlich eine grosse Bewegung unter den Zuhörern entstanden und auf seine Frage nach der Ursache die Antwort ertheilt worden sei: „Der Krieg ist erklärt.“ Und unvergesslich blieb ihm die darauf folgende, durch tiefen Ernst in festen Schranken gehaltene Entschlossenheit der Bevölkerung, insbesondere der älteren Jahrgänge der noch waffenpflichtigen Männer, die sich bei den Controllstellen anzumelden hatten. Grösseres und Edleres schien ihm der Mensch nicht erleben zu können, jedes persönliche Interesse werde in dem allgemeinen aufgelöst oder von demselben zurückgedrängt. Und doch sprach er später mit einem gewissen Gefühl des Missbehagens von den drei Jahren (1869—72) seiner Thätigkeit an der Gewerbeakademie. Zwar stand er mit seinem nächsten Collegen im besten Einvernehmen: Aronhold's liebenswürdige und lebendige Art war ihm durchaus sympathisch. Von der Art, wie sich dieser Mann aus den beschränktesten Verhältnissen, durch energische Ueberwindung der mannigfachsten Hindernisse eine bedeutende Stellung im Lehramte und in der Wissenschaft errungen hatte, sprach er mit rückhaltloser Anerkennung. Aber dass es ihm trotz der Unterstützung durch einen so

dessen Habilitation in Giessen (Sommer 1863) „mit den damals noch verhältnissmässig neuen und wenig verbreiteten Riemann'schen Untersuchungen“ bekannt geworden sei (Math. Annalen Bd. 7 pag. 19).

ausgezeichneten Mitarbeiter nicht gelingen wollte, eine grössere Anzahl von Studierenden zu dauerndem Interesse an höhern mathematischen Vorlesungen heranzuziehen, veranlasste ihn zu sehr unliebsamen Vergleichen mit den Züricher Verhältnissen. Es mag vielleicht, wenn auch unausgesprochen, ein Anderes dazu gekommen sein. Christoffel war früher Privatdocent an der Universität gewesen, er zählte zu den correspondirenden Mitgliedern der Akademie der Wissenschaften; ist es nicht denkbar, dass er sich neben seiner eigentlichen Lehrverpflichtung noch einen weitem, seinen Neigungen und Fähigkeiten entsprechenden Wirkungskreis ersehnte?

Alle Schwierigkeiten dieser Situation wurden durch die Berufung nach Strassburg gelöst. Freiherr von Roggenbach, der mit der ersten Einrichtung der neu zu gründenden Hochschule betraut war, wandte sich, um über die Besetzung der mathematischen Professuren fachkundigen Rath einzuholen, an Kronecker. Dieser nannte in erster Linie Christoffel, der auch, nachdem seinen Anforderungen entsprochen worden war, die ihm angebotene Stellung übernahm. Damit war er, noch in der ersten Hälfte der Vierziger stehend, also in vollster Manneskraft an ein Ziel gelangt, das allen seinen Wünschen und Hoffnungen die Erfüllung zu gewähren schien. Aber der mit den reichsten Mitteln durchgeführte grosse politische Gedanke: in dem wiedergewonnenen Reichlande eine Universität ersten Ranges aufzurichten, fand bei der deutschen Jugend nicht die freudige Aufnahme, die zur Sicherung einer dem ausgezeichneten Lehrkörper und den aufs grossartigste eingerichteten wissenschaftlichen Instituten entsprechenden Frequenz nöthig gewesen wäre. Die Anzahl der Studirenden blieb in den ersten Jahren sogar hinter bescheidenen Erwartungen zurück; insbesondere war in den mathematischen Fächern kein Grundstock von Schülern vorhanden, welche in einer systematisch geordneten Reihe von Vorlesungen einen höhern Abschluss ihrer akademischen Bildung gesucht hätten. So musste sich Christoffel einen Hörerkreis erst heranbilden. Er that es unter Einsetzung aller seiner Kräfte, sogar unter Einschränkung der bis dahin mit so reichem Erfolge gekrönten Publication wissenschaftlicher Abhandlungen. Die Resultate seiner Forschung sollten nun in erster Linie den Vorlesungen zu Gute kommen, aus deren Bedürfnissen sich umgekehrt häufig die Ziele seiner Untersuchungen ergaben. Gewiss war Strassburg durch diese Thätigkeit nicht in demselben Masse zu einem Mittelpunkte mathematischer Studien geworden, wie es nach und nebeneinander Königsberg, Berlin, Göttingen waren oder sind. Aber Christoffel, der in der Wissenschaft gerne seine eigenen Wege ging und bei allem lebenswürdigen Verkehr mit seinen Zuhörern doch

die persönlichen Beziehungen mehr vermied als aufsuchte, hat niemals die Neigung besessen, eine besondere Schule zu gründen, und so erfüllte ihn das Erreichte mit der vollsten Befriedigung.

Seitdem er in der Auswahl des zu behandelnden Stoffes im Wesentlichen freie Hand hatte, bildete in den Vorlesungen, wenigstens in denjenigen, deren Inhalt mir bekannt geworden ist, die Functionentheorie den Hauptgegenstand. Es folgten sich in systematischer Anordnung: Bestimmte Integrale und unendliche Reihen; Einleitung in die Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse; Theorie der elliptischen Functionen; Theorie der Abel'schen Functionen; Anwendungen der Lehre von den Abel'schen Functionen. Aber auch in Vorlesungen, die mit diesem Cyklus nicht in unmittelbarem Zusammenhange standen: Algebraische Theorie der homogenen Formen und invarianten Substitutionen; Theorie der quadratischen und bilinearen Formen; Ausgewählte Kapitel aus der Lehre von den partiellen Differentialgleichungen, wurden überall die Beziehungen zu Aufgaben aus jenem centralen Gebiete der Mathematik hervorgehoben. Es ist vielleicht von Interesse zu wissen, dass er schon im Beginn der Strassburger Zeit, als er eben erneut all' seine Arbeit der Functionenlehre zuwandte, die Theorie der Abel'schen Functionen als eine vollständige Theorie der algebraischen Functionen bezeichnete, die jedoch zu ihrer Erledigung nicht mit algebraischen Hilfsmitteln ausreiche, sondern auch transcendente erfordere. Er vermied das Dirichlet'sche Princip, dessen Wahrheit unter beschränkenden Voraussetzungen ihm zwar unzweifelhaft, dessen Begründung ihm aber unsicher schien. Wie weit er sich in der Umgestaltung der Riemann'schen Methoden und Resultate mit Weierstrass begegnet haben mag, muss ich aus dem einfachen Grunde mangelnder Sachkenntniss dahingestellt lassen. Nur das sei noch hervorgehoben, dass er sich unausgesetzt bemühte, die „imposanten“ Leistungen des grossen Berliner Mathematikers, soweit dieselben durch den Urheber selbst publicirt waren, in ihrer ganzen Bedeutung zu erfassen.

Mehr als zwanzig Jahre lang ist Christoffel in seinem Strassburger Lehramte thätig gewesen; sobald es die in dieser Hinsicht eben so liberalen als vernünftigen Statuten der Universität zuliessen, trat er in den Ruhestand. Es entsprach seiner ganzen Lebensauffassung, wenn er auch in Bezug auf seine eigene Person gefunden hatte: es liege nicht im Interesse der Hochschulen, Professoren bis zum Aeussersten im Dienste zu belassen und auszunutzen. Der Einwurzelung noch so berechtigter wissenschaftlicher Richtungen und Traditionen sei eine Ablösung durch neue Kräfte, die sich auf veränderten Bahnen bewegen,

vorzuziehen. Für sich selbst hoffte er noch auf eine Zeit intensiver, von jeder äussern Rücksicht unabhängigen wissenschaftlichen Thätigkeit; sogar die Anregung: die gewonnene Musse zur Ausarbeitung und Publication solcher Ergebnisse seiner Forschung zu verwenden, denen er selbst einen grossen Werth beilegte, wies er von der Hand. Neben den mathematischen Studien zog ihn die erneute Lectüre der alten Klassiker an. Er hatte sich einst auf dem Gymnasium eine ungewöhnliche Kenntniss der griechischen und lateinischen Sprache angeeignet; während des Züricher Aufenthalts bildeten Plato und Tacitus*) seine Lieblingslectüre in den Stunden der Erholung von angestrengter Arbeit; jetzt vertiefte er sich in die zeitgenössischen Quellen der römischen Kaisergeschichte.

Leider war seine Gesundheit schon beim Rücktritte stark erschüttert. Im Jahre 1892 hatte er noch in fast jugendlicher Spannkraft des Körpers und des Geistes ein paar frohe Tage des Wiedersehens und der Erinnerung in Zürich verlebt. Er hatte die Absicht sich von da nach Interlaken zu wenden; auf dem Wege dorthin traf ihn bei Brunnen das Missgeschick, von einem Velocipedisten überfahren zu werden und einen Armbruch zu erleiden, der nur langsam und mangelhaft heilte. Zugleich vermehrten sich asthmatische Beschwerden, die ihn schon früher gelegentlich heimgesucht hatten. Wohl brachte später ein Winteraufenthalt in Grindelwald eine bedeutende Besserung und neuen Lebensmuth, aber in den letzten Jahren, die er in zunehmender Abgeschlossenheit und Einsamkeit verbrachte, sanken seine Kräfte mehr und mehr. Den siebzigsten Geburtstag verlebte er in äusserster Stille, da man auf seinen dringenden Wunsch von Deputationen und dergl. gänzlich Abstand genommen hatte. Bald nachher stellten sich die drohenden Anzeichen seiner letzten Krankheit ein, eines schweren Herz- und Nierenleidens, zu dem schliesslich noch die Wassersucht trat. Am 15. März 1900 hat ihn der Tod erlöst.

Ueber die Stellung Christoffels an der Universität Strassburg und über den Eindruck, den seine Persönlichkeit in dem Kreise seiner Collegen hinterliess, hat sich bei der Beerdigungsfeierlichkeit Prof. Windel-

*) Einen heitern Beweis seiner genauen Kenntniss des grossen Historikers bewahrt das eidgenössische Polytechnikum. Im Jahre 1864 hatte Christoffel als Actuar der Gesamtkonferenz das Protokoll in einer Sitzung zu führen, welche wegen Auflehnung der Studirenden gegen die oberste Leitung der Anstalt einberufen war. Als Motto über seine Wiedergabe der Verhandlungen schrieb er im Originaltext und in deutscher Uebersetzung das Citat aus den Annalen (V, 6): „Bei diesem Anlasse wurden vierundvierzig Reden gehalten, einige aus Furcht, die meisten aber aus Gewohnheit.“

band in einer schönen und treffenden Rede ausgesprochen, die in den Math. Annalen Bd. 53 pag. 341 etc. abgedruckt ist. Dem Hinweis auf dieselbe mögen hier einige Erinnerungen folgen, die das dort entworfene Bild des Menschen ausserhalb seiner Wissenschaft noch zu ergänzen bestimmt sind.

Die Erziehung durch eine ihrem katholischen Glauben fromm ergebene Mutter hat nicht so eingreifend und dauernd gewirkt, dass Christoffel bei einem bestimmten religiösen Bekenntniss geblieben wäre. Doch hat er der Kirche, in welcher er aufgewachsen war, eine lebhaftes Sympathie bewahrt, die im Zusammenhang mit dem Bedürfnisse stand, sich liebe Jugenderinnerungen unverletzt und ungetrübt zu erhalten. Damit verband sich in politischen Fragen eine conservative, streng monarchische Gesinnung, welcher er einen um so entschiedeneren Ausdruck gab, je mehr sie sich mit den Anschauungen seiner Umgebung in Widerspruch befand. Er hatte dazu in den ersten Zeiten seines Züricher Aufenthaltes reichliche Gelegenheit. Unter seinen dortigen Landsleuten fand sich noch ein Stamm alter „Achtundvierziger“, die das Heil ihrer Heimath in der baldigen Aufrichtung einer Republik erwarteten, eine jüngere Generation stand auf dem Boden des Nationalvereins oder der liberalen Mehrheit des preussischen Abgeordnetenhauses; daneben erhoben die Süddeutschen die schärfsten Anklagen gegen das norddeutsche Junkerthum und einzelne Stimmen traten für das im Sinne des Liberalismus zu reformirende Oesterreich ein, dem die Führung des zu einigenden Deutschlands zu übertragen sei. In diesem Gewirre war ein Mann, welcher der festen Haltung König Wilhelms und der kühnen Kampfesweise des Ministerpräsidenten Bismarck freudig zustimmte, völlig isolirt. Erst der Krieg von 1866 brachte dann die grosse Wandlung und Christoffel erblickte ganz unbefangen in dem Siege der preussischen Waffen zugleich eine persönliche Genugthuung für die vielfachen Gegenstösse, die sein temperamentvolles Auftreten gefunden hatte.

Auch die politischen Verhältnisse der Schweiz, welche von denjenigen seines Heimathlandes so ganz verschieden waren, fesselten die Aufmerksamkeit Christoffels in hohem Grade. Er hat aus der Nähe die eigenartige Bewegung verfolgen können, die den Kanton Zürich aus einem repräsentativ regierten in ein rein demokratisches Staatswesen überführte. Das gelegentliche Zusammentreffen mit Mitgliedern der damaligen Regierung hatte ihm den Einblick in die verständige Tüchtigkeit dieser Männer gewährt, nun sah er, wie eine geschickt geleitete Opposition, theilweise unterstützt von einem talentvollen und in seinen Mitteln nicht wählerischen Pamphletär, das ganze System, auf welchem

die Regierung beruhte, und damit diese selbst zu Fall brachte. Es stimmte ihn nachdenklich, dass sogar in der Republik, trotz der fortwährenden Besprechung und Kritik der öffentlichen Angelegenheiten durch die Presse und politische Versammlungen, sich die wahre Stimmung eines Volkes nicht immer auf der Oberfläche der Tagesmeinungen zeigt. Er war Zeuge davon, wie sich unbeachtet im Untergrunde eine wachsende Unbehaglichkeit und Unzufriedenheit auch der ruhigen Elemente angesammelt hatte, die nur eines letzten günstigen Anstosses bedurfte, um das Staatswesen bis in seine Grundfesten zu erschüttern, wie dann aber sofort in ernster Arbeit die Erneuerung desselben an die Hand genommen wurde. Gottfried Keller hat in der Schluss-erzählung der Leute von Seldwyla: „Das verlorene Lachen“ ein lebendiges Bild von der Umwälzung gegeben, das Christoffel nicht nur an jene Begebenheiten erinnerte, sondern auch an die Stunden, die er einst auf dem Zunftthause zur Safran mit dem zürcherischen Staatsschreiber zugebracht hatte.

Die Unabhängigkeit seiner Ansichten von den Tagesströmungen hat Christoffel in besonderm Masse während der Zeiten des Kulturkampfes bewährt, da er nun in entschiedener Weise sich gegen die Kirchenpolitik Bismarcks aussprach, auch die gleichgerichteten Vorgänge in der Schweiz missbilligte. Wohl hat sich dabei eine starke Neigung zu paradoxen Behauptungen sowie eine verschärfte Reizbarkeit gegenüber allfälligem Widerspruch geltend gemacht, aber der Grundgedanke seiner Argumentationen hat sich in Deutschland doch nach und nach allgemeine Anerkennung erworben. In der Schweiz hat sich die nämliche Wandlung vollzogen. Schon vor dem vatikanischen Concil hatte Jakob Burckhardt in einer seiner Vorlesungen*) gesagt: „Von Seite des Staates ist es lächerlich, wenn er gerne 'liberale Prälaten' hätte, die seiner Bureaukratie keine sauren Tage machen sollten.“ Und der bedeutendste Staatsmann des Landes schrieb während der Kampf am heftigsten tobte: „Leider haben wir uns zu einer eigenen und klar vorgezeichneten Politik in den Kirchenfragen nicht ermannen können. Wir hätten auf das Anathema des obersten der Priester mit der Proklamation der unbedingten Freiheit antworten sollen. Aber das Vertrauen in die Macht des Geistes hat uns gefehlt und wir haben uns hinter die Landjäger verkrochen.“

Es ist wahrscheinlich, dass der tiefgehende Meinungsunterschied, der sich in dieser Frage zwischen Christoffel und denjenigen Kreisen gezeigt hatte, auf die er amtlich und gesellschaftlich angewiesen war,

*) Weltgeschichtliche Betrachtungen, pag. 142.

zu seiner Vereinsamung wesentlich beitrug. Als der Streit verstummt und ein Ausgleich der Gegensätze möglich war, hatten vorrückendes Alter, dann Verzicht auf das Lehramt und beginnende Krankheit die Wiederaufnahme eines regern Verkehrs zunächst erschwert und schließlich völlig unmöglich gemacht. So hat denn sein Tod nicht eine Lücke in einen grossen Kreis lebendiger Interessen gerissen oder eine bedeutende directe Wirksamkeit auf eine jüngere Generation jählings unterbrochen. Aber der kleinen Zahl von Freunden, denen er einst seine persönliche Theilnahme zugewendet und in treuer Anhänglichkeit bewahrt hat, ist der auch ausserhalb seiner Wissenschaften so bedeutende Mann in dankbarer Erinnerung geblieben und ebenso werden die zahlreichen Schüler, die er während einer fast vierzigjährigen Wirksamkeit heranbildete, den unvergleichlichen Lehrer nicht vergessen haben.

INHALT.

	Seite
I. De motu permanenti electricitatis in corporibus homogeneis. Inaugural-Dissertation 1856	1
II. Über die Gaußsche Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben. Journal f. Mathematik, Bd. 55, 1858	65
III. Ueber die lineare Abhängigkeit von Functionen einer einzigen Veränderlichen. Journal f. Mathematik, Bd. 55, 1858	88
IV. Zur Abhandlung von Heine: „Ueber Zähler und Nenner der Näherungswerthe von Kettenbrüchen“ im 57. Band des Journals für die reine und angewandte Mathematik. Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 58, 1861	110
V. Ueber die Dispersion des Lichts. Monatsberichte der Berliner Akademie 1861	113
VI. Verallgemeinerung einiger Theoreme des Herrn Weierstraß. Journal f. Mathematik, Bd. 63, 1864	129
VII. Ueber die kleinen Schwingungen eines periodisch eingerichteten Systems materieller Punkte. Journal f. Mathematik, Bd. 63, 1864	146
VIII. Ueber die Bestimmung der Gestalt einer krummen Oberfläche durch lokale Messungen auf derselben. Journal f. Mathematik, Bd. 64, 1865	162
IX. Ueber die Dispersion des Lichtes. Annalen der Physik u. Chemie, Bd. 124, 1865	178
X. Zur Theorie der einwerthigen Potentiale. Journal f. Mathematik, Bd. 64, 1865	185
XI. Ueber den Einfluß von Realitäts- und Stetigkeitsbedingungen auf die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen. Journal f. Mathematik, Bd. 66, 1866	232
XII. Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie. Annali di Matematica, Ser. II, Bd. 1, 1868	249
XIII. Ueber einige allgemeine Eigenschaften der Minimumsflächen. Journal f. Mathematik, Bd. 67, 1867	259
XIV. Beweis des Fundamentalsatzes der Invariantentheorie. Journal f. Mathematik, Bd. 68, 1868	270
XV. Theorie der bilinearen Functionen. Journal f. Mathematik, Bd. 68, 1868	277
XVI. Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke. Abhandlungen der Berliner Akademie 1868	297
XVII. Über die Transformation ganzer homogener Differentialausdrücke. Monatsberichte der Berliner Akademie 1869	347
XVIII. Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades. Journal f. Mathematik, Bd. 70, 1869	352
XIX. Ueber ein die Transformation homogener Differentialausdrücke zweiten Grades betreffendes Theorem. Journal f. Mathematik, Bd. 70, 1869	378

I.

DE MOTU PERMANENTI ELECTRICITATIS IN CORPORIBUS HOMOGENEIS.

DISSERTATIO INAUGURALIS
QUAM
SENSU ET AUCTORITATE
AMPLISSIMI PHILOSOPHORUM ORDINIS
IN
ALMA LITTERARUM UNIVERSITATE
FRIDERICA GULELMA
PRO
SUMMIS IN PHILOSOPHIA HONORIBUS
RITE CAPESSENDIS
DIE XII. M. MARTII A. MDCCCLVI.
H. L. Q. S.
PUBLICE DEFENDET
AUCTOR
ELWIN BRUNO CHRISTOPPEL
RENNANUS.

OPPONENTIBUS:

J. NEUHAEUSER.

A. DE LA VALETTE ST. GEORGE, PHIL. DR.

A. KREMER, PHIL. CAND.

BEROLINI
TYPIS GUSTAVI SCHADE.

Im Original befinden sich auf Seite 3 bis 6 folgende Widmungen:

MATRI CARISSIMAE

NEC MINUS

VIRO ILLUSTRISSIMO CELEBERRIMO EXPERIENTISSIMO

HENRICO GUILIELMO DOVE

**PHIL. ET MED. DOCTORI ART. LIB. MAG. PROFESSORI P. O. IN UNIVERSITATE FRIDERICA
GUILIELMA ORDINIS REGII AQUILLAE RUBRAE EQUITI SOCIETATUM MULTARUM LITTE-
RARIARUM SODALI CET. CET.**

PRAECEPTORI DILECTISSIMO

HANC COMMENTATIONEM PIO GRATOQUE ANIMO OFFERT AUCTOR.

Postquam G. S. Ohm theoria sua electricitatis galvanicae¹⁾ analysi novum campum aperuit, multae inquisitiones in illo institutae, multaeque egregia inventa sunt.

Consideratione enim ad corpora duarum, trium dimensionum extensa theoria amplificabatur: casu inde speciali, quem Illustrissimus hujus theoriae Auctor tractaverat, e principiis generalibus eruto, celeberrimae illae leges fluminis galvanici distributionisque vis electroscopicae in conductoribus linearibus ad summum, quod ipsa theoria patiebatur generalitatis fastigium evehebantur. Omnibus his disquisitionibus, e quarum numero commentationes a Cl^o Kirchhoff in *Annalibus Poggendorffii*²⁾ Tom. 64. 67. 75. prolatas commemorare sufficiat, physice valde promota experimentorumque copia aucta est.

Sed tamen haec theoria incompleta erat, quum eam tantum electricitatis proprietatem, a corporibus procedendi ad corpora contigua, respiceret, actione neglecta, quam corpora electrica in corpora remota exercent, — influentia, disjunctio electricitatum conjunctarum, — quae tamen ab illius natura separari nequit. Quae quidem quum parum momenti habere videatur ad phaenomena constantia in corporibus bene conducentibus, in corporibus male conducentibus e contrario sic praevalet, ut illa neglecta, electricitatis distributio nullo modo explicari possit.

Quod desiderium explere conatus, quum experientia nulla phaenomena suppeditare videretur electricitatis motae, quibus calculi apte superstrui possent, a phaenomenis profectus sum staticis, quae eodem modo tractare licebat, quo geometrae generaliter in transitu ab actionibus discretis ad continuas uti solent.

1) Die galvanische Kette, mathem. bearb. von Dr. G. S. Ohm. Berl. 1827.

2) Tom. 64. Ueber den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, besonders eine kreisförmige. — 67. Nachtrag dazu. — 75. Ueber die Anwendbarkeit der Formel für die Intensitäten der galvanischen Ströme in einem Systeme linearer Leiter auf Systeme, die zum Theile aus nicht linearen Leitern bestehen.

Jam etiam alia parte a suppositionibus usitatis discedere coactus sum, ubi de vi electromotorica calculo subjicienda agebatur. E qua re nova quae sequuntur cum experientia egregie consentire videntur.

Hoc in commentatione maxime curandum esse censui, ut omnes notiones, quae ad electricitatis motum, qualem hic consideramus, faciunt, proferantur notionibusque comparentur, quae iis in theoriis cognatis respondent. Cujus rei utilitas primum eo versatur, ut theoriam nostram cum alia quadam frequentissima omnino congruere demonstraretur: tum eo, ut easdem notiones majori securitate tractare liceat, quando de electricitatis motae theoria generali collocanda agetur.

Jam quod ad calculos subductos attinet, praeter casus extremos conductorum optimorum vel pessimorum electricitatis motum in sphaera plena tractavi omni generalitate tam physica quam analytica. Qua in re omnes calculos exhibere placuit, quorum in corporibus sphaericis opus esse possit. Formularum autem generalium ad formam simpliciore redigendarum usuique practico accommodandarum negotium ab hac commentatione procul habendum, aliisque reservandum esse censui occasionibus, ubi ex rei utilitate necessitas oritura sit.

De motu permanenti electricitatis in corporibus homogeneis.

De electricitatis motu acturi e numero causarum, quibus corpus aliquod statum electricum induit, statuamus eas, quas abhinc prae ceteris eo nomine comprehendemus. Sunt autem illae:

1. fontes electricitatis, puta corpora electrica illi contigua, quae ei de electricitate sua impertiunt;
2. actio illa corporum electricorum ab existentia ipsius electricitatis inseparabilis, qua simul in omnibus corporibus, quorum natura non repugnat, electricitates conjunctae certo more dissociantur, simulque corpora ipsa viribus moventibus sollicitantur;
3. vis electromotorica in contactu corporum heterogeneorum agens, quae est causa illorum phaenomenorum, quae proprie galvanica dicuntur.

1.

Si electricitas sub datis conditionibus in corpore *A* movetur, quod variis modis, hic pro notis habendis, cognoscitur, tempore progrediente trium harum rerum observatur una:

1. Si causae, quibus motus electricitatis provocatur, manent, ita quidem ut perpetuas mutationes subeant, status electricus ipsius *A*

perpetuo a tempore pendebit, atque ab una epocha ad alteram variabitur. Si tamen causae illae invariabiles fiunt, hoc etiam cum statu electrico ipsius A locum habebit, qua in re distinguendi sunt casus sequentes:

2. Sit A in superficie sua nonnisi non-conductoribus contiguum, sit distributio copiarum electricitatis extra ipsum A occurrentium constans, omnibus, quae in systemate sunt corporibus ab omni motu impeditis: in corpore A aequilibrium constituetur electricum, quod secundum leges Electrostatacae determinatur.

3. Si tamen ipsum A in superficie sua invariabili modo cum fontibus electricis constantibus conjunctum est, ceteris conditionibus iisdem permanentibus, quales modo exposuimus, a certa inde epocha electricitatis motus in ipso A stabilis fiet. Qui status id proprii habet, ut, electricitate perpetuo ipsum A permeante, in nulla ipsius A particula status electrici mutatio operetur. Qui quum ei prorsus analogus sit, cui in theoria caloris nomen „motus caloris permanens“ tribuitur, in sequentibus etiam appellabitur „electricitatis motus permanens“. Quem accuratius examinare in hac commentatione nobis propositum est.

2.

Jam ut problema ad numeros revocetur, suppositionem facimus generaliter acceptam, electricitatis mensuram esse *densitatem electricam*, signo positivo vel negativo praeditam, prout electricitas est vitrea vel resinosa. Quae quantitas ut plane determinata sit, definitionem ejus usitatum repetamus.

Quodsi duo corpora habemus A et B , ipsa quidem omnino paria unitatemque voluminis occupantia, electricitatis autem ratione diversa, quae deinceps iisdem conditionibus electroscopio opponuntur in distantia r : electroscopium deinceps attractiones $\frac{a}{r^2}$, $\frac{b}{r^2}$ ostendet, qua in re repulsionem pro attractionibus negativis habebimus. Si igitur ponimus, corpus illud A continue in eodem statu, in quo quum hoc experimentum fieret erat, conservari, aut in hunc statum redigi posse pro voluntate nostra, sequitur, ut a sit quantitas constans, quae tamquam experientia data supponi possit; quare rationem $\frac{a}{b}$, cujus loco etiam rationem inter singulas attractiones intercedentem $\frac{b}{r^2} : \frac{a}{r^2}$ poni licet, sequentes vocem alias usitatum densitatem electricam medicam corporis B appellabimus.

Porro si B est particula corporis, per quod electricitas migrat, omnia quae in interioribus ejus sunt, electricitate imbuuntur. Si igitur corpus C , quod ejusdem naturae est sicut B , eadem qua ipsum B densitate electrica media gaudet, volumen ejus tamen est ipsius B pars dimidia, tertia . . . , electricitatis in ipso C contentae copia manifesto erit pars dimidia, tertia . . . copiae in ipso B contentae, id est: Electricitatis copia, quae corpore continetur, per quod electricitas migrat, producto aequiparatur e densitate electrica media volumineque corporis conflato.

Quae definitiones hac observatione valde simplicificantur, attractionem, quam corpora electrica exercent, ab ipsorum corporum substantia esse independentem. Eo enim postulata abjiciuntur de corpore A facta, unde loco attractionis electricae $\frac{a}{r^2}$ vim aliquam constantem e natura apte petitam introducere licet.

Quum autem motus electricitatis generalis in eo versetur, ut corporis, per quod electricitas migrat, particulae externa electricitate impertiantur, electricitatemque propriam reddant, motum permanentem in eo positum esse apparet, ut in hac ipsius electricitatis vicissitudine nulla corporis particula densitatis electricae mutationem patiatur. Si igitur incrementum copiae electricitatis, quae in aliqua particula inest, ea suppositione computamus, ut electricitas in illa motum permanentem modo relictura sit, hoc incremento nihili aequiparato conditionem habebimus, ut in particula illa status electricus non mutetur, aequationem igitur habebimus, qua motus permanens in illa determinatur.

Phaenomena fundamentalia.

3.

Jam exponam, quae vel experientia dantur, vel hypothetice assumenda sunt, ut incrementum illud determinetur calculorumque fundamentum ponatur.

Qua in re mihi in mentem venire non potest, principia rursus firmare atque probare, quae jamdudum ab aliis proposita, atque cum ipsa natura egregie consentire experta sunt: simpliciter illa afferam atque adnotabo, ubi ampliora de iis inveniantur.

Jam primum illius sententiae mentionem injicere debemus, secundum quam electricitas pro fluido habenda est corporeo, cujus particulae mutuam repulsionem exercent secundum legem Newtonianam. Cui confisus si aequationes motus permanentis exhibes fluidi illius — ut supra motum permanentem vocabimus a densitatibus permanentibus — ad

eum quidem casum spectantes, quo velocitates singularum particularum perparvae sunt, easdem obtinebis aequationes, quales ex aliis deducemus principiis, quae de natura ipsius electricitatis minus supponere videntur. Cujus sententiae autem ut merito ratio habeatur, infra occasio invenietur.

Nos igitur, aliam viam ingressuri; a duabus rebus proficiscemur experientia confirmatis, quibus phaenomenis fundamentalibus nomen erit.

1. Conductio electricitatis.

Si duo corpora A et A' , diversa densitate electrica praedita, in contactu perfecto sunt, alterum alteri de electricitate sua tradit. In temporis intervallo infinite parvo dt hac ratione per elementum ω superficiei, in qua A et A' contingunt, ex ipso A' in A electricitatis copia E' transmigrat, dum ex ipso A certa quaedam copia E ad A redundat. Quantitas, qua E' ipsam E superat, secundum G. S. Ohm a differentia densitatum electricarum pendet, quae proxime ab ipso ω in duobus ejus lateribus inveniuntur. Sint u' , u densitates de quibus diximus, secundum ea, quae Ohm p. 103. et 106. op. I. proposuit, differentia $E' - E$, quam „flumen conductivum“ vocabimus, hac expressione utitur:

$$A. \quad \Omega (u' - u) \omega dt,$$

ubi Ω est quantitas ab ipsis u , u' , ω , dt independens, quam considerationibus idoneis determinare oportet.

Haec expressio duos casus amplectitur valde distinctos, prout A et A' ex eadem vel ex diversis substantiis confecta sunt.

Jam suppositionem facimus cum experientia consentientem, ad motum electricitatis spectantem hanc:

1. densitatem electricam in corpore homogeneo a puncto in punctum *continue* variare, ita ut differentia densitatum in duobus punctis propinquis distantiae punctorum proportionalis sit. Casus simplicissimus, ad quem generalem revocabimus, is est, quo inter utrasque quantitates perfecta aequalitas intercedit;

2. densitatem electricitatis, ubi superficiem contactus corporum heterogeneorum transmigrat, *subitas mutationes* pati, unde differentia densitatum electricarum, in punctis propinquis, sed superficie illa separatis, haud amplius a distantia eorum pendet, sed generaliter valore finito gaudet, qui in casu simplicissimo, ad quem ceteros revocabimus, unitatem aequatur.

Hujus suppositionis ope expressionem A . in casibus assignatis ita transformare licet, ut nullas quantitates involvat nisi definitas.

Simplicitatis causa primo loco eum casum consideramus, quo A' et A sunt corpora heterogenea. Si igitur eo casu, qui aequatione

$$a. \quad u' - u = 1$$

significatur,

$$b. \quad q \omega dt$$

quantitas est electricitatis, quae tempore dt ex ipso A' in A per ω transmigrat, aequationum A . et a . ope nanciscimur sequentem:

$$\Omega \omega dt = q \omega dt,$$

e qua hoc quidem casu

$$\Omega = q$$

sequitur. Quantitas igitur electricitatis, quae generaliter in directione commemorata per ipsum ω transit, haec est

$$B. \quad q(u' - u) \omega dt.$$

Ex definitione autem ipsius q (form. b .) apparet, quoties A et A' boni conductores sunt, quantitatem q procul dubio valorem valde magnum induere.

Secundo casu, quo ω in interioribus conductoris homogenei situm est, res haud ita simpliciter absolvitur.

A consideratione proficiscimur locorum geometricorum, in quibus densitas electrica u valore constante gaudet, quae igitur data sunt aequatione

$$c. \quad u = \text{const.}$$

Quum autem ex suppositione nostra u sit functio continua coordinatarum, hac aequatione superficies repraesentatur, quae nisi in casibus specialibus puncta vel lineas singulares non praebet. Quibus casibus

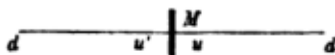


Fig. 1.

in praesentia exclusis, si x, y, z sunt coordinatae orthogonales puncti alicujus M superficiei c , Fig. 1, in hoc puncto illa planum tangens dd habet, cujus aequatio est

$$d. \quad (X - x) \frac{du}{dx} + (Y - y) \frac{du}{dy} + (Z - z) \frac{du}{dz} = 0,$$

si X, Y, Z sunt ipsius plani coordinatae. Jam si statuimus, elementum

ω punctum M continere atque perpendicularare esse ad planum tangens dd , esse insuper ut supra u, u' densitates electricas in utrisque ipsius ω lateribus locum habentes, trans ω tempore dt secundum suppositionem nostram permeat electricitatis copia

$$\Omega(u' - u)\omega dt.$$

Quum autem ex aequatione d. pateat, u' et u nonnisi quantitativis secundi ordinis differre, manifestum est, si tantum quantitates primi ordinis respicimus, flumen conductivum hoc casu nihil aequale esse, e qua re statim deducitur, flumen conductivum ubique ad superficies c. perpendicularare esse.

Quibus positis consideramus casum, quo ω , etiam nunc punctum M continens, cum plano tangenti d. certum angulum θ facit. Sit ab , Fig. 2, ipsius ω , dd autem plani tangents intersectio cum plano tabulae, ω et d in hoc plano perpendiculararia. Sit porro ω' projectio ipsius ω in planum d , $a'b'$ ejus intersectio, erit angulus $bMb' = \theta$, et $\omega' = \omega \cos \theta$. Jam ex iis, quae supra statuimus, manifestum est, per ω eandem necessario electricitatis copiam fluere debere ac per ipsum ω' .

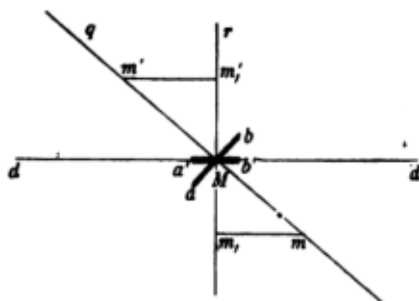


Fig. 2.

Sint igitur Mr, Mq perpendiculara in M supra $a'b', ab$ erecta, m_1', m_1 puncta, ipsi M propinqua, s' eorum distantia; sit u_1', u_1 densitas electrica in his punctis, secundum aequ. A. per ω' tempore dt in directione $m_1'm_1$ electricitatis copia

$$\Omega(u_1' - u_1)\omega' dt$$

transmigrat. Jam si eo casu, ad cujus normam nos generalem directuros esse supra annuicavimus, scilicet qui aequatione

$$e. \quad u_1' - u_1 = s'$$

significatur,

$$f. \quad k\omega' dt$$

est quantitas electricitatis, quae in directione dicta per ω' fluit, — ubi igitur k est quantitas definita experientia determinanda, quae *conductibilitas* vocari solet — nanciscimur aequationem

$$\Omega s' \omega' dt = k \omega' dt,$$

unde nostro casu

$$\mathcal{Q} = \frac{k}{s'},$$

ideoque

$$g. \quad \mathcal{Q} (u_1' - u_1) \omega' dt = k \frac{u_1' - u_1}{s'} \omega' dt^1)$$

sequitur.

E punctis m_1', m_1 lineas ducamus ipsi dd parallelas, perpendicularum Mq supra ω erectum in punctis m', m secantes, sitque horum punctorum distantia $= s$, unde $s' = s \cos \theta$; sint denique u', u densitates electricae in his punctis: u' ab u_1' , u ab u_1 non different nisi quantitibus secundi ordinis. Itaque expressio modo inventa g. quantitatis per ω' vel etiam per ω migrantis in hanc transit:

$$C. \quad k \frac{u_1' - u_1}{s'} \omega' dt = k \frac{u' - u}{s} \omega dt;$$

qua aequatione loco fluminis ad laevum, oblique in directione $m_1' m_1$ per ω transeuntis substituitur flumen alterum, quod in directione ad ipsum ω perpendiculari $m' m$ differentiationique contraria movetur.

Si enim, quod secundum hypothesin fieri debet, ad limitem transimus, ubi s evanescit, $\frac{u' - u}{s}$ fit quotiens differentialis ipsius u in directione Mq formatus, unde eruimus propositionem sequentem:

Sit ω elementum areae infinite parvum in interioribus corporis homogenei situm, sint α, β, γ anguli, quos perpendicularum certo sensu supra ω erectum cum axibus ipsorum x, y, z facit, sit denique u densitas electrica in punctis ipsi ω quam proximis, per ω tempore dt in directione differentiationi (vel perpendicularo) opposita transmigrat electricitatis copia

$$D. \quad k \left\{ \frac{du}{dx} \cos \alpha + \frac{du}{dy} \cos \beta + \frac{du}{dz} \cos \gamma \right\} \omega dt.$$

Qua in expressione si ponis

$$180^\circ + \alpha = \alpha', \quad 180^\circ + \beta = \beta', \quad 180^\circ + \gamma = \gamma',$$

hanc induit formam

$$D'. \quad -k \left\{ \frac{du}{dx} \cos \alpha' + \frac{du}{dy} \cos \beta' + \frac{du}{dz} \cos \gamma' \right\} \omega dt,$$

1) Ut homogeneitas formularum perspicuiatur, haec observamus. Si unitatem longitudinis designamus L , formula e. accuratius ita exhibenda est: $u_1' - u_1 = \frac{s'}{L}$.

Ubi igitur in sequentibus ipsum s' obvenit, ejus loco numerum $\frac{s'}{L}$ subintelligas.

In f. ipsum k lineam designat, in g. autem loco lineae k area kL obvia est, unde abhinc k aream representat.

quae est intensitas ejusdem fluminis, nisi quod ejus directio in directionem differentiationis incidit. Ex hoc autem *corollarium* sequitur, flumen negativum certa directione motum aequivalere flumini positivo ejusdem intensitatis, quod directione opposita movetur.

Jam quod eum casum attinet, quem hactenus pro exempto habuimus, quo videlicet superficies $u = \text{const.}$ puncta vel lineas singulares praebet, hoc solum reminiscaris, in talibus locis planum tangens analytice indeterminatum esse, ideoque valere aequationes

$$\frac{du}{dx} = 0, \frac{du}{dy} = 0, \frac{du}{dz} = 0.$$

Quum igitur in propinquitate talium locorum u sit constans, flumen conductivum in illis nihili aequale sit necesse est, unde expressio D. etiam ad hunc casum pertinet.

Is denique casus, quo trium differentialium partialium ipsius u alterum infinitum fieret, suppositione excluditur, u esse functionem coordinatarum continuam.

Corollarium. Antequam ad phaenomenum fundamentale secundum pergimus, expressionum modo impetratarum ope B. et C. significationem mechanicam statuemus hypothesium de natura functionis u supra factarum, e quibus expressiones illae sequebantur. Si conditiones, ad quas formulae illae spectant, easdem esse supponimus, ita ut valores ipsorum ω , dt , $(u' - u)$ in utrisque iidem sint, atque designamus

$$q(u' - u)\omega dt = B, k \frac{u' - u}{s} \omega dt = C,$$

sequitur

$$h. \quad B = \frac{qs}{k} C,$$

quae aequatio docet, electricitatem per superficiem contactus corporum heterogeneorum migrantem resistantiam pati, quae causa est, ut loco quantitatis C quantitas infinite minor B transeat.

Talis resistantiae effectus, quaecunque ceterum res sint, nonnisi in hac re consistere potest.

Sit $\Gamma\omega = \Gamma$ quantitas electricitatis, quae per aream ω moveretur, si resistantia ibi unitatem aequaret: si ω resistantiam opponit duplicem, triplicem, . . . q^{triploem} , erit quantitas quae per ω penetrat, $= \frac{1}{2} \omega \Gamma$, $\frac{1}{3} \omega \Gamma$, . . . $\frac{1}{q} \omega \Gamma$; vel ut aliis verbis utamur: Si resistantia est $= q$, ceteris nihil mutatis, trans ω totidem electricitatis permeat, quam per

elementum $\omega' = \frac{\omega}{\rho}$ penetraret, si resistentia unitati aequalis esset. Sit Γ_1 haec copia, erit

$$i. \quad \Gamma_1 = \Gamma' \omega' = \frac{\omega'}{\omega} \Gamma,$$

atque $\frac{\omega'}{\omega} = \rho$ resistentiam metitur.

Suppositiones igitur nostrae de functione u ad hoc redeunt, ut electricitas, ubi superficiem contactus corporum heterogeneorum adit, in resistentiam ingentem incidat, cujus mensura est

$$k. \quad \frac{k}{qs},$$

si resistentia in interioribus corporis, e quo electricitas prodit, pro unitate habetur, designaturque k hujus corporis conductibilitas, atque s distantia media particularum de electricitate sua tempore dt communicantium.

Cujus resistentiae magnitudo etiam experientia certissime indicatur, praecipue observatione Clⁱ Péclet, superficiebus metallicis contiguas, nullo vernicis velamine separatis vim quandam condensatoriam inesse.

Jam hypotheses nostras, e forma speciali primitiva ad significationem generalem evectas ad omnes casus analogos applicare licebit atque oportebit.

2. Disjunctio electricitatum conjunctarum.

Phaenomenorum fundamentalium, quae nobis investiganda sunt alterum actione gignitur, quam corpora electrica in corpora remota exercent. Quae actio duplici modo eo cernitur, ut corpora conducentia, in quae illa exercetur, simul et ipsa electrica evadant (electricitas influentia provocata), simulque locum mutare nitantur (attractio electrica).

Quos effectus singulos seorsim tractaturus primum ostendam, e quovis puncto materiali in interioribus corporis conducentis sito, quamdiu influentia electrica sollicitatur, propter hanc influentiam continenter quantitates aequales electricitatis positivae et negativae in directiones oppositas profluere, atque inde copias electricitatis apparere, quae cum iis, quas in sectione praecedenti determinavimus, generaliter comparari possint.

Fig. 3. Si corpus electricitatem conducens B , cujus superficiem b vocamus, in propinquo est corporis A electricitate imbuti, quam, ut de re definita loquamur, positivam esse statuimus: in ipsius b parte ea,

quae ipsi A opposita est, cernitur copia electricitatis negativae $-\mathcal{A}$, dum quantitas aequivalens electricitatis positivae $+\mathcal{A}$ in reliqua ipsius b parte distributa invenitur. Jam si utraque ipsius b partes paulisper



Fig. 3.

corporibus α et β tanguntur, quorum ulterius electricitatem positivam in b obviam tollit, electricitate negativa ad ipsum α transeunte: corpus B in statum anelectricum recedit, sed propter actionem assiduam ipsius A , tempore certo T delapso, in pristinum statum restituitur, ut sicut antea, denuo copiae $-\mathcal{A}$ et $+\mathcal{A}$ supra b distributae reperiantur. Tempus illud T generaliter valde exiguum est, sicut experimentis de influentia electricitatis notum est: si, quod infra supponetur, B et ipsum parvum est, ipsum T paene evanescere patet, quum evidenter una cum B decrescat. — Quod experimentum si repetitur, ita tamen, ut inter singula experimenta tempus T intercedat, semper idem ejus eventus erit, si propter causas qualescunque conditio electrica ipsorum α et β immutata manet: qui, quatenus nobis interest, eo consistit, ut corpora α et β copias $-\mathcal{A}$ et $+\mathcal{A}$ obtineant, quoties cum ipso B in directione supra significata contingunt. Haec autem directio illo indicio sine ulla ambiguitate definitur, si A et B infinite parva statuuntur: tunc enim manifesto in lineam incidit corpuscula A et B conjungentem. — Sit m multitudo experimentorum, quae tali modo per unitatem temporis instituuntur, ipsum α per idem tempus obtinet copiam $-m\mathcal{A} = -E$, per tempus τ igitur, quod multipulum esse statuimus temporis T , copiam $-\tau E$, ubi E jam a tempore τ independens evasit.

Sin autem nunc corpus B magis magisque decrescere facimus, secundum ea, quae supra monuimus, etiam T decrescit, sed generaliter loquendo jam infra omnes limites abierit, dum B adhuc sensibili quamvis exigua extensione utitur. Quo pacto primum τ a reservatione illa liberatur, ut exactum multipulum ipsius T sit, quum propter exiguitatem ipsius T ejus partes aliquotas respicere non oporteat. Secundo loco singulae tactiones ipsius B per α et β in unam conjunguntur tactionem continuam, singuli discessus electricitatis ab ipso B in unam continuam emissionem. Quae emissio, si etiam A infinite parvum esse statuimus, in linea locum habet corpora A et B jungente.

Si jam ultra supponimus, corpora B, α, β in unum corpus C supra spatium finitum patens conjungi, cujus B est particula in interioribus sita, ex ipso B in directione $B - A$ per tempus τ procedit electricitatis copia $-\tau E$, in directione autem opposita copia aequivalens $+\tau E$. Sed quantitas E non jam tota ex intensitate influentiae pendet, quam A in B exercet, sed etiam a resistantia, in quam electricitas ex B procedens incidit. Qua in re pro *principio* habendum est,

Influentiam, quaecunque sit ejus intensitas, in corpusculo quodam B infinite parvo et substantia conducente circumdato nunquam majores electricitatum conjunctarum copias re vera dissociare posse, quam ex eo procedere possunt: ut, aliter loquendo, electricitatis copiae, quae pro intensitate influentiae disjunguntur, sed propter impedimenta ipsum B relinquere nequeunt, prorsus ita se habeant, acsi non separatae essent. Qua re sponte sequitur, copias ex ipso B prodeuntes semper esse aequivalentes.

Sub factis suppositionibus denique ipsum E infinite parvum evadit: sed quum jam ex omnibus punctis ipsius C eodem modo quo ex B electricitatis copiae profluant, talium copiarum multitudo infinita concurrat, quarum summa determinanda est. Flumina autem hac ratione e copiis $-\tau E$ et $+\tau E$ orta disjuncte tractanda esse vix moneri debet.

Jam ut determinetur quantitas electricitatis influentia ipsius A provocatae, quae tempore infinite parvo dt per datum elementum areae

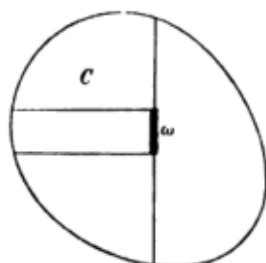


Fig. 4.

ω permeat, ab eo casu incipiamus, quo ω perpendiculare est in recta, quae punctum aliquod ipsius ω cum A conjungit. Fig. 4. Supra ω in directione $A - \omega$ extruimus cylindrum normalem. Ex omnibus punctis in interioribus hujus cylindri sitis propter influentiam ipsius A electricitas negativa procedit in directione $\omega - A$. Quum autem velo-

citas electricitatis finita sit, persuasum habere possumus, tempore dt non alia puncta copias sensibiles electricitatis ex illis procedentis trans ω esse missura, nisi quae ipsi ω proxime adjacent, in quae igitur A actionem constantem exercet. Quum porro electricitatis copiae, quae tempore dt in directione dicta e quolibet puncto procedit, ad $-dt$ proportionalis sit, haec proprietas etiam copiis convenit, quae e punctis illis trans ω mittuntur. Si denique loco ipsius ω ejus partem dimi-

diam, tertiam, . . . consideramus, manifesto erit electricitatis copia prioris pars dimidia, tertia, . . . ex quo intelligitur, hanc copiam ad ipsum ω esse proportionalem. Unde, si $-H$ est densitas electricitatis per ω migrantis, porro $-h\omega dt$ ejus copia, si esset $H = 1$, generaliter habetur pro quantitate electricitatis transeuntis

$$-hH\omega dt.$$

Est igitur h constans ex observationibus petenda. Puncta autem, a quibus copia illa discessit, quum ipsi ω quam proxime adiaceant, manifestum est, ipsum H non pendere nisi ab actione, quam A in haec puncta exercet.

Si tamen μ est copia electricitatis in ipso A contentae, r ejus distantia ab ω : secundum legem a Coulomb detectam in puncta ipsi ω propinqua attractio exercetur, quae ad $\frac{\mu}{r^2}$ proportionalis est. Quae attractio si evanesceret, etiam H nullum esset: attractione crescente, H augetur. Suppositionem igitur facimus simplicitate sua commendabilem, densitatem H esse proportionalem ad hanc attractionem¹⁾, ponimusque

$$1. \quad H = \frac{\mu}{crr'},$$

ubi c est linea, quum μ volumen contineat. Quantitas igitur electricitatis, quae tempore dt per ω in directione $\omega - A$ transit, haec est:

$$m. \quad -\frac{h}{c} \cdot \frac{\mu}{r^2} \cdot \omega dt = -\frac{h}{c} \frac{d}{dr} \left(\frac{\mu}{r} \right) \omega dt.$$

Jam quaestio oritur, quanta sit electricitatis copia, quae sub hypothesis nostra per ω transit, siquidem hoc elementum quocunque modo versus directionem attractionis inclinatum est.

Sit ab , Fig. 5, intersectio hujus elementi cum plano tabulae, atque ω in hoc planum perpendiculare. Circa peripheriam ipsius ω pro directrice habitam cylindrum ponimus, cujus rectae generatrices in directionem attractionis incidunt. Sit ω , ejus sectio transversa, hujus

1) Ipsa hypothesis non nova est, sed ejus applicatio. Biot illam in opere suo: „Traité de physique“ (Paris 1816.) Tome II. pag. 284. his verbis protulit:

„Lorsqu'un corps conducteur et isolé B , qui est dans l'état naturel, est mis en présence d'un autre corps A électrisé et isolé, l'électricité distribuée sur la surface de A agit par influence sur les deux électricités combinées de B , en décompose une quantité proportionnelle à l'intensité de son action etc. etc.“

postea autem actionis influentiae intensitatem eo definit, ut attractioni electricae eam aequiparet.

intersectio cum plano tabulae ab' ; sit θ angulus acutus rectis ba , $b'a$ interceptus, unde $\omega' = \omega \cos \theta$. Jam e solo aspectu manifestum est, quantitates electricitatis, quae per ω' et ω transeunt, aequales esse, vel

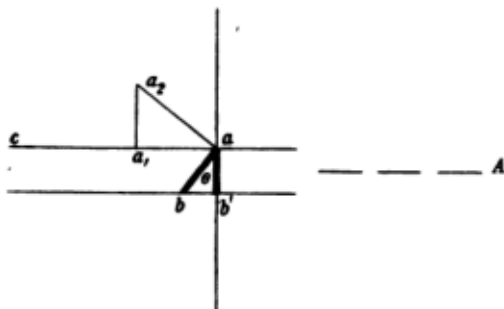


Fig. 5.

si placet, quantitatibus tantum altiorum ordinum inter se differre. Quae igitur per ω transit electricitatis copia secundum m. haec est:

$$n. \quad \frac{h}{c} \frac{d}{dr} \left(\frac{\mu}{r} \right) \omega' dt = \frac{h}{c} \frac{d}{dr} \left(\frac{\mu}{r} \right) \cos \theta \cdot \omega dt.$$

Hanc expressionem ad formam simpliciore redigere licet.

Supra ω in puncto a perpendicularum erigimus retrorsum spectans aa_2 , ex a_2 iterum perpendicularum a_2a_1 in ac dirigimus. Sit $aa_1 = dr$, $aa_2 = ds$, $a_1a_2 = dp$, erit $dr = ds \cos \theta$, $dp = ds \cdot \sin \theta$. Sint porro v, v_1, v_2 valores, quos $\frac{\mu}{r}$ in punctis a, a_1, a_2 induit, habemus

$$\frac{v_2 - v}{ds} = \frac{v_2 - v_1}{ds} + \frac{v_1 - v}{ds} = \frac{v_2 - v_1}{dp} \cdot \frac{dp}{ds} + \frac{v_1 - v}{dr} \cdot \frac{dr}{ds},$$

vel si ad limitem pergimus, ubi ds evanescit:

$$\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dp} \sin \theta + \frac{dv}{dr} \cos \theta.$$

Jam in valorem ipsius $\frac{dv}{dp}$ inquiremus. Est autem

$$\frac{d}{dp} \frac{1}{r} = \lim \frac{1}{dp} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(r^2 + dp^2)}} - \frac{1}{r} \right\} = - \lim \frac{dp}{2r^3} = 0,$$

unde

$$\frac{dv}{dp} = 0$$

atque

$$\frac{dv}{dr} \cos \theta = \frac{dv}{ds},$$

unde obtinemus

$$E. \quad \frac{h}{c} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{\mu}{r} \right) \cos \theta \cdot \omega dt = \frac{h}{c} \frac{d}{ds} \left(\frac{\mu}{r} \right) \omega dt.$$

Hac autem aequatione loco fluminis ad laevum, oblique per ω transeuntis substituitur flumen alterum, quod in directione $a_1 a$ ad ipsum ω perpendiculari differentiationique contraria movetur.

Si electricitas ipsius A negativa esset, expressioni praecedenti tale signum tribuendum esset, ut valor ejus positivus evaderet; quum autem secundum § 2. hoc casu μ negativum sit, forma expressionis nihil mutatur, quae igitur etiam ad hunc casum spectat.

His praeparatis, casum aggredimur generalem, quo influentia a variis copiis electricis, quocunque modo in spatio distributis exercetur.

Sit ω elementum areae in interioribus corporis conducentis situm, sint x, y, z coordinatae puncti ipso ω contenti, sint α, β, γ anguli, quos perpendicularum supra ω in certam regionem exstructum N cum axibus coordinatarum facit. Sint porro $m_1, m_2, \dots$ varia volumina infinite parva, copias electricitatis $\mu_1, \mu_2, \dots$ possidentia; sint $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2, \dots$ eorum coordinatae, $r_1, r_2, \dots$ eorum distantiae ab ω , vel si placet, a puncto x, y, z .

Quoniam $-\cos \alpha, -\cos \beta, -\cos \gamma$ sunt cosinus angulorum, quos perpendicularum supra ω retrorsum erectum cum axibus facit, per ω tempore dt in directione perpendiculari N , si generaliter ponimus

$$\frac{dP}{dN} = \frac{dP}{dx} \cos \alpha + \frac{dP}{dy} \cos \beta + \frac{dP}{dz} \cos \gamma,$$

propter influentiam ipsius μ_1 copia electricitatis transit

$$- \frac{h}{c} \frac{d}{dN} \left(\frac{\mu_1}{r_1} \right) \omega dt,$$

propter influentiam ipsius μ_2 copia electricitatis transit

$$- \frac{h}{c} \frac{d}{dN} \left(\frac{\mu_2}{r_2} \right) \omega dt,$$

electricitatis igitur copia, quae per ω eodem tempore in eadem directione propter influentiam omnium illarum quantitatum transit, haec est

$$o. \quad - \frac{h}{c} \frac{d}{dN} \left\{ \sum \frac{\mu}{r} \right\} \cdot \omega dt,$$

vel si ponimus

$$F. \quad \sum \frac{\mu}{r} = v,$$

ubi v est potentiale omnium massarum electricarum, vel, ut brevitatis causa dicemus, *potentiale electricum*, haec:

$$G. \quad - \frac{h}{c} \left\{ \frac{dv}{dx} \cos \alpha + \frac{dv}{dy} \cos \beta + \frac{dv}{dz} \cos \gamma \right\} \omega dt.$$

Jam quod flumen attinet e copiis $+ \tau E$ formatum, omnia quae exposuimus ad literam repetuntur, nisi quod copiis electricis obve-

nientibus ubique signum contrariumtribuendum sit, flumenque resultans in directione opposita dirigatur. Praeter copiam G. igitur per ω in directione differentiationi opposita transit copia

$$H. \quad \frac{h}{c} \left\{ \frac{dv'}{dx} \cos \alpha + \frac{dv'}{dy} \cos \beta + \frac{dv'}{dz} \cos \gamma \right\} \omega dt,$$

ubi accentibus, quibus ipsum v ornavimus, indicatur, valorem potentialis paullum differre ab eo, qui in form. G. obvius est. In utrisque enim expressionibus potentiale ad eas corporis partes referendum est, quae a copiis istis electricitatis proxime ante transitum per ω penetrantur.

Flumina G. et H. in unum flumen colligere licet, quod *flumen inductivum* vocare placet. Quum enim secundum corollarium e form. D. deductum flumen H. contra directionem differentiationis motum prorsus ita se habeat, sicut flumen

$$- \frac{h}{c} \left\{ \frac{dv'}{dx} \cos \alpha + \frac{dv'}{dy} \cos \beta + \frac{dv'}{dz} \cos \gamma \right\} \omega dt$$

in directione differentiationis motum, manifestum est flumina G. et H. conjunctim ita se habere sicut flumen

$$- \frac{h}{c} \left\{ \left(\frac{dv}{dx} + \frac{dv'}{dx} \right) \cos \alpha + \left(\frac{dv}{dy} + \frac{dv'}{dy} \right) \cos \beta + \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dv'}{dz} \right) \cos \gamma \right\} \omega dt$$

in directione differentiationis motum, quod ab hoc

$$I. \quad - \frac{2h}{c} \left\{ \frac{dv}{dx} \cos \alpha + \frac{dv}{dy} \cos \beta + \frac{dv}{dz} \cos \gamma \right\} \omega dt$$

nonnisi quantitativis altiorum ordinum differt. Quibus neglectis, I. est flumen, quod inductivum appellabimus.

Experimentum, a quo in antecedentibus profecti sumus, ab altera quoque parte, quam supra indicavimus, examinari oportet. Corporibus enim A et B iterum advocatis, praeter phaenomenum modo tractatum inter corpora illa etiam vis intercedit, quae distantiam eorum mutare contendit. Quum igitur omne punctum materiale in interioribus corporis conducentis situm viribus accelerantibus sollicitetur, generaliter in motu electricitatis tertium exstat phaenomenum fundamentale, videlicet motus interior et exterior corporis, per quod electricitas movetur.

Simplicitatis causa autem corpora, de quibus hic agetur, supponimus ita esse comparata, ut neque ipsa, neque eorum particulae loco suo moveri possint.

His statutis, ad tempus finem facimus considerationum hypotheticarum. In posterum semel tantummodo, ubi de electricitate in contactu corporum heterogeneorum orta, deque ratione agetur, qua electricitas ex influentiae actione orta se habet in superficie corporum, ad phaenomena redire cogemur simpliciora.

De motu permanenti electricitatis in interioribus corporum homogeneorum.

4.

Proponitur corpus A , extensum, homogeneum; puncta in interioribus ejus sita ad coordinatarum systema orthogonale referuntur ipsorum x, y, z . Densitas electrica ut supra vocatur u , potentiale electricum v .

Secundum ea, quae sub finem § 2. statuimus, id nunc agitur, ut incrementum inveniatur, quod copia electricitatis in elemento aliquo ipsius A contenta acciperet, si electricitas statum permanentem modo relictura esset.

Quod incrementum secundum principium superpositionis parvarum mutationum aequale est summae incrementorum, quibus copia illa augeatur, si utrumque phaenomenum fundamentale solum existeret. Unde jam protinus conductionem electricitatis actionemque influentiae separatas tractare nobis licet.

Ipsam corpus A planis, quae coordinatarum planis parallela sunt, in parallelepipeda dividimus infinite parva, quorum latera, axibus ipsorum x, y, z parallela, sunt dx, dy, dz . Brevitatis causa haec elementa nomen ducent ab illa cuspide, cujus coordinatae algebraice minores sunt: ita ut e. g. parallelepipedum, quod cuspidibus (x, y, z) et $(x + dx, y + dy, z + dz)$ determinatur, ad punctum (x, y, z) pertinere dicatur.

In praesentia tamen non alia elementa considerabuntur, nisi quae tota in interioribus ipsius A sita sunt, quum elementa superficiei nimium propinqua peculiarem tractationem sibi poscant.

1. *Incrementum e conductione ortum.* Per unumquodque sex laterum parallelepipedi ad punctum (x, y, z) pertinentis secundum ea, quae in prima sectione § 1 antecedentis invenimus, flumen conductivum transit, cujus intensitas formula D. determinatur.

Si e. g. latera duo contemplamur, quae in directione ipsorum x perpendicularia sunt, et planis $X = x$, $X = x + dx$ continentur: in formula D. ponendum erit $\omega = dy dz$, $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = 90^\circ$. Per prius illorum igitur in directione abscissarum x decrescentium, id est ex interioribus parallelepipedi, copia electricitatis transit

$$k \frac{du}{dx} dy dz dt;$$

qua in expressione si ipsum x quantitate dx augemus, eruimus copiam, quae ab altera parte in parallelepipedum ingreditur, igitur

$$k \left(\frac{du}{dx} + dx \frac{d^2u}{dx^2} \right) dy dz dt.$$

De qua si quantitatem priorem deducimus, obtinemus incrementum,

quod copia electricitatis in parallelepipedo nostro fluminibus illis accipit, hoc

$$k \frac{d^2 u}{dx^2} dx dy dz dt.$$

Simili modo parallelepipedum e duabus reliquis coordinatarum directionibus incrementa accipit

$$k \frac{d^2 u}{dy^2} dx dy dz dt \quad \text{et} \quad k \frac{d^2 u}{dz^2} dx dy dz dt;$$

unde incrementum e conductione electricitatis ortum integrum hoc est:

$$K. \quad k \left\{ \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right\} dx dy dz dt.$$

2. *Incrementum ex electricitatibus influentia dissociatis.* Sint

$$v', v, v_1$$

valores, quos potentiale electricum in parallelepipedis contiguis, ad puncta

$$(x - dx, y, z), (x, y, z), (x + dx, y, z)$$

pertinentibus obtinet, secundum formulam G. §ⁱ antecedentis

e primo parallelepipedo in secundum electricitatis copia transit

$$- \frac{h}{c} \frac{dv'}{dx} dy dz dt,$$

e secundo autem in tertium

$$- \frac{h}{c} \frac{dv}{dx} dy dz dt.$$

Porro secundum formulam H. ejusdem §ⁱ

e tertio parallelepipedo in secundum copia transit

$$\frac{h}{c} \frac{dv_1}{dx} dy dz dt,$$

e secundo in primum

$$\frac{h}{c} \frac{dv}{dx} dy dz dt.$$

In secundo igitur parallelepipedo, quod ad punctum (x, y, z) pertinet, copia remanet

$$\begin{aligned} \frac{h}{c} \left\{ - \frac{dv'}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dv_1}{dx} - \frac{dv}{dx} \right\} dy dz dt &= \frac{h}{c} \left\{ \frac{dv_1}{dx} - \frac{dv'}{dx} \right\} dy dz dt \\ &= \frac{2h}{c} \frac{d^2 v}{dx^2} dx dy dz dt, \end{aligned}$$

quod est incrementum copiae electricitatis in parallelepipedo nostro contentae, illi parti fluminis inductivi debitum, quae per latera parallelepipedi ad planum ipsorum y et z parallela penetrat: atque apparet, ad ejus formationem quantitates, quae ex ipso elemento processerunt,

nihil contribuisse, sicut re vera secundum principium §ⁱ 3. 2) evenire debet.

Simili modo e duabus reliquis coordinatarum directionibus obtinentur incrementa

$$\frac{2h}{c} \frac{d^2 v}{dy^2} dx dy dz dt \text{ et } \frac{2h}{c} \frac{d^2 v}{dz^2} dx dy dz dt,$$

unde omnibus collectis, incrementum ex influentiae actione ortum integrum hoc est

$$\text{L.} \quad \frac{2h}{c} \left\{ \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} \right\} dx dy dz dt.$$

Sed e nota potentialium proprietate quum sit

$$\text{P.} \quad \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = -4\pi u,$$

incrementum L. hoc evadit

$$\text{M.} \quad -\frac{8\pi h}{c} u \cdot dx dy dz dt,$$

quae expressio docet, actionis, quam influentia in punctum aliquod in interioribus corporis conducentis situm exercet effectum non pendere nisi a densitate electrica in ipsius puncti propinquitate.

5.

Aequatio motus permanentis in interioribus corporum homogeneorum.

Quum autem propter suppositiones, quas de natura conductoris fecimus, jam nulla alia incrementa speranda sint, secundum ea quae §^o antecedenti monuimus, incrementum completum, quod electricitatis copia in isto parallelepipedo contenta obtinet, summam aequat expressionum K. et M., unde hoc est:

$$\text{N.} \quad \left\{ k \left[\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right] - \frac{8\pi h}{c} u \right\} dx dy dz dt.$$

Ut igitur aequatio formetur, qua motus permanens definitur, hanc quantitatem nihili aequiparamus, e quo, factore $dx dy dz$ sublato, sequitur

$$\text{O.} \quad k \left[\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right] - \frac{8\pi h}{c} u = 0.$$

Quae aequatio ad omnia puncta spectat, quae in interioribus corporis A. versantur.

Hac occasione adnotare convenit, expressionem N. nequaquam valere ad aequationem motus generalem exhibendam, quod ita patet. Considerationes enim, quas in § 3. instituimus, praecipue ea nituntur suppositione, distributionem electricitatis, de qua agitur, initio temporis dt

permanentem fuisse: simul hypotheses, quas ibi collocavimus, praesertim ea, quae in sectione secunda posita est, nonnisi tales modificationes sunt hypothesisum generalium, quales motui permanenti conveniunt. Ad disquisitionem denique motus generalis notiones in praesentiarum adhibitae non sufficiunt, quum etiam velocitates electricitatis in singulis punctis in calculum introducere opus sit.

Ad exactam cognitionem phaenomenorum, quae electricitas mota praebet, praeter densitatem electricitatis etiam flumen electricum in quovis puncto conductoris determinari oportet. Quem in finem sit rursus ω elementum areae infinite parvum punctum (x, y, z) continens, et α, β, γ anguli, quos perpendicularum supra ω in certam regionem erectum cum axibus coordinatarum facit. Secundum formulas D'. et I. per ω in directione hujus perpendiculari transit flumen conductivum

$$-k \left\{ \frac{du}{dx} \cos \alpha + \frac{du}{dy} \cos \beta + \frac{du}{dz} \cos \gamma \right\} \omega dt,$$

et flumen inductivum

$$- \frac{2h}{c} \left\{ \frac{dv}{dx} \cos \alpha + \frac{dv}{dy} \cos \beta + \frac{dv}{dz} \cos \gamma \right\} \omega dt,$$

unde electricitatis transeuntis copia universa haec est:

$$\begin{aligned} \text{q.} \quad & - \left\{ \frac{d}{dx} \left(ku + \frac{2h}{c} v \right) \cos \alpha + \frac{d}{dy} \left(ku + \frac{2h}{c} v \right) \cos \beta \right. \\ & \left. + \frac{d}{dz} \left(ku + \frac{2h}{c} v \right) \cos \gamma \right\} \omega dt. \end{aligned}$$

Quae expressio si ad unitatem areae et temporis refertur, non tamen neglectis iis, quae de situ areae statuta sunt, eruitur *flumen electricum* ad talem areae unitatem pertinens. Unde si ponimus

$$\text{P.} \quad ku + \frac{2h}{c} v = kw,$$

ejusdem fluminis expressio haec est

$$\text{Q.} \quad -k \left\{ \frac{dw}{dx} \cos \alpha + \frac{dw}{dy} \cos \beta + \frac{dw}{dz} \cos \gamma \right\}.$$

Invenimus igitur, quod attentione satis dignum esse videtur, flumen electricum permanens e duobus fluminibus conflari, flumine ordinario conductivo et flumine extraordinario inductivo.

Jam angulos α, β, γ ita determinare licet, ut flumen Q. quam maximum evadat.

Qua in re si relationem respicis $\cos \alpha^2 + \cos \beta^2 + \cos \gamma^2 = 1$, hujus fluminis statim obtinebis expressionem

$$\text{R.} \quad S = k \sqrt{\left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dz} \right)^2},$$

et ad ejus directionem definiendam

$$S. \quad \cos \alpha = -\frac{k}{S} \frac{dw}{dx}, \quad \cos \beta = -\frac{k}{S} \frac{dw}{dy}, \quad \cos \gamma = -\frac{k}{S} \frac{dw}{dz}.$$

Sint α', β', γ' anguli, quos recta in hac directione perpendicularis cum axibus coordinatarum facit, e relatione $\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' = 0$ sequitur, flumen electricum in hac directione esse nullum.

Quum autem in flumen R. eadem considerationes institui possint, quae initio §ⁱ 3. 1) factae sunt, percipitur, flumen Q. non esse nisi eam partem fluminis R., quae per unitatem areae ad form. Q. pertinentem transit in planum ad directionem ipsius R. perpendicularare projectam. Flumen R. igitur est flumen electricum proprie dictum.

Quibus positis omnes notiones patent, quae in problemate nostro determinandae sunt: omniaque ad densitatem electricam u , potentiale v in spatio externo et functionem w revocantur. Functiones autem v et w more satis memorabili conjunguntur, quem infra ostendemus.

De motu electricitatis permanenti in superficie corporum homogeneorum.

6.

Calculi hactenus instituti quum ad omnia elementa valeant, quae tota in interioribus ipsius conductoris versantur, talia tantum nobis considerata restant elementa, quae superficiei illius quam proxime adjacent.

Quae elementa prae ceteris corporis partibus variis proprietatibus excellunt: primum propter ingentem resistantiam, quam electricitas in superficie conductoris patitur (§ 3. Corollarium), tum eo, quod praeter conductionem et disjunctionem electricitatis etiam ad actionem vis electromotoricae respiciendum sit.

Jam in hac disquisitione iterum *principio* §ⁱ 2. utemur, motum permanentem electricitatis eo determinari, ut summa singulorum incrementorum, quibus electricitatis copia in elemento aliquo contenta per datum temporis intervallum augetur, nihili aequiparetur. Quae methodi aequalitas, quum in ipsius rei natura posita sit, tamen nos coget, ut actionem vis electromotoricae tali modo in calculos introducamus, cujus nexum cum praeceptis ab Ill. Ohm prolatis non primo adspectu dijudicare liceat.

Fig. 6. Sit s superficies, in qua corpora A et A' inter se contingunt, quam

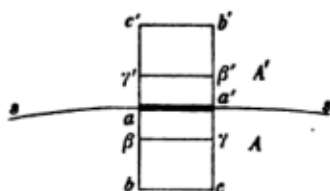


Fig. 6.

ubique continue curvatam esse supponimus. (Figura nostra sicut superiores intersectionem planam exhibet.) Sit ω elementum illius infinite parvum, aa' ejus intersectio. Supra ω in utrasque directiones cylindros perpendiculares exstruimus sectionibus transversis terminatos $abca'$, $a'b'c'a$, quorum volumina sint $\omega\delta$, $\omega\delta'$.

Secundum § 3. ad formationem fluminum ibi determinantum eae tantum corporis particulae contribuant, quarum distantia ab elemento ω , per quod illa migrant, infinite parva est, et quidem facile intelligitur, distantiam punctorum ultimorum, e quibus electricitatis copiae sensibiles trans ω mittuntur, a velocitate electricitatis pendere et a magnitudine elementi temporis.

Itaque, si δ et δ' infinite parva esse statuimus, tamen supponere fas est, areas bc , $b'c'$ utique postulatis § 3. respondere: dum ab altera parte persuasum habere possumus, tales sectiones transversas $\beta\gamma$, $\beta'\gamma'$, quarum distantiae ab aa' respectu ipsorum δ , δ' satis parvulae sunt, postulatis iisdem nullo modo esse responsuras.

Jam ut aequationes obtineamus, quibus motus permanens in superficie determinatur, quatuor illa elementa $\beta bc\gamma$, $a\beta\gamma a'$, $a'\beta'\gamma'a$, $\beta'b'c'\gamma'$ singula seorsim examinabimus.

Qua in re illarum electricitatis copiarum, quae per superficiem cylindricam fluunt, nulla ratio habenda erit: quum enim illae leges supra exhibitae sequantur, secundum § 4. quae ex illis oriuntur incrementa quarti ordinis sunt, unde, quod mox patebit, prae quantitatibus, de quibus hic agendum est, omnino negligenda sunt.

Brevitatis causa sint $\frac{dP}{dp}$, $\frac{dP'}{dp'}$ quotientes differentiales functionum P , P' , ex elementis $\beta bc\gamma$, $\beta'b'c'\gamma'$ in directionibus perpendiculi ad interiora corporum A , A' spectantibus sumti¹⁾: dum functio P' in corpore A' easdem partes agit, quales P in corpore A .

Quibus positis, elementa $\beta bc\gamma$, $\beta'b'c'\gamma'$ per latera bc , $b'c'$ tempore dt secundum § 5. q. copias electricitatis obtinent:

$$r. \quad \left(k \frac{du}{dp} + \frac{2h}{c} \frac{dv}{dp}\right) \omega dt, \quad r'. \quad \left(k' \frac{du'}{dp'} + \frac{2h'}{c} \frac{dv'}{dp'}\right) \omega dt.$$

Quum autem secundum suppositiones, quibus hae formulae nituntur,

1) Haec denotatio quotientium differentialium, cujus in posterum semper usus erit, ab usitata tantum signo differt, sed rerum naturae magis convenire visa est.

x illis elementis per $bc, b'c'$ electricitatis copiae influentia ortae
 $-\frac{h}{c} \frac{dv}{dp} \omega dt, -\frac{h'}{c'} \frac{dv}{dp'} \omega dt$ secesserint, ex iisdem elementis quantitates
 aequivalentes sed signo oppositas per $\beta\gamma, \beta'\gamma'$ profluant necesse est.
 Unde elementa $\alpha\beta\gamma a', \alpha'\beta'\gamma' a$ ab elementis $\beta bc\gamma, \beta' b'c'\gamma'$ quantitates
 obtinent:

$$s. \quad \frac{h}{c} \frac{dv}{dp} \omega dt, \quad s'. \quad \frac{h'}{c'} \frac{dv}{dp'} \omega dt.$$

Jam ut aequationes eruantur, quae ad elementa $\beta bc\gamma, \beta' b'c'\gamma'$ spectant,
 copiae determinandae sunt, quae ex elementis $\alpha\beta\gamma a', \alpha'\beta'\gamma' a$ in illa
 procedunt. Quae determinatio quum ex considerationibus superioribus
 haud amplius succedat, e conditione nobis resultabit, motum electrici-
 tatis etiam in elementis $\alpha\beta\gamma a', \alpha'\beta'\gamma' a$ permanentem esse debere. Sint

$$t. \quad \Omega \omega dt, \quad t'. \quad \Omega' \omega dt$$

quantitates, quae requiruntur, si expressionum r. s. t. et r'. s'. t'. ope in-
 crementa formamus, quae elementis $\beta bc\gamma, \beta' b'c'\gamma'$ accipiuntur, his incre-
 mentis, uti debet, nihili aequiparatis, obtinemus aequationes

$$u. \quad k \frac{du}{dp} + \frac{2h}{c} \frac{dv}{dp} + \Omega - \frac{h}{c} \frac{dv}{dp} = 0,$$

$$u'. \quad k' \frac{du'}{dp'} + \frac{2h'}{c'} \frac{dv}{dp'} + \Omega' - \frac{h'}{c'} \frac{dv}{dp'} = 0,$$

ubi factor communis ωdt sponte abiit.

Ad elementa $\alpha\beta\gamma a', \alpha'\beta'\gamma' a$ transimus. In iis expressiones s., s'.
 pro incrementis, contra t., t'. pro decrementis habendae sunt. Porro
 secundum § 3. B. $\alpha\beta\gamma a'$ ab ipso $\alpha'\beta'\gamma' a$ copiam obtinet

$$v, v'. \quad q(u' - u) \omega dt.$$

Jam e principiis in § 3. prolatis sequitur, ut electricitatis copiae,
 quae in interioribus elementorum nostrorum actione influentiae separan-
 tur, ex iisque procedunt, prae ceteris quantitatibus in calculis nostris
 obvenientibus prorsus negligendae sint.

Ponamus enim, actionem influentiae (cujus intensitas ab effectu, e reli-
 quis conditionibus pendente bene distinguenda est), in elemento $\alpha\beta\gamma a'$ tan-
 tam esse, ut flumen per aa' transeuns $E \omega dt$ incitaret, si aa' eandem resisten-
 tiam exerceret, quae in interioribus ipsius A locum habet: hoc flumen secun-
 dum § 3. Corollarium form. k. resistantiam patitur $\frac{k}{qs}$ (ubi s est distantia
 media elementorum, quae tempore dt trans aream ω de electricitate sua com-
 municant): unde pars illius tantum re vera superficiem penetrat, scilicet
 quantitas infinite minor $\frac{qs}{k} \cdot E \omega dt$. Secundum principium autem, quod

§° 3. 2) collocavimus, per $\beta\gamma$ etiam nil pluris transit, nisi quantitas $-\frac{q^s}{k}E\omega dt$, partesque fluminum, quae in interioribus ipsius $a\beta\gamma a'$ retinentur, secundum hoc idem principium pro non-separatis habendae sunt. Qua re sententiam nostram cum considerationibus superioribus consentire evictum est.

Jam ad vim electromotoricam examinandam transimus. Cujus actionem in hac tantum re consistere posse manifestum est, ut in iis corporum contiguum particulis, quibus superficies corporum constant, electricitates conjunctas certo modo disjungat.

Ad rem melius cognoscendam advocamus tabulam Voltae duplicem, quae e physice satis nota est. Fig. 7. Sit $\beta\gamma\beta'\gamma'$ haec tabula, et quidem pars $a\beta\gamma a'$ e zinco, $a'\beta'\gamma' a$ e cupro confecta. Quarum prior propter actionem vis electromotoricae electricitatem positivam exhibet, dum altera electricitate negativa imbuta est. Jam si utraque pars corpore abducente tangitur, (ita tamen, ut novis tactionibus effectus vis electromotoricae in aa' agentis non diminuatur), e cupro continenter totidem electricitatis negativae, quam e zinco positivae profluit. Quo experimento ratio, quomodo actio vis electromotoricae in calculum introducenda sit, omnino decernitur.

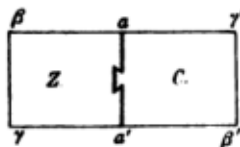


Fig. 7.

Si enim, Fig. 6., discum infinite tenuem $\beta\gamma\beta'\gamma'$ pro tabula Voltaica habemus, prima vis electromotoricae actio in eo consistit, ut in duabus illius partibus electricitatum conjunctarum disjunctionem operet. Sint $-H$, $+H'$ densitates electricitatum hoc modo ex elementis $a\beta\gamma a'$, $a'\beta'\gamma' a$ versus aa' propulsarum, $+H$ igitur et $-H'$ densitates electricitatum, quae ex illis versus $\beta\gamma$, $\beta'\gamma'$ propelluntur: secundum formulam §° 3. B. elementum $a\beta\gamma a'$ per aa' obtinet

$$w. \quad + q(H' + H)\omega dt,$$

ipsum $a'\beta'\gamma' a$ autem

$$w'. \quad - q(H' + H)\omega dt.$$

Illas autem copias, ex actione vis electromotoricae ortas, quae per $\beta\gamma$, $\beta'\gamma'$ fluunt, determinare non opus est, quum expressionibus t . et t' . contineantur. Ceterum si in has quantitates inquirere velles, nec non in istas, quae in interioribus ipsorum $a\beta\gamma a'$, $a'\beta'\gamma' a$ remanent, iterum principio in §° 3. 2) collocato utendum esset.

Expressionibus s . t . v . w . et s' . t' . v' . w' . rite collectis, positoque

$$H + H' = A,$$

conditiones, ut electricitatis motus in particulis $\alpha\beta\gamma\alpha'$, $\alpha'\beta'\gamma'a$ permanens sit, hae inveniuntur

$$x. \quad \frac{h}{c} \frac{dv}{dp} - \Omega + q(u' - u + \mathcal{A}) = 0,$$

$$x'. \quad \frac{h'}{c'} \frac{dv}{dp'} - \Omega' - q(u' - u + \mathcal{A}) = 0,$$

ubi factor communis ωdt sponte abiit.

Jam si summas conficimus aequationum u . et x ., u' . et x' ., quantitates Ω et Ω' abeunt, eruiamusque

$$U. \quad k \frac{du}{dp} + \frac{2h}{c} \frac{dv}{dp} + q(u' - u + \mathcal{A}) = 0,$$

$$U'. \quad k' \frac{du'}{dp'} + \frac{2h'}{c'} \frac{dv}{dp'} + q(u - u' - \mathcal{A}) = 0.$$

Quae in his aequationibus ad laevam obveniunt expressiones si factore ωdt afficiuntur, incrementa completa exhibent a copiis electricitatis in ipsis $abca'$, $a'b'c'a$ contentis accepta.

Quum igitur omnibus satisfecerimus casibus, qui e situ particulae, per quam electricitas migrat, oriuntur, persuasum habere possumus, alias aequationes ad densitatem electricam determinandam non amplius esse circumspiciendas, atque in interioribus corporis A unam tantum valere aequationem O ., in superficie tamen ejus totidem aequationes forma U . gaudentes exstare, quot ipsum A corporibus diversis contingit.

Sin autem aequationum x . et x' . summam facimus, aequatio sequitur

$$\left(\frac{h}{c} \frac{dv}{dp} - \Omega\right) + \left(\frac{h'}{c'} \frac{dv}{dp'} - \Omega'\right) = 0,$$

quae docet, flumen electricum ipsius vis electromotoricae actione auctum, in superficie perpendiculare, ad utrasque ejus partes eodem valore eademque directione uti. Quae tamen aequatio propter U . et U' . superflua redditur.

Aequationes nostrae U . et U' . si cum illis comparantur, quas Ill. Ohm in opere praeclaro pag. 123. exhibuit, primo ad aspectu legem amplitudinum constantium (das Gesetz der constanten Spannungen) impugnavisse videmur. Sed in §º sequenti hanc legem, experientia nonnisi in casu apparatus voltaici aperti (der offenen galvanischen Kette) probatam, eodem casu etiam e nostris formulis sequi demonstrabitur.

Jam propter dignitatem rei indicabimus, quis sit nexus inter aequationes nostras U . et U' . illasque, quae alias in theoria contactus galvanici exhiberi solent. Aequationibus illis in se ductis invenimus

$$\left(k \frac{du}{dp} + \frac{2h}{c} \frac{dv}{dp}\right) + \left(k' \frac{du'}{dp'} + \frac{2h'}{c'} \frac{dv}{dp'}\right) = 0,$$

unde sequitur, flumen electricum, in superficie perpendiculari ad utrasque ejus partes eodem valore eademque directione uti debere: quae est prima conditionum a Cl^o Ohm prolatarum, nisi quod nostra fluminis definitio ab usitata influentiae ratione differt. Porro jam in § 3. e definitione quantitatis q conclusimus, valorem ejus, quoties A et A' boni conductores sunt, procul dubio permagnum fore. Quod si admittimus, si conditionem addimus, flumen electricum non nimio valore gaudere, ex U , si per p dividitur, sequitur, approximatum haberi aequationem

$$u - u' = A,$$

quae est altera aequationum a Cl^o Ohm l. c. exhibitum.

Jam casus nonnullos proponemus, quibus aequatio U . simpliciore formam impetrat. Inter quos maxime referendus est sequens.

1) Sit A' non-conductor electricitatis, erit $q = 0$, unde aequatio in superficie oritur

$$U_1. \quad k \frac{du}{dp} + \frac{2h}{c} \frac{dv}{dp} = 0.$$

Secundum § 1. 2) tamen problema nostrum non existeret, si haec aequatio in tota superficie locum haberet.

2) Corpus A' proprietatibus utatur flatus aëris, male conducentis, continue se renovantis: in aequatione generali ponendum est $u' = 0$, $A = 0$, eritque

$$U_2. \quad k \frac{du}{dp} + \frac{2h}{c} \frac{dv}{dp} - qu = 0.$$

Ratio autem, qua deperditionem electricitatis in aërem respeximus, cum lege a Cl^o Coulomb inventa omnino consentit.

De motu electricitatis in conductoribus linearibus, actione influentiae neglecta.

7.

In § 5. antecedenti a methodo hactenus in theoria contactus galvanici usitata discedere coacti sumus. E qua re nova quae redundant ut cum consiliis priorum comparari possint, electricitatis motum in conductoribus linearibus tractabimus ita comparatis, ut quantitas $\frac{h}{c}$ (vide § 5. O.) respectu ipsius k tam parva sit, ut et ipsa et omnes quantitates ipsi proportionales sine damno negligi possint. Quae postulatio quum etiam ita pronunciari possit, ut k ipsum $\frac{h}{c}$ eximie superet, manifestum est, corpora de quibus agimus, siquidem exstant, praecipue bonis conductoribus adnumeranda esse. Etiam quae e suppositione illa

resultant, egregie cum observationibus consentiunt in bonis conductoribus institutis, dum mali conductores, sicut experientia infraque calculi docent, longe alias leges sequuntur. Unde jam hoc loco proponemus, quod sequentibus comprobabitur, suppositionem patere ad omnes optimos conductores, neque tamen ad ullam aliam corporum speciem.

Fingamus igitur cyclum clausum conductorum linearium, sectionibus transversis constantibus utentium $A_1, A_2, \dots A_m$, qui in ordine indicum sese contingunt, quorum ultimus primo contiguus seriem concludit. Conductores omnes in superficie libera non-conductoribus contiguos esse statuimus.

Sint pro indicis μ valoribus $1, 2, \dots m$

$$u_\mu, l_\mu, \omega_\mu, k_\mu$$

densitas electrica, longitudo, sectio transversa, conductibilitas ipsius A_μ , porro u_μ^0, u_μ' valores ipsius u_μ in propinquitate eorum locorum, ubi A_μ cum $A_{\mu-1}$ resp. $A_{\mu+1}$ contingit; sint denique $q_\mu, \mathcal{A}_\mu$ valores, quos ipsa $q, \mathcal{A}$ (conf. § 6. U. U.) in superficie contactus communi corporum $A_\mu, A_{\mu+1}$ obtinent: si omnia puncta ad coordinatarum systema orthogonale ipsorum ξ, η, ζ referuntur, ad determinationem ipsius u_μ aequationes habemus sequentes.

In interioribus ipsius A_μ (§ 5. O.):

$$(1) \quad \frac{d^2 u_\mu}{d\xi^2} + \frac{d^2 u_\mu}{d\eta^2} + \frac{d^2 u_\mu}{d\zeta^2} = 0;$$

in superficie libera ipsius A_μ (§ 6. U₁):

$$(2) \quad \frac{du_\mu}{dp_\mu} = 0;$$

in ea ipsius A_μ superficie, qua cum $A_{\mu-1}$ contingit (§ 6. U'):

$$(3) \quad k_\mu \frac{du_\mu^0}{dp_\mu} + q_{\mu-1} (u'_{\mu-1} - u_\mu^0 - \mathcal{A}_{\mu-1}) = 0;$$

et, ubi A_μ cum $A_{\mu+1}$ contingit (§ 6. U.):

$$(4) \quad k_\mu \frac{du'_\mu}{dp_\mu} + q_\mu (u_{\mu+1}^0 - u'_\mu + \mathcal{A}_\mu) = 0.$$

Jam si statuimus, indicem inferiorem m , si ν unitatibus augetur, non transire in $(m + \nu)$ sed in ν , principium e quo signa quantitatum $\mathcal{A}$ eliguntur, praecepto continetur, ut aequationes, quae ad reliquos conductores pertinent, e praecedentibus eo eruantur, ut omnes indices eadem unitatum copia augeantur. Ita e. g. aequatio ipsius $u_{\mu+1}^0$ e tertia emergit haec:

$$(5) \quad k_{\mu+1} \frac{du_{\mu+1}^0}{dp_{\mu+1}} + q_\mu (u'_\mu - u_{\mu+1}^0 - \mathcal{A}_\mu) = 0.$$

Quae formulae ut casui nostro applicari queant, formulam notissimam advocamus

$$(6) \quad \int \left\{ \frac{d^2 A}{d\xi^2} + \frac{d^2 A}{d\eta^2} + \frac{d^2 A}{d\xi^2} \right\} d\xi d\eta d\xi = - \int \frac{dA}{dp} ds,$$

in qua ds est elementum superficiei ejusdem voluminis, supra quod integrale triplex extenditur, denotante $\frac{dA}{dp}$ quotientem differentialem ipsius A in directione supra (§ 6.) determinata.

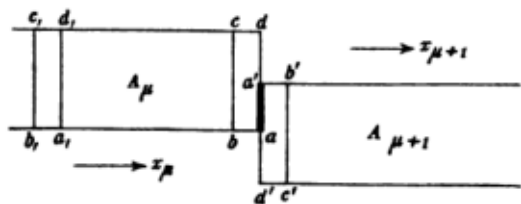


Fig. 8.

Qua in formula si ponimus $A = u_\mu$, integrali triplice supra talem ipsius A_μ partem extenso, quae (Fig. 8) sectionibus transversis $a_1 d_1, b_1 c_1$ terminatur, propter 1. obtinemus

$$(7) \quad \int \frac{du_\mu}{dp_\mu} ds = 0.$$

Propter 2. autem ex hoc integrali ea pars abit, quae ad superficiem ipsius A_μ spectat. Unde si in posterum axes conductorum linearium, vel rectas vel curvatas, pro axibus abscissarum habemus, in singulis conductoribus originem ab ea parte ducentibus, quae corpori in ordine indicum antecedenti quam proxima est, ipsis insuper abscissis $x_1, x_2, \dots x_\mu$ vocatis, aequatio 7., latitudine disci $a_1 b_1 c_1 d_1$ posita $= dx_\mu$, in hanc transit:

$$dx_\mu \int \frac{d^2 u_\mu}{dx_\mu^2} ds = 0,$$

ubi ds est elementum sectionis transversae constantis ω_μ . Valorem igitur medium ipsius u_μ in hac sectione si u_μ vocare pergamus, sequitur

$$\frac{d^2 u_\mu}{dx_\mu^2} \omega_\mu dx_\mu = 0,$$

vel denique

$$(8) \quad \frac{d^2 u_\mu}{dx_\mu^2} = 0.$$

E qua, si f_μ, c_μ sunt constantes indeterminatae

$$(9) \quad u_\mu = f_\mu x_\mu + c_\mu$$

sequitur. In hac aequatione autem x_μ limites 0 et l_μ egrediatur nefas est. Porro est

$$(10) \quad u_\mu^0 = c_\mu, \quad u_\mu' = f_\mu l_\mu + c_\mu, \quad \frac{du_\mu}{dx_\mu} = f_\mu.$$

Aequatio 7. etiam tunc valet, si ds est elementum superficiei talis partis $abcd$ (Fig. 8) ipsius A_μ , quae finem ejus facit, ubi cum $A_{\mu+1}$ contingit. In superficie autem hujus partis distinguenda est:

- 1) sectio transversa bc , cujus elementum sit $d\omega_\mu$;
- 2) superficies libera, cujus elementum sit ds_μ ;
- 3) superficies denique aa' , in qua A_μ et $A_{\mu+1}$ contingunt; aream ejus ponamus $= \Omega_\mu$, elementum $= d\Omega_\mu$. Quibus praeparatis, aequatio 7. in hanc transit

$$\int \frac{d\omega'_\mu}{dp_\mu} d\omega_\mu + \int \frac{ds'_\mu}{dp_\mu} ds_\mu + \int \frac{d\Omega'_\mu}{dp_\mu} d\Omega_\mu = 0,$$

ubi propter aequ. 2. integrale secundum sponte abit. In tertium autem integrale aequationem 4. ducimus, unde, si iterum ad valores medios redimus, hancce obtinemus formulam

$$(11) \quad k_\mu \omega_\mu \frac{du'_\mu}{dx_\mu} - q_\mu \Omega_\mu (u''_{\mu+1} - u'_\mu + \mathcal{A}_\mu) = 0,$$

quam factore k_μ affecimus.

In formula 7. ponendo $\mu + 1$ loco μ , si ad initium $a'b'c'd'$ eam applicamus conductoris $A_{\mu+1}$, eodem modo formulae 5. ope eruiamus sequentem

$$(12) \quad k_{\mu+1} \omega_{\mu+1} \frac{du''_{\mu+1}}{dx_{\mu+1}} + q_\mu \Omega_\mu (u'_\mu - u''_{\mu+1} - \mathcal{A}_\mu) = 0.$$

Jam in 11. et 12. valores introducamus e 10. petitos:

$$(13) \quad k_\mu \omega_\mu f_\mu + q_\mu \Omega_\mu \{f_\mu l_\mu + c_\mu - c_{\mu+1} - \mathcal{A}_\mu\} = 0$$

$$(14) \quad k_{\mu+1} \omega_{\mu+1} f_{\mu+1} + q_\mu \Omega_\mu \{f_\mu l_\mu + c_\mu - c_{\mu+1} - \mathcal{A}_\mu\} = 0,$$

e quibus igitur

$$(15) \quad k_\mu \omega_\mu f_\mu = k_{\mu+1} \omega_{\mu+1} f_{\mu+1}$$

sequitur. Hanc aequationem loco unius alteriusve aequationum 13., 14. introducere licet; partes expleat ipsius 14.

Jam si observas, aequationes praecedentes non cessare recte valere, si omnes indices eadem unitatum copia augentur, statim videbis, in aequatione 15. systema contineri aequationum

$$(16) \quad k_1 \omega_1 f_1 = k_2 \omega_2 f_2 = \dots = k_m \omega_m f_m.$$

Quantitates autem singulae, quae ita aequales inveniuntur, magnitudinem exprimunt fluminis electrici in singulis conductoribus; quod si S vocamus, eruiamus

$$(17) \quad f_1 = \frac{S}{k_1 \omega_1}, \quad f_2 = \frac{S}{k_2 \omega_2}, \quad \dots \quad f_m = \frac{S}{k_m \omega_m}.$$

Ad aequationum systema transimus, quod ex formula 13. oritur. Loco ipsius f_μ valore ejus introducto, aequatione per $q_\mu \Omega_u$ divisa, si ipsi μ valores 1, 2, ... m tribuimus, obtinemus

$$\begin{aligned}
 \frac{S}{q_1 \Omega_1} &= c_2 - c_1 - S \frac{l_1}{k_1 \omega_1} + \mathcal{A}_1 \\
 \frac{S}{q_2 \Omega_2} &= c_3 - c_2 - S \frac{l_2}{k_2 \omega_2} + \mathcal{A}_2 \\
 &\vdots \\
 \frac{S}{q_\mu \Omega_\mu} &= c_{\mu+1} - c_\mu - S \frac{l_\mu}{k_\mu \omega_\mu} + \mathcal{A}_\mu \\
 &\vdots \\
 \frac{S}{q_m \Omega_m} &= c_1 - c_m - S \frac{l_m}{k_m \omega_m} + \mathcal{A}_m.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Quarum aequationum si μ primas addimus, sequitur

$$S \sum_{v=1}^{v=\mu} \frac{1}{q_v \mathfrak{Q}_v} = c_{\mu+1} - c_1 - S \sum_{v=1}^{v=\mu} \frac{l_v}{k_v \omega_v} + \sum_{v=1}^{v=\mu} \mathcal{A}_v,$$

vel

$$(19) \quad c_{\mu+1} = c_1 + S \sum_{v=1}^{v=\mu} \left\{ \frac{l_v}{k_v \omega_v} + \frac{1}{q_v \mathfrak{Q}_v} \right\} - \sum_{v=1}^{v=\mu} \mathcal{A}_v.$$

Omnibus autem aequationibus 18. computatis, omnes c abeunt, habeturque

$$S = \frac{\sum A}{\sum \left(\frac{l}{k\omega} + \frac{1}{qQ} \right)} = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_m}{\frac{l_1}{k_1\omega_1} + \frac{l_2}{k_2\omega_2} + \dots + \frac{l_m}{k_m\omega_m} + \frac{1}{q_1Q_1} + \frac{1}{q_2Q_2} + \dots + \frac{1}{q_mQ_m}}$$

Ad hanc aequationem, si in formulam q. valores nunc determinati substituuntur, accedunt hae:

$$(21) \quad u_1 = S \cdot \frac{x_1}{k_1 \omega_1} + c_1$$

$$u_{\mu+1} = S \left\{ \frac{l_1}{k_1 \omega_1} + \frac{l_2}{k_2 \omega_2} + \dots + \frac{l_\mu}{k_\mu \omega_\mu} + \frac{x_{\mu+1}}{k_{\mu+1} \omega_{\mu+1}} + \frac{1}{q_1 \Omega_1} + \frac{1}{q_2 \Omega_2} + \dots + \frac{1}{q_\mu \Omega_\mu} \right\}$$

$$- (A_1 + A_2 + \dots + A_\mu) + c_1.$$

Si tamen omnibus diversorum indicum abscissis cum ipsis x_i originem communem esse placet, novaeque abscissae vocantur x , in antecedentibus ponendum est $x_1 = x$, $x_{\mu+1} = x - (l_1 + l_2 + \dots + l_\mu)$.¹⁾

Jam casus nonnullos, qui in formulis nostris continentur, exponemus.

I. Sit corpus A_m non-conductor electricitatis, igitur $k_m = 0$, ipsius S denominator infinitus est, itaque $S = 0$. Unde formulae 21. in hasce transeunt

$$u_1 = c_1, \quad u_2 = c_1 - \Delta_1, \quad u_3 = c_1 - (\Delta_1 + \Delta_2), \dots \\ u_{m-1} = c_1 - (\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_{m-1}).$$

Ex his sequitur

$$u_1 - u_2 = \Delta_1, \quad u_2 - u_3 = \Delta_2, \dots u_{m-2} - u_{m-1} = \Delta_{m-2},$$

quae est lex amplitudinum constantium, quae experientia in apparatu Voltaico aperto probata est.

Si igitur apparatus, in quem antea inquisivimus, qui m conductoribus confectus erat, eo in apparatus apertum mutatur, ut conductore A_1 in duas partes diviso, conjunctio tollatur, designaturque u_{m+1} densitas electrica in ea ipsius A_1 parte, quae cum ipso A_m conjuncta permansit, habetur

$$u_1 = c_1, \quad u_2 = c_1 - \Delta_1, \dots u_m = c_1 - (\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_{m-1}), \\ u_{m+1} = c_1 - (\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_m),$$

ideoque

$$u_1 - u_{m+1} = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_m.$$

Hoc igitur modo obtinetur numerator ipsius S , quem *summam amplitudinum in apparatu aperto obviarum* appellabimus.

Quoniam autem ex expressionibus densitatum electricarum quantitates ω et Ω abierunt, in apparatu illo aperto distributio et intensitas electricitatis a magnitudine sectionum transversarum et superficierum contactus est independens.

Jam si quantitatem $\frac{l_v}{k_v \omega_v}$ vocamus resistantiam conductoris A_v , item $\frac{1}{q_v \Omega_v}$ resistantiam, quam superficies Ω_v exercet, aequatio 20. docet,

in apparatu Voltaico clauso flumen electricum aequale esse summae amplitudinum in apparatu aperto obvenientium, per summam omnium resistantiarum in apparatu obviarum divisae.

Lex fluminis electrici si his verbis pronunciatur, omnino cum ea consentit, quam Cl. Ohm protulit; tota differentia in eo posita est, ut in nostra formula etiam resistantiae occurrant, in superficiebus contactus locum habentes. Quarum vis ac potestas quo melius perspiciatur, casus considerabimus sequentes.

¹⁾ De aequ. 20. et 21. conf. Die galv. Kette pag. 148 et 178.

II. Statuamus, singulis conductoribus ordineque eorum omnino immutatis manentibus, unam superficiem contactus diminui: quod quomodo fieri possit, e figura nostra 8. satis perspicuum est; quae ubi satis parva facta est, ipsum S iterum tantum denominatorem obtinet, ut pro evanescente haberi possit. Simul electricitatis distributio ad ejus similitudinem pergit, quae in apparatu aperto invenitur.

Cum hac re cautela illa in apparatibus galvanicis usitata cohaeret, ut superficies contactus quam maximae reddantur.

III. Hunc denique casum fingamus, quo conductoris A_1 loco successive alii alique conductores substituuntur ex eadem substantia confecti, qui ita comparati sunt, ut ipsis l_1 et ω_1 decrecentibus, ratio $\frac{l_1}{\omega_1}$ vel $\frac{l_1}{k_1 \omega_1}$ immutata maneat. Simpliciter causa statuamus, corpora A_2 et A_m ab ipsa A_1 tota ejus sectione transversa tangi, esse igitur $\Omega_m = \Omega_2 = \omega_1$. Quibus positis, simulatque ipsum ω_1 infra certum limitem decreverit, omnes terminos in denominatore ipsius S obvios prae hisce $\frac{1}{q_1 \omega_1} + \frac{1}{q_m \omega_1}$ negligere licet, obtineturque

$$S = \frac{\omega_1}{\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_m}} \{A_1 + A_2 + \dots + A_m\}, \quad u_1 = \frac{x_1(A_1 + A_2 + \dots + A_m)}{k_1 \left(\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_m}\right)} + c_1,$$

$$u_{\mu+1} = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_m}{q_1 \left(\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_m}\right)} - (A_1 + A_2 + \dots + A_\mu) + c_1.$$

Haec apparatus constructio igitur ea proprietate excellit, ut 1) flumen electricum valde exiguum sit, quamvis quantitas $\Sigma \frac{l}{k\omega}$ non nimio valore gaudeat, quae res notissima e sola deminutione conductibilitatis ipsius A_1 explicari solebat, quae phaenomeno quodam secundo, quod casu nostro evitari nequit, operatur; 2) ut in conductore A_1 densitas electrica a puncto in punctum rapide varietur, dum in reliquis conductoribus electricitas ad instar apparatus aperti distributa est.

Jam ad quaestiones pergimus generaliores.

Calculi praeliminares.

8.

Simplicitatis causa si ponimus

$$\frac{kc}{8\pi h} = a^2, \quad \frac{qc}{8\pi h} = b,$$

motus electricitatis in corpore A aequationibus determinatur sequentibus:

$$\text{I.} \quad a^2 \left\{ \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right\} = u,$$

$$\text{II.} \quad a^2 \frac{du}{dr} + \frac{1}{4\pi} \frac{dv}{dr} + b(u' - u + A) = 0,$$

quarum prima ad interiores ipsius A partes spectat, altera ad eas superficiei partes, in quibus corpore A' contingitur.

Aequationi I. formulas nonnullas superstruamus, quae quum ad tractationem ejus faciant, eo etiam excellunt, quod modo satis concinno notiones quasdam inter se conjungant, quae in theoria nostra fundamentales sunt.

Jam quaeramus potentiale v puncti x_1, y_1, z_1 , respectu corporis formandum, in quo electricitatis motus permanens factus est.

Aequationis I. ope, si statuitur

$$r^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2$$

habemus

$$v = \int \frac{u dx dy dz}{r} = a^2 \int \frac{dx dy dz}{r} \left\{ \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right\},$$

ubi integratio supra corpus universum extenditur. In hac expressione si integratio per partes more solito perficitur, obtinemus, designante ds elementum superficiei

$$v = -a^2 \int \frac{du}{dr} \frac{ds}{r} - a^2 \int \left\{ \frac{du}{dx} \frac{d}{dx} \frac{1}{r} + \frac{du}{dy} \frac{d}{dy} \frac{1}{r} + \frac{du}{dz} \frac{d}{dz} \frac{1}{r} \right\} dx dy dz,$$

ubi $\frac{du}{dr}$ est iterum quotiens differentialis ipsius u in directione perpendiculari ad interiora ipsius A spectantis formatus.

Est autem

$$\frac{du}{dx} \frac{dr}{dx} + \dots = \frac{du}{dr}, \quad \text{itaque} \quad \frac{du}{dx} \frac{d}{dx} \frac{1}{r} + \dots = -\frac{1}{r^2} \frac{du}{dr},$$

unde integrale triplex in formula antecedenti obveniens aequale est huic

$$a^2 \int \frac{du}{dr} \cdot \frac{dx dy dz}{r^2},$$

vel si loco orthogonalium coordinatae polares r, θ, φ introducuntur, punctumque x_1, y_1, z_1 earum initium esse statuitur,

$$a^2 \int \frac{du}{dr} dr \cdot \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Jam casus distinguendi sunt, prout punctum attractum in interioribus ipsius A partibus situm est, aut in spatio externo.

1) Punctum attractum sit in spatio externo. Hic quoniam distantia r nunquam evanescit, integrale nostrum in summam integralium transit forma utentium

$$a^2 \int \sin \theta d\theta d\varphi \int_r' \frac{du}{dr} dr = a^2 \int (u'' - u) \sin \theta d\theta d\varphi,$$

ubi accentuum significatio sponte patet. Sint ds' , ds'' elementa superficiei radiis vectoribus r' , r'' correspondentia, α' , α'' anguli a radiis illis uno tractu cum perpendicularo ad interiora ipsius A spectanti intercepti, fit

$$\text{in puncto anteriore } \sin \theta d\theta d\varphi = - \frac{ds' \cos \alpha'}{r'^2},$$

$$\text{atque in altero } \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{ds'' \cos \alpha''}{r''^2},$$

unde integrale nostrum invenitur esse

$$a^2 \int \frac{u \cos \alpha ds}{r^2}.$$

In quo si integratio ad universam superficiem extenditur, valor etiam integralis triplicis suppeditatur. Ex elementis trigonometriae planae patet esse

$$\cos \alpha = - \frac{dr}{dp}, \quad \text{ideoque } \frac{\cos \alpha}{r^2} = \frac{d \frac{1}{r}}{dp},$$

unde denique, omnibus rite collectis, habemus

$$\text{III.} \quad v = a^2 \int \left\{ u \frac{d \frac{1}{r}}{dp} - \frac{1}{r} \frac{du}{dp} \right\} ds.$$

2) Punctum attractum autem si in interioribus ipsius A partibus versatur, eorum quae modo exposuimus nihil mutatur praeterquam quod integralium, in quae triplex illud decomponendum est, unum limite inferiore utitur evanescenti. Hoc autem, si u est densitas electrica in puncto attracto, aequale fit expressioni

$$\begin{aligned} a^2 \int \sin \theta d\theta d\varphi \int_0^r \frac{du}{dr} dr &= a^2 \int (u' - u) \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= -4\pi a^2 u + a^2 \int u' \sin \theta d\theta d\varphi; \end{aligned}$$

unde eodem modo quo supra obtinemus aequationem

$$\text{IV.} \quad v = -4\pi a^2 u + a^2 \int \left\{ u \frac{d \frac{1}{r}}{dp} - \frac{1}{r} \frac{du}{dp} \right\} ds.$$

Quoties igitur valores, quos u et $\frac{du}{dp}$ in superficie induunt, innotuerunt, innotuit etiam potentiale in spatio externo; quum idem praeterea in interioribus a densitate electrica in puncto attracto pendeat.

Integrale duplex in aequationibus III. et IV. obuium summi momenti est, quum ejus differentiale in interioribus corporum flumen electricum completum, in spatio externo tamen flumen inductivum attractionemque electricam metiatur. Quod igitur in sequentibus littera distincta denotabitur, statuaturque

$$V. \quad w = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ u \frac{d}{dp} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{du}{dp} \right\} ds.$$

Unde sequitur esse

$$w = \frac{v}{4\pi a^3} \quad \text{aut} \quad w = u + \frac{v}{4\pi a^3},$$

prout ipsum w ad punctum in spatio externo aut in interioribus ipsius A situm refertur.

Haec functionis w definitio si cum ea, quam in § 5. P. dedimus, comparatur, aequatione V. definitionem illam amplificatam esse patet. E rationibus autem, quas infra afferemus, productum ex ipso w et conductibilitate k conflatum *pressionem* vocabimus *electricam*.

Quoniam autem ipsum w , simulatque punctum, ad quod pertinet per superficiem ipsum A permeat, saltum definitum facit, ad aequationem pervenimus notatu dignam. Si enim ad superficiem ipsius A perpendicularum ducimus, in eoque ad utraque superficiei latera puncta sumimus superficiei infinite propinqua, ad quae ipsum w deinceps refertur, in puncto exteriori est $w = \frac{v}{4\pi a^3}$, in puncto autem interiore $w = u + \frac{v}{4\pi a^3}$; qui valor priorem illum, quum distantia punctorum infinite parva sit, quantitate u superat. Ab altera parte integrale

$$\int \frac{du}{dp} \cdot \frac{ds}{r}$$

in utrisque casibus eundem valorem impetrat, unde obtinemus

$$VI. \quad \int u \frac{d}{dp} \frac{1}{r} ds + \int u \frac{d}{dp'} \frac{1}{r'} ds = 4\pi u,$$

ubi r' ad punctum exterius refertur, atque $\frac{d}{dp'} \frac{1}{r'}$ est quotiens differentialis in perpendiculo extrorsum spectanti formatus. — Ab hac formula sine difficultate ad aliam quandam transire licet, in theoria attractionis generali gravissimam.

Sine novorum calculorum institutione e formulis superioribus duas alias accipimus. Ad quas efficiendas in memoriam revocamus formulam in §^o 4. adhibitam

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = -4\pi u.$$

Quae si factore $\frac{dx dy dz}{r}$ multiplicatur, integratione supra totum corpus extensa, si punctum x_1, y_1, z_1 in spatio externo situm est, efficitur

$$\text{VII.} \quad -4\pi v = \int \left\{ v \frac{d \frac{1}{r}}{dp} - \frac{1}{r} \frac{dv}{dp} \right\} ds,$$

si autem in interiore corpore situm est, evadit

$$\text{VIII.} \quad 0 = \int \left\{ v \frac{d \frac{1}{r}}{dp} - \frac{1}{r} \frac{dv}{dp} \right\} ds.$$

Quae ut obtineantur, nihil faciendum est, nisi ut in duabus prioribus formulis in parte dextra $a^2 = 1$ ponatur, et v loco u substituatur.

Subsequenti autem exemplo harum formularum usus apparebit.

Fingas solidum sphaericum radii c ; sit potentiale respectu illius in superficie formatum functio arbitrarie data angulorum polarium θ', φ' , quam v' vocamus; sint porro R, θ, φ coordinatae polares puncti, in quod attractio exercetur, atque

$$\cos \omega = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\varphi - \varphi'),$$

erit

$$r^2 = c^2 - 2cR \cos \omega + R^2$$

et

$$\frac{d \frac{1}{r}}{dp} = -\frac{d \frac{1}{r}}{dc}.$$

Jam si primum $R < c$ supponimus, constat esse

$$\frac{1}{r} = \sum_0^{\infty} \frac{R^m}{c^{m+1}} P_m(\cos \omega), \text{ ideoque } \frac{d \frac{1}{r}}{dp} = \sum_0^{\infty} (m+1) \frac{R^m}{c^{m+2}} P_m(\cos \omega).$$

Quibus in formulam VIII. introductis, brevitatis causa statuto $\sin \theta' d\theta' d\varphi' = d\sigma'$, unde $ds = c^2 d\sigma'$, obtinemus aequationem identicam

$$\sum_0^{\infty} (m+1) \left(\frac{R}{c}\right)^m \int v' P_m(\cos \omega) d\sigma' = \sum_0^{\infty} \left(\frac{R}{c}\right)^m c \int \frac{dv'}{dp} P_m(\cos \omega) d\sigma',$$

unde coefficientibus comparatis emergit sequens

$$\text{IX.} \quad c \int \frac{dv'}{dp} P_m(\cos \omega) d\sigma' = (m+1) \int v' P_m(\cos \omega) d\sigma'.$$

In spatio externo quum sit $R > c$, habemus

$$\frac{1}{r} = \sum_0^{\infty} \frac{c^m}{R^{m+1}} P_m(\cos \omega), \text{ ideoque } \frac{d}{dp} \frac{1}{r} = - \sum_0^{\infty} m \frac{c^{m-1}}{R^{m+1}} P_m(\cos \omega);$$

formula igitur VII. in hanc mutatur

$$4\pi v = \sum_0^{\infty} m \left(\frac{c}{R}\right)^{m+1} \int v' P_m(\cos \omega) d\sigma' + \sum_0^{\infty} \left(\frac{c}{R}\right)^{m+1} c \int \frac{dv'}{dp} P_m(\cos \omega) d\sigma'$$

vel si aequationem modo inventam IX. advocamus

$$X. \quad v = \sum_0^{\infty} \frac{2m+1}{4\pi} \left(\frac{c}{R}\right)^{m+1} \int v' P_m(\cos \omega) d\sigma',$$

quae est expressio nota potentialis in spatio externo. Puncto autem attracto versus superficiem pergente obtinemus evolutionem notissimam hanc

$$XI. \quad v = \sum_0^{\infty} \frac{2m+1}{4\pi} \int v' P_m(\cos \omega) d\sigma',$$

cujus convergentia a Cl^o Lej.-Dirichlet in diario Crelliano tom. XVII. luculenter demonstrata est.

Adnotamus, evolutionem XI. e formula VI. evolutionum ipsius $\frac{d}{dp} \frac{1}{r}$ adjuncto sine ullo paene calculo provenire.

Formula X. integrale completum praebet hujus aequationis

$$XII. \quad \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = 0$$

in toto spatio extra sphaeram, radio c circa originem coordinatarum descriptam; in qua si coordinatae polares orthogonalium loco introducuntur, innotescit etiam integrale quod huic casui proprium est aequationis

$$XIII. \quad \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dX}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 X}{d\varphi^2} + m(m+1)X = 0,$$

hoc est

$$X = \int v' P_m(\cos \omega) d\sigma';$$

quae quum sint notissima, ampliori tractationi supersedendum est. Sed quum his formulis in posterum utendum sit, demonstrare eas, quam afferre solum maluimus, quippe quarum deductio satis commoda reique conveniens vix plus operis postularet, quam sola commemoratio.

De motu permanenti aetheris repulsi.

9.

Antequam ad accuratiorem tractationem aequationum supra exhibitarum transimus, monstrabimus, quomodo ad id quoque inservire possunt, ut electricitatis motus quasi sub visum et adspectum ponatur. Ita e. g. in doctrina de motu permanenti caloris in corporibus homogeneis temperatura potenciali molium externarum representari potest. Aptiorem imaginem condensatio vel etiam densitas praebet aëris permanentem se moventis, — si ut supra motum permanentem vocare pergamus a densitatibus permanentibus, — cujus partes nulla vi accelerantur, qui inclusus est parietibus, quibus aëris externi, etiam permanentem se moventis accessus ubique eodem quidem sed imperfecto modo arcetur.

Ponamus igitur omnes conditiones, quales in hoc exemplo descripsimus, iisque hoc etiam addamus, aëris singulas partes secundum legem Newtonianam mutuo se repellere; tum igitur, si U, V, W velocitates secundum directiones coordinatarum sunt, ρ densitas prima, u densitas in statu turbato, deinde s condensatio, ideoque $u = \rho(1 + s)$; si denique v potentiale omnium molium repellentium est, e principiis hydrodynamicis notum est, si velocitates satis exiguae sunt, valere aequationes

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} + A^2 \frac{ds}{dx} + \frac{dv}{dx} &= 0, & \frac{dV}{dt} + A^2 \frac{ds}{dy} + \frac{dv}{dy} &= 0, \\ \frac{dW}{dt} + A^2 \frac{ds}{dz} + \frac{dv}{dz} &= 0, & \frac{ds}{dt} + \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} &= 0, \end{aligned}$$

ex quibus, si pro condensatione s densitas u introducitur, sua sponte

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = A^2 \left\{ \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right\} - 4\pi \rho u$$

sequitur. Si motus est permanens, pars laeva evanescit, unde patet, habere nos aequationem I. § 8., siquidem $A^2 = 4\pi \rho \cdot a^2$ ponitur.

Jam si in superficie perpendicularum erigimus, duoque in ejus directione esse statuimus voluminis elementa se invicem tangentia, quorum alterum superficiem tangit, necesse est, in utroque accelerationem accurate eandem esse. Quodsi igitur u' est densitas externa, (si considerationes §§ 5. et 6. de resistantia in superficie hic etiam adhibentur), $Q(u' - u)dt$ est elementi prioris acceleratio in directione perpendiculari introrsum spectantis, deinde

$$- \left(A^2 \frac{ds}{dp} + \frac{dv}{dp} \right) dt = - \left(4\pi a^2 \frac{d^2 u}{dp^2} + \frac{dv}{dp} \right) dt$$

est acceleratio elementi alterius; quibus aequatis, et $Q = 4\pi b$ posito, accipietur

$$a^2 \frac{d^2 u}{dp^2} + \frac{1}{4\pi} \frac{dv}{dp} + b(u' - u) = 0,$$

quae ab aequatione II. §ⁱ 8. nonnisi deficiente termino bA differt. Sed hic etiam in aequationem introduci posset, si superficiei attribueretur proprietas, ut aërem motum in unam partem facilius transmitteret quam in alteram.

Quum autem e deductione harum aequationum prima, quantum quidem e principiis mechanicis concludi liceat, demonstratum sit, sufficere eas ad ipsum u omnibus numeris determinandum, aliae relationes non amplius circumspiciendae sunt. Itaque concludimus:

Electricitas ubi in corporibus homogeneis in motu permanenti est, iisdem obtemperat legibus quibus fluidum elasticum exigue motum, cujus partes secundum legem Newtonianam mutuo se repellunt; atque quidem fluidi densitati respondet densitas electrica; pressioni quam fluidum in interiores partes propter expansionem suam et repulsionem, in exteriores propter repulsionem solam exercet, respondet pressio electrica; denique accelerationi in interioribus fluidi partibus respondet flumen electricum, repulsiioni fluidi disjunctio corpore electrico operata.

Patet igitur principia, a quibus profecti sumus, in eo casu electricitatis moventis, quem hic consideramus, analytice perfecte congruere cum ista sententia de natura electricitatis, cujus initio §ⁱ 3. mentio facta est. Unaque demonstratum est, quod disertis verbis monemus, si alterius theoriae partes sequuntur, alterius phaenomena fundamentalia haud amplius esse respicienda. Si igitur e. g. sicut nos quidem fecimus, influentiae actionem in disjunctione electricitatum conjuncturam versari putas, haud amplius repulsionem respicies, quam electricitates ejusdem generis mutuo exercent, quia aliter ejusdem effectus bis rationem haberes.

Ceterum hoc ad extremum observamus, omnia quae contra aetherem repulsivum permanenter sese moventem dici possunt, etiam dici contra eam theoriam, quae electricitatem tale fluidum esse contendit.

De motu permanenti electricitatis in corporibus sphaericis.

10.

Formularum §ⁱ 8. auxilio integrationem aequationis I. in corporibus sphaericis absolvere possumus. Introductis enim coordinatis polaribus

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \cos \varphi, \quad z = r \sin \theta \sin \varphi,$$

in hanc transformatur

$$\text{XIV.} \quad a^2 \left\{ \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{du}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 u}{d\varphi^2} \right\} = r^2 u,$$

cujus e sola comparatione cum aequ. XIII. patet esse integrale particulare

$$A_n(r) X_n(\theta, \varphi),$$

ubi e notatione usitata X_n est functio sphaerica n^{u} ordinis. Quod ubi in aequ. XIV. loco u substituimus, formulae XIII. ope nanciscimur sequentem

$$X_n \left\{ a^2 \left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dA_n}{dr} \right) - n(n+1) A_n \right] - r^2 A_n \right\} = 0,$$

vel si, ipso X_n sublato, statuimus

$$A_n(r) = r^n u_n(r),$$

$$\text{XV.} \quad \frac{d^2 u_n}{dr^2} + \frac{2n+2}{r} \frac{du_n}{dr} - \frac{u_n}{a^2}.$$

Integralium hujus aequationis particularium qualia circumferuntur, uno tantum in nostro casu uti possumus, in quo n est numerus positivus, quum alterum omni sensu careat, quoties n extra limites 0, -1 versatur. E verificatione tamen prioris methodum petere licet sequentem.

Sit pro omnibus indicibus n valoribus

$$y_n = e^{-\frac{rx}{a}} (x^2 - 1)^n,$$

facile obtinetur aequatio identica:

$$\frac{1}{ra} \frac{dy_{n+1}}{dx} = \frac{y_n}{a^2} - \frac{2n+2}{r} \frac{dy_n}{dr} - \frac{d^2 y_n}{dr^2}.$$

Quam quoties secundum x intra tales limites integramus, ubi y_{n+1} evanescit, formam eruimus aequationis XV. unaque integrale ejus particulare. Tales limites autem sunt, siquidem quantitates $(n+1)$ et $\frac{r}{a}$ positivae supponuntur

$$x = -1, +1, +\infty,$$

unde integrale completum emergit sequens:

$$\text{XVI.} \quad u_n(r) = A \int_{-1}^{\infty} e^{-\frac{rx}{a}} (x^2 - 1)^n dx + B \int_1^{\infty} e^{-\frac{rx}{a}} (x^2 - 1)^n dx.$$

Hoc autem integrale prout casus postulat, in alias formas redigendum est. Quoties enim r evanescere, neque tamen infinitum fieri potest, constantium una, generaliter in arbitrio nostro posita, per alteram definitur, ponendumque est $B = -A$, unde efficitur

$$(1) \quad u_n(r) = A \int_{-1}^1 e^{-\frac{rx}{a}} (x^2 - 1)^n dx,$$

quod est integrale supra commemoratum. Quoties tamen r infinitum fieri, neque tamen evanescere potest, ponendum est

$$(2) \quad u_n(r) = A \int_1^{\infty} e^{-\frac{rx}{a}} (x^2 - 1)^n dx;$$

si denique ipsi r omnes valores positivi competant, nullo excepto, fit

$$(3) \quad u_n(r) = 0.$$

Ad inveniendam formam algebraicam integralium in aequatione XVI. occurrentium ponamus $\frac{r}{a} = k$ et

$$\int_{\pm 1}^{\infty} e^{-kx} (x^2 - 1)^n dx = e^{\mp k} \cdot s, \quad s = \int_{\pm 1}^{\infty} e^{-k(x \mp 1)} (x^2 - 1)^n dx.$$

Ubi si loco x nova altera variabilis y introducitur ponendo $x \mp 1 = y$, erit

$$s = \int_0^{\infty} e^{-ky} y^n (y \pm 2)^n dy = (-1)^n \frac{d^n}{dk^n} \int_0^{\infty} e^{-ky} (y \pm 2)^n dy.$$

Jam est secundum theorema binomiale

$$\int_0^{\infty} e^{-ky} (y \pm 2)^n dy = \sum_0^n \frac{n!}{s! (n-s)!} (\pm 2)^s \int_0^{\infty} e^{-ky} y^{n-s} dy = \frac{n!}{k^{n+1}} \sum_0^n \frac{(\pm 2k)^s}{s!},$$

unde

$$s = (-1)^n n! \frac{d^n}{dk^n} \left[\frac{1}{k^{n+1}} \sum_0^n \frac{(\pm 2k)^s}{s!} \right],$$

denique

$$\int_{\pm 1}^{\infty} e^{-kx} (x^2 - 1)^n dx = (-1)^n n! e^{\mp k} \frac{d^n}{dk^n} \left[\frac{1}{k^{n+1}} \sum_0^n \frac{(\pm 2k)^s}{s!} \right].$$

Si igitur pro omnibus qui fingi possunt ipsius k valoribus ponimus

$$\text{XVII. } 1) \quad V_n(k) = e^{-k} \frac{d^n}{dk^n} \cdot \frac{1 + \frac{2k}{1} + \frac{(2k)^2}{2!} + \dots + \frac{(2k)^n}{n!}}{k^{n+1}},$$

pro valore ipsius k positivo erit

$$2) \quad \int_{\pm 1}^{\infty} e^{-kx} (x^2 - 1)^n dx = \pm (-1)^n n! V_n(\pm k),$$

unde aequationis XV. integrale completum hoc est

$$\text{XVIII.} \quad u_n(r) = A V_n\left(\frac{r}{a}\right) + B V_n\left(-\frac{r}{a}\right).$$

Ipsius u inde derivatur expressio generalis haec

$$\text{XIX.} \quad u = \sum_0^{\infty} r^n \left\{ V_n\left(\frac{r}{a}\right) X_n(\theta, \varphi) + V_n\left(-\frac{r}{a}\right) Y_n(\theta, \varphi) \right\}.$$

Formulis XVI. 1. 2. 3. respondent valores ipsius u sequentes:

$$1) \quad u = \sum_0^{\infty} r^n \left\{ V_n\left(\frac{r}{a}\right) + V_n\left(-\frac{r}{a}\right) \right\} X_n(\theta, \varphi)$$

$$2) \quad u = \sum_0^{\infty} r^n V_n\left(\frac{r}{a}\right) X_n(\theta, \varphi)$$

$$3) \quad u = 0.$$

E proprietatibus functionis V , quae ad propositum nostrum faciunt, adnotemus sequentes.

Functionum $V_n\left(\frac{r}{a}\right)$, $V_n\left(-\frac{r}{a}\right)$ si una aliave denotatur V_n , ex integralibus definitis (XVII. 2)) invenitur formula recurrens:

$$\text{XX.} \quad 1) \quad \frac{dV_n}{dr} = \frac{r}{2a^2} V_{n+1}.$$

Cujus adjumento ex aequatione XV. haec deducitur

$$2) \quad \left(\frac{r}{2a}\right)^2 V_{n+1} = V_{n-1} - \frac{2n+1}{2} V_n.$$

Jam si in aequatione XV. loco ipsius u primum $V_n\left(\frac{r}{a}\right)$ deinde $V_n\left(-\frac{r}{a}\right)$ substituuntur, terminis qui ad dextram aequationum inveniuntur eliminatis, aequatio evadit integrabilis, e cujus integratione prodit

$$V_n\left(\frac{r}{a}\right) \frac{dV_n\left(-\frac{r}{a}\right)}{dr} - V_n\left(-\frac{r}{a}\right) \frac{dV_n\left(\frac{r}{a}\right)}{dr} = \frac{c}{r^{2n+2}},$$

ubi c ab ipso r independens est. Si in hanc aequationem symbolorum loco ipsa integralia introducias, ipsique r post transformationem idoneam valorem 0 tribuis, invenies esse $c = (-1)^{n+1} (2a)^{2n+1}$, unde aequationes efficiuntur

$$3) \quad V_n\left(\frac{r}{a}\right) \frac{dV_n\left(-\frac{r}{a}\right)}{dr} - V_n\left(-\frac{r}{a}\right) \frac{dV_n\left(\frac{r}{a}\right)}{dr} = \frac{(-1)^{n+1} (2a)^{2n+1}}{r},$$

$$4) V_n\left(\frac{r}{a}\right) V_{n+1}\left(-\frac{r}{a}\right) - V_n\left(-\frac{r}{a}\right) V_{n+1}\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}\left(\frac{2a}{r}\right)^{2n+3},$$

quarum posterior e 3. formulae 1. ope succedit.

Formula 3. ad omnes ipsius n valores spectat, qui supra -1 versantur, si in quantitate $(-1)^{n+1}$ cautiones necessariae adhibentur. Illius ope demonstratur, quantitates $V_n\left(\frac{r}{a}\right)$ et $V_n\left(-\frac{r}{a}\right)$, si haec denotatio formulae XVII. 2) beneficio ad omnes ipsius n valores concessos extenditur, re vera integralia esse aequationis XV. a se invicem independentia. Quod si non esset, constantem quandam b ita determinare liceret, ut aequatio haberetur identica $V_n\left(\frac{r}{a}\right) = b V_n\left(-\frac{r}{a}\right)$. Tunc autem pars laeva ipsius 3. evanesceret, quod locum non habere in conspectu est. Quae demonstratio principio generali nititur huic.

Si n functiones unius variabilis x , puta $s_1, s_2, \dots, s_n$ a se invicem pendere aut independentes esse convenimus, prout aequatio

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + \dots + a_n s_n = 0$$

valoribus constantibus ipsorum $a_1, a_2, \dots, a_n$, quorum unus saltem a nullitate differt, identica reddi potest, necne, theorema habetur generale:

Functiones $s_1, s_2, \dots, s_n$ a se invicem pendent aut independentes sunt, prout determinans

$$\Sigma \pm s_1 s_2' \dots s_n^{(n-1)}$$

identice evanescit, necne. In hoc determinante positum est $s_v^{(\mu)} = \frac{d^\mu s_v}{dx^\mu}$.

Quod theorema praesertim in aequationibus differentialibus linearibus utile est, quibus quum determinantis illius formatio facillima reddatur.

Observationem adjungere placet, saepe utilius esse, si functionis V_n loco haec functio

$$5) W_n(k) = \left(\frac{k}{2}\right)^n V_n(k)$$

in calculos introducitur, quae quum variis rationibus istam simplicitate superet. Cujus tamen in praesentiarum usum non faciemus.

11.

Jam electricitatis motum in sphaera plena radii c , in cujus superficie electricitatis fontes arbitrarii inveniuntur, dum non-conductores electrici, qui quocunque modo in spatio distributi sunt, effectum in eam

exercent, examinemus. Expressionem igitur ipsius u e form. XIX. 1) nobis sumere debemus, et, si pro hac quidem disquisitione

$$\text{a.} \quad V_n\left(\frac{r}{a}\right) + V_n\left(-\frac{r}{a}\right) = u_n(r)$$

ponimus, fit

$$\text{b.} \quad u = \sum_0^{\infty} r^n u_n(r) X_n(\theta, \varphi).$$

Deinde si V potentiale completum est, secundum aequ. II. pro $r = c$ habemus:

$$\text{c.} \quad a^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{4\pi} \frac{dV}{dr} + b(u - u' - \Delta) = 0.$$

In sequentibus loco ipsius $u' + \Delta$ ejus evolutionem secundum functiones sphaericas adhibebimus, ponemusque

$$\text{d.} \quad u' + \Delta = \sum_0^{\infty} \Delta_n(\theta, \varphi).$$

Est autem V summa algebraica ipsius v respectu sphaerae formati, et ipsius v_1 , si eo potentiale omnium non-conductorum signamus. Jam vero si pro $r = c$ est

$$\text{d'.} \quad v_1 = \sum_0^{\infty} E_n(\theta, \varphi),$$

facile e formulis VII. et VIII. intelligitur, pro $r < c$ esse

$$v_1 = \sum_0^{\infty} \left(\frac{r}{c}\right)^n E_n(\theta, \varphi),$$

ideoque pro $r = c$

$$\text{e.} \quad \frac{dv_1}{dr} = \sum_0^{\infty} \frac{n}{c} E_n(\theta, \varphi).$$

Restat igitur, ut expressio $\frac{d}{dr} \left(a^2 u + \frac{1}{4\pi} v \right)$ pro $r = c$ evolvatur. Secundum form. IV. est

$$\begin{aligned} & a^2 u + \frac{1}{4\pi} v \\ &= -\frac{a^2}{4\pi} \int \left\{ u \frac{d}{dc} \cdot \frac{1}{\sqrt{(c^2 - 2cr \cos \omega + r^2)}} + \frac{du}{dp} \frac{1}{\sqrt{(c^2 - 2cr \cos \omega + r^2)}} \right\} c^2 d\sigma' \\ &= \frac{a^2}{4\pi} \sum_0^{\infty} \left(\frac{r}{c}\right)^n \int \left\{ (n+1)u - c \frac{du}{dp} \right\} P_n(\cos \omega) d\sigma'; \end{aligned}$$

in qua si evolutiones ipsorum u et $\frac{du}{dp} = -\frac{du}{dc}$ imponimus, reductionibus obviis factis efficitur

$$f. \quad a^2 u + \frac{1}{4\pi} v = a^2 \sum_0^\infty \left\{ u_n(c) + \frac{c}{2n+1} \frac{du_n(c)}{dc} \right\} X_n(\theta, \varphi),$$

ideoque pro $r = c$

$$g. \quad \frac{d}{dr} \left(a^2 u + \frac{1}{4\pi} v \right) = a^2 \sum_0^\infty n c^{n-1} \left\{ u_n(c) + \frac{c}{2n+1} \frac{du_n(c)}{dc} \right\} X_n(\theta, \varphi).$$

Jam si valores aequationibus b. e. g. effecti in c. imponuntur, obtinetur

$$\begin{aligned} & \sum_0^\infty \left\{ a^2 n c^{n-1} \left[u_n(c) + \frac{c}{2n+1} \frac{du_n(c)}{dc} \right] + b c^n u_n(c) \right\} X_n(\theta, \varphi) \\ & = b \sum_0^\infty \mathcal{A}_n(\theta, \varphi) - \frac{1}{4\pi c} \sum_0^\infty n E_n(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

atque inde secundum theorema, unamquamque functionem unico tantum modo secundum functiones sphaericas evolvi posse:

$$\begin{aligned} & \left\{ a^2 n c^{n-1} \left[u_n(c) + \frac{c}{2n+1} \frac{du_n(c)}{dc} \right] + b c^n u_n(c) \right\} X_n(\theta, \varphi) \\ & = b \mathcal{A}_n(\theta, \varphi) - \frac{n}{4\pi c} E_n(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

E qua formula ut abeat differentiale $\frac{du_n}{dc}$ si formulam XX. 1) adhibemus, et semel omnino statuimus $u_n(c) = u_n$, ad electricitatis densitatem in sphaera exprimendam hanc habebimus aequationem

$$XXI. \quad u = \sum_0^\infty \frac{\left(\frac{r}{c}\right)^n u_n(r) \left\{ b c \mathcal{A}_n(\theta, \varphi) - \frac{n}{4\pi} E_n(\theta, \varphi) \right\}}{(a^2 n + b c) u_n + \frac{1}{2} n c^2 u_{n+1}}.$$

Porro puncti in externo spatio siti r, θ, φ potentiale sphaerae respectu formatum

$$XXII. \quad v = \frac{1}{2} c^2 \sum_0^\infty \frac{\frac{4\pi}{2n+1} \left(\frac{c}{r}\right)^{n+1} u_{n+1} \left\{ b c \mathcal{A}_n(\theta, \varphi) - \frac{n}{4\pi} E_n(\theta, \varphi) \right\}}{(a^2 n + b c) u_n + \frac{1}{2} n c^2 u_{n+1}}.$$

Deinde ex f. efficitur

$$\begin{aligned} & XXIII. \quad u + \frac{v}{4\pi a^2} \\ & = \sum_0^\infty \frac{\left(\frac{r}{c}\right)^n \left[u_n + \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{c^2}{2a^2} u_{n+1} \right] \cdot \left\{ b c \mathcal{A}_n(\theta, \varphi) - \frac{n}{4\pi} E_n(\theta, \varphi) \right\}}{(a^2 n + b c) u_n + \frac{1}{2} n c^2 u_{n+1}}, \end{aligned}$$

et denique ad pressionem electricam in interioribus sphaerae determinandam

XXIV.

$$u + \frac{v + v_1}{4\pi a^3} = w$$

$$= bc \sum_0^\infty \left(\frac{r}{c}\right)^n \frac{\left[u_n + \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{c^3}{2a^3} u_{n+1}\right] \mathcal{A}_n(\theta, \varphi) + \frac{1}{4\pi a^3} u_n E_n(\theta, \varphi)}{(a^3 n + bc) u_n + \frac{1}{2n+1} \frac{c^3}{2a^3} u_{n+1}}.$$

Formulae XX. 2) ope hae summae, si terminus $n = 0$ excluditur, simpliciores reddi possunt, quum secundum formulam illam habeatur

$$(a^3 n + bc) u_n + \frac{1}{2n+1} \frac{c^3}{2a^3} u_{n+1} = bc u_n + \frac{2na^3}{2n+1} u_{n-1},$$

$$u_n + \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{c^3}{2a^3} u_{n+1} = \frac{2}{2n+1} u_{n-1}.$$

Ex expressione XXII. sua sponte efficitur electricitatis summa in sphaera contenta; est enim aequalis coefficienti ipsius $\frac{1}{r}$ in evolutione ipsius v . Quam si Ω vocamus, fit

$$\Omega = 2\pi c^3 \mathcal{A}_0 \cdot \frac{u_1}{u_0},$$

vel adhibitis formulis huc spectantibus §ⁱ 10.

$$\text{XXV.} \quad \Omega = 4\pi a^3 c \mathcal{A}_0 \frac{\left(\frac{c}{a} - 1\right) e^{\frac{c}{a}} + \left(\frac{c}{a} + 1\right) e^{-\frac{c}{a}}}{e^{\frac{c}{a}} - e^{-\frac{c}{a}}},$$

vel si, $\frac{c}{a} < \pi$ supposito, evolvitur

$$\text{h.} \quad \Omega = 16\pi c^3 \mathcal{A}_0 \sum_0^\infty \frac{(-1)^n B_{2n+1}}{(2n+2)!} \left(\frac{2c}{a}\right)^{2n},$$

ubi $B_1, B_3, \dots$ numeri Bernoulliani $\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \dots$ sunt.

Ex aequatione XXV. quum omne ipsorum b et v_1 vestigium abierit, sequitur, in motu permanenti electricitatis summam in sphaera homogenea contentam omnino non pendere a difficultatibus, quibus electricitas superficiem permeans impeditur, nec minus a disjunctione, quae non-conductoribus extra sphaeram positis efficitur.

Similiter Coulomb observavit, in sphaeris electricitate imbutis, in quibus electricitas, quantum quidem fieri potest, in aequilibrio est, deperditionem in aërem circumdatum a substantia sphaerarum esse independentem. Confer Biot traité de phys. tome II. pag. 255.

12.

Formulis §ⁱ 10. omnia absolvi possunt problemata, quae spectant ad plura corpora, quae et sphaeris concentricis definiuntur et omnia concentrice sita sunt. Attamen computationes, illa scilicet excepta,

quae in corpore indefinito, e quo sphaera exsecta est, versatur, tam molestae sunt, ut earum perfectio vix operae pretium esse videatur. Quare hoc tantum agemus, ut exemplo simplici monstremus, quomodo corporum, quae certis conditionibus in motu permanenti sunt, summa electrica constitui possit.

Quem in finem theorema advocamus Gaussianum (vide Journal de mathémat. de M. Liouville Tome VII. pag. 304. Théorèmes généraux cet.), integrale

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{dv}{dp} ds,$$

supra unam vel plures superficies clausas extensum, moli aequale esse attrahenti, superficiebus illis inclusae.

Quod statim formulae 6. §ⁱ 7. ope deducitur, in qua si loco A potentiale v substituitur, aequationesque ipsius potentialis advocantur differentiales.

Jam casum consideramus corporis, quod duabus sphaeris concentricis definitur, cujus superficies interior velamine non-conducenti obducta est. Sint c, c_1 radii sphaerarum, $c < c_1$, si centrum commune pro origine coordinatarum habemus, secundum § 10. XIX. erit densitas electrica

$$i. \quad u = \sum_0^\infty r^n \{ v_n(r) X_n(\theta, \varphi) + w_n(r) Y_n(\theta, \varphi) \},$$

ubi brevitatis causa $v_n(r) = V_n\left(\frac{r}{a}\right)$, $w_n(r) = V_n\left(-\frac{r}{a}\right)$ positum est.

Próinde si v est potentiale omnium quantitatum electricitatis quae et in cavitate interiori, et in ipso corpore, et in spatio externo versantur, ad determinationem ipsius u habentur aequationes

$$k. \quad r = c \quad a^2 \frac{du}{dr} + \frac{1}{4\pi} \frac{dv}{dr} = 0,$$

$$l. \quad r = c_1 \quad a^2 \frac{du}{dr} + \frac{1}{4\pi} \frac{dv}{dr} = b(u - U) = 0,$$

ubi U fontium electricorum in superficie obviorum ubertatem metitur.

Quas aequationes si supra totas superficies, ad quas referuntur, integramus, observamusque, propter aequationem 6. §ⁱ 7. ex aequatione

$$\frac{d^2(a^2u + \frac{1}{4\pi}v)}{dx^2} + \frac{d^2(a^2u + \frac{1}{4\pi}v)}{dy^2} + \frac{d^2(a^2u + \frac{1}{4\pi}v)}{dz^2} = 0$$

sequi

$$\int \left(a^2 \frac{du}{dp} + \frac{1}{4\pi} \frac{dv}{dp} \right) ds = 0,$$

manifestum est, integrale expressionis $(u - U)$, supra superficiem $r = c_1$

extensum, evanescere. Quapropter, si abhinc ds, ds_1 sunt elementa superficierum $r = c, r = c_1$, habemus

$$\begin{aligned} \text{m.} \quad \int (u - U) ds_1 &= 0, \quad a^2 \int \frac{du}{dr} ds + \frac{1}{4\pi} \int \frac{dv}{dr} ds = 0, \\ a^2 \int \frac{du}{dr} ds_1 + \frac{1}{4\pi} \int \frac{dv}{dr} ds_1 &= 0. \end{aligned}$$

Si tamen ponimus esse Ω summam quaesitam electricitatis in ipso corpore contentae, ω copiarum electricarum summam, quae in cavitate illius interiori versantur, e theoremate Gaussiano supra commemorato sequitur

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{dv}{dr} ds = -\omega, \quad \frac{1}{4\pi} \int \frac{dv}{dr} ds_1 = -(\omega + \Omega).$$

Porro ex aequ. i., advocata formula XX. 1) sequitur

$$\begin{aligned} a^2 \int \frac{du}{dr} ds &= 2\pi c^2 [v_1(c) X_0 + w_1(c) Y_0], \\ a^2 \int \frac{du}{dr} ds_1 &= 2\pi c_1^2 [v_1(c_1) X_0 + w_1(c_1) Y_0], \\ \int u ds_1 &= 4\pi c_1^2 [v_0(c) X_0 + w_0(c) Y_0]; \end{aligned}$$

unde, si jam ultra ponimus

$$\int U ds_1 = 4\pi c_1^2 U_0,$$

ubi igitur U_0 est ubertas media fontium electricorum in superficie, substitutis valoribus modo acceptis in aequationes m., ad ipsa Ω, X_0, Y_0 determinanda eruimus aequationes:

$$\begin{aligned} v_0(c_1) X_0 + w_1(c_1) Y_0 - U_0 &= 0, \\ v_1(c) X_0 + w_1(c) Y_0 - \frac{\omega}{2\pi c^2} &= 0, \\ v_1(c_1) X_0 + w_1(c_1) Y_0 - \frac{\omega + \Omega}{2\pi c_1^2} &= 0, \end{aligned}$$

e quibus deducitur

$$\begin{aligned} \frac{\omega + \Omega}{2\pi c_1^2} [v_1(c) w_0(c_1) - w_1(c) v_0(c_1)] + \frac{\omega}{2\pi c^2} [v_0(c_1) w_1(c_1) - w_0(c_1) v_1(c_1)] \\ + U_0 [v_1(c_1) w_1(c) - w_1(c_1) v_1(c)] = 0, \end{aligned}$$

vel quum e formula XX. 3)

$$v_0(c_1) w_1(c_1) - w_0(c_1) v_1(c_1) = -\frac{4a^2}{c_1^2}$$

sit,

$$\begin{aligned}
\text{XXVI.} \quad \Omega = & -\omega \left\{ 1 - \frac{\frac{4a^2}{c^2}}{v_1(c)w_0(c_1) - w_1(c)v_0(c_1)} \right\} \\
& + 2\pi c_1^2 U_0 \frac{v_1(c)w_1(c_1) - w_1(c)v_1(c_1)}{v_1(c)w_0(c_1) - w_1(c)v_0(c_1)} = -\omega \left\{ 1 - \frac{2c_1}{\frac{c_1-c}{(a+c)e^{\frac{c_1-c}{a}}} - (a-c)e^{-\frac{c_1-c}{a}}} \right\} \\
& + 4\pi ac_1^2 U_0 \frac{\left(\frac{a}{c}-1\right)\left(\frac{a}{c_1}+1\right)e^{\frac{c_1-c}{a}} - \left(\frac{a}{c}+1\right)\left(\frac{a}{c_1}-1\right)e^{-\frac{c_1-c}{a}}}{\left(\frac{a}{c}+1\right)e^{\frac{c_1-c}{a}} - \left(\frac{a}{c}-1\right)e^{-\frac{c_1-c}{a}}}.
\end{aligned}$$

Ex hac formula patet, nostro casu certam partem electricitatis in corpore contentae unice ex actione proficisci copiarum electricitatis in cavitae interiori distributarum. Facile autem demonstratur, factorem ipsius ω , quamdiu quidem $\frac{c}{a}$ et $\frac{c_1}{a}$ positiva sunt, quod nostro casu evenit, semper fractionem esse genuinam negativam. Si igitur e. g. corpus illud in superficie exteriori aëre uniformiter sese moventi contingitur, (§ 6. U_1), habetur $U_0 = 0$, electricitatisque in corpore contentae copia est pars aliquota electricitatis in cavitae inclusae, signo tamen opposito praedita. Simul copia illa a natura aëris circumdati nullo modo pendet.

13.

Additio ad § 10. In § 10. invenimus, quoties $X_n(\theta, \varphi)$, $Y_n(\theta, \varphi)$ sunt functiones sphaericae n^{th} ordinis, aequationi I. vel XIV. semper satisfieri expressione

$$r^n \left\{ V_n\left(\frac{r}{a}\right) X_n(\theta, \varphi) + V_n\left(-\frac{r}{a}\right) Y_n(\theta, \varphi) \right\}.$$

Cujus casus specialis is, ubi $n = 0$, prae ceteris attentione dignus est. Hoc enim casu X_0 et Y_0 constantes sunt, unde si loco eorum ponimus A et B , aequationis I. habemus integrale particulare

$$n. \quad u = AV_0\left(\frac{r}{a}\right) + BV_0\left(-\frac{r}{a}\right) = \frac{a}{r} \left(Ae^{-\frac{r}{a}} - Be^{\frac{r}{a}} \right),$$

in quo est $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Quum autem aequatio I. nullos coefficients variables involvat, expressio illa tunc etiam satisfaciet, si loco ipsorum x, y, z ponitur $x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z$, igitur $r^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2$, ubi x_1, y_1, z_1 ab ipsis x, y, z sunt independentia.

Expressionem hoc modo mutatam, posito insuper $A = \varphi(x_1, y_1, z_1)$ et $B = \psi(x_1, y_1, z_1)$, si volumine $dx_1 dy_1 dz_1$ multiplicamus supraque volumen finitum V integramus, integrale

$$\text{XXVII. } u = \int \left\{ \varphi(x_1, y_1, z_1) V_0\left(\frac{r}{a}\right) + \psi(x_1, y_1, z_1) V_0\left(-\frac{r}{a}\right) \right\} dx_1 dy_1 dz_1$$

manifesto proprietate gaudebit, ut, quoties punctum x, y, z extra volumen V versatur, aequationi differentiali

$$\text{XXVIII. 1)} \quad a^2 \left\{ \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right\} = u$$

satisfaciat. Quod tamen punctum si volumine illo continetur, eadem methodo, qua Gauss in commentatione supra laudata ad demonstrandas aequationes differentiales potentiales usus est, invenitur, expressionem aequationi satisfacere

$$2) \quad a^2 \left\{ \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right\} = u + 4\pi a^2 (\psi(x, y, z) - \varphi(x, y, z)).$$

Videmus igitur, cum aequatione XXVIII. 1) aliam quandam arctissime conjunctam esse, quam in formam

$$3) \quad a^2 \left\{ \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right\} = u + u_1$$

redigere licet. Atque si rationis memineris, qua terminus u in aequationem XXVIII. 1) ingressus est (§ 4. L. M.), facile casum electricitatis motae finges, qui ad hanc aequationem ducat.

Porro ex iis, quae modo invenimus, perspicitur, integrationem aequationum 1) et 3) ad problema reduci posse, ut expressio n . tali modo evolvatur, ut variables a constantibus arbitrariis separatae prodeant: quo impetrato, expressio XXVII. sine mora formam induit talem, quam ulterius tractare licet.

Quae evolutio, si coordinatis polaribus ordinariis utimur, sine difficultate e calculis supra exhibitis elicitor. Posito enim

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \cos \varphi, \quad z = r \sin \theta \sin \varphi;$$

$$x_1 = r_1 \cos \theta_1, \quad y_1 = r_1 \sin \theta_1 \cos \varphi_1, \quad z_1 = r_1 \sin \theta_1 \sin \varphi_1,$$

$$\cos \omega = \cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1 \cos(\varphi - \varphi_1),$$

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 = r^2 - 2rr_1 \cos \omega + r_1^2 = R^2,$$

atque

o.

$$r_1 > r,$$

functio

$$\Omega = AV_0\left(\frac{R}{a}\right) + BV_0\left(-\frac{R}{a}\right)$$

lemmatis sequentibus omnibus numeris definitur:

1) Ω tam respectu variabilium r, θ, φ quam ipsorum r_1, θ_1, φ_1 est integrale aequationis XIV. ita comparatum, ut secundum functiones

sphaericas, nominatim secundum functiones $P_n(\cos \omega)$ evolvi possit. In ipso $\mathcal{Q}$ si loco r, r_1 ponis ra, r_1a , igitur Ra loco R , $\mathcal{Q}$ ab ipso a independens evadit.

2) Ipsius $\frac{\mathcal{Q}}{a}$ evolutio, si a in infinitum crescit, in evolutionem Laplaceanam ipsius $\frac{A-B}{R}$ transit.

3) In ipso $\mathcal{Q}$ si scribitur $-a, B, A$, loco a, A, B , $\mathcal{Q}$ non mutatur.

4) Si ponitur $B = 0, a = \infty$, fit $\mathcal{Q} = 0$.

Quibus lemmatis advocatis, invenitur

$$\begin{aligned} \text{XXIX.} \quad \mathcal{Q} &= AV_0\left(\frac{R}{a}\right) + BV_0\left(-\frac{R}{a}\right) \\ &- \sum_0^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{2} \left(\frac{r}{2a}\right)^n \left(\frac{r_1}{2a}\right)^n \left[AV_n\left(\frac{r_1}{a}\right) + BV_n\left(-\frac{r_1}{a}\right) \right] \\ &\quad \left[V_n\left(\frac{r}{a}\right) + V_n\left(-\frac{r}{a}\right) \right] P_n(\cos \omega). \end{aligned}$$

Hac formula ope aequationum XVII. 2) vel etiam XX. 1) et 2) egregie uti licet ad evolutionem functionum $V_n\left(\frac{R}{a}\right)$, quod tamen hoc loco omittimus.

Qua evolutione si secundum praecepta supra tradita uteris ad integrationem aequationum XXVIII. 1) et 3) altero quidem casu iterum formulas §10. obtines, altero tamen eadem resultant, quae methodo ordinaria variationis constantium obtinerentur. In aequatione enim XXVIII. 3) si, functione u_1 secundum functiones sphaericas evoluta, ad integrationem via tentatur §10., quaestio reducitur ad integrationem aequationis differentialis, quae ab aequatione XV. nonnisi novo termino differt, et variatione constantium integrari potest.

Qua in re hoc memorabile intercedit, ut omnes implicationes, quibus methodus illa laborat, propter singularem naturam functionum V_n prorsus evitari queant, quoties u_1 est integrale aequationis XXVIII. 1) vel 3). Quod quum ad accuratiorem notitiam functionum illarum, quae in physice mathematica tanti momenti sunt, nonnihil afferre videatur, breviter exponamus.

Sit igitur primum

$$u_1 = \sum_0^{\infty} r^n \left\{ V_n\left(\frac{r}{a}\right) X_n(\theta, \varphi) + V_n\left(-\frac{r}{a}\right) Y_n(\theta, \varphi) \right\},$$

aequatio XXVIII. 3) in hanc transit:

$$\begin{aligned} \text{p.} \quad a^2 \left\{ \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{du}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 u}{d\varphi^2} \right\} \\ = r^2 u + \sum_0^{\infty} r^n \left\{ V_n\left(\frac{r}{a}\right) X_n + V_n\left(-\frac{r}{a}\right) Y_n \right\}. \end{aligned}$$

Ad ejus integrationem ponimus

$$u = U + \sum_0^{\infty} r^n \{ A_n(r) X_n(\theta, \varphi) + B_n(r) Y_n(\theta, \varphi) \},$$

ubi U eadem forma sit, qua u_1 utitur. Quae series si in p. substituitur, habetur:

$$\begin{aligned} & \sum_0^{\infty} r^{n+2} X_n \left\{ a^2 \left[A_n'' + \frac{2n+2}{r} A_n' \right] - A_n - V_n \left(\frac{r}{a} \right) \right\} \\ & + \sum_0^{\infty} r^{n+2} Y_n \left\{ a^2 \left[B_n'' + \frac{2n+2}{r} B_n' \right] - B_n - V_n \left(-\frac{r}{a} \right) \right\} = 0, \end{aligned}$$

unde

$$A_n'' + \frac{2n+2}{r} A_n' = \frac{A_n + V_n \left(\frac{r}{a} \right)}{a^2}, \quad B_n'' + \frac{2n+2}{r} B_n' = \frac{B_n + V_n \left(-\frac{r}{a} \right)}{a^2}$$

sequitur. Quarum aequationum loco generaliore consideramus hanc:

$$q. \quad C'' + \frac{2n+2}{r} C' = \frac{C + \alpha V_n \left(\frac{r}{a} \right) + \beta V_n \left(-\frac{r}{a} \right)}{a^2}.$$

Ad integrationem ponimus

$$C = \sum \left[\alpha_i V_i \left(\frac{r}{a} \right) + \beta_i V_i \left(-\frac{r}{a} \right) \right].$$

Ex aequatione autem differentiali ipsius V_i (vide § 10. XV.) advocata formula XX. 1) sequitur

$$V_i'' + \frac{2n+2}{r} V_i' - \frac{V_i}{a^2} = \frac{2(n-s)}{r} V_i' - \frac{n-s}{a^2} V_{s+1,1}$$

1) Methodus, quam ad constantium variationem evitandam hic adhibuimus, quae eo nititur, quod si in laevam aequationis q. partem una alterave functionum V_i substituitur, duae aliae reproducantur, saepe, si apte modificatur, usurpari potest, semperque methodo generali praefenda est. Atque ut alio eam exemplo illustremus gravi ac praestanti, afferre juvat, Cl^m Neumann functionum $Q_n(x)$ a Cl^o Heine in attractionis et caloris theoriis introductarum determinationem eo revocasse, ut functio algebraica integra $(n-1)^u$ ordinis inveniat, quae aequationi

$$\alpha. \quad \frac{d}{dx} \left((x^2-1) \frac{dS}{dx} \right) = n(n+1)S + 4 \frac{dP_n}{dx}$$

satisfaciat. Si enim S_{n-1} est haec functio, secundum Neumann est:

$$\beta. \quad Q_n(x) = \frac{2n+1}{2} \left\{ P_n(x) \lg \frac{x+1}{x-1} + S_{n-1} \right\}.$$

Jam si consideramus, functionem P_s , si in laeva aequationis α . parte loco S substituitur, reproduci, facile apparet, ingrediendam esse hanc viam. Pro S

Unde si loco C seriem in aequationem q. substituimus, sequitur:

$$\Sigma(n-s)\left[\alpha_s V_{s+1}\left(\frac{r}{a}\right) + \beta_s V_{s+1}\left(-\frac{r}{a}\right)\right] = \alpha V_m\left(\frac{r}{a}\right) + \beta V_m\left(-\frac{r}{a}\right),$$

e qua deducitur esse $\alpha_{m-1} = \frac{\alpha}{n-m+1}$, $\beta_{m-1} = \frac{\beta}{n-m+1}$, α_n et β_n arbitraria, ceteras constantes tamen evanescere. Est igitur

$$r. \quad C = \frac{\alpha V_{m-1}\left(\frac{r}{a}\right) + \beta V_{m-1}\left(-\frac{r}{a}\right)}{n-m+1} + \alpha_n V_n\left(\frac{r}{a}\right) + \beta_n V_n\left(-\frac{r}{a}\right).$$

Hac formula patet casus exclusos esse, ubi $m=0$ vel $m=n+1$. Quorum ulterior et ipse satis concinne functionum V_s ope tractari potest: quod tamen calculos sibi poscit, quos brevitatis causa praetermittimus. Eo casu, quo habetur $m=0$, si loco $V_0\left(\frac{r}{a}\right)$ et $V_0\left(-\frac{r}{a}\right)$ eorum expressiones substituimus, aequatio q. hancce induit formam:

$$s. \quad C' - \frac{C}{a^3} + \frac{2n+2}{r} \left(C' - \frac{\alpha e^{-\frac{r}{a}} - \beta e^{\frac{r}{a}}}{(2n+2)a} \right) = 0,$$

quam in aequationes

$$C' - \frac{\alpha e^{-\frac{r}{a}} - \beta e^{\frac{r}{a}}}{(2n+2)a} = 0, \quad C'' - \frac{C}{a^3} = 0$$

discerpi posse patet. Obtinemus igitur pro $m=0$:

$$t. \quad C = -\frac{\alpha e^{-\frac{r}{a}} + \beta e^{\frac{r}{a}}}{2n+2} + \alpha_n V_n\left(\frac{r}{a}\right) + \beta_n V_n\left(-\frac{r}{a}\right).$$

sumenda est series secundum ipsa P_s progrediens, ponendaque est loco $\frac{dP_n}{dx}$ ejus evolutio

$$y. \quad \frac{dP_n}{dx} = (2n-1)P_{n-1} + (2n-5)P_{n-3} + (2n-9)P_{n-5} + \dots;$$

tunc sequitur

$$z. \quad S = \alpha P_n - 2 \left\{ \frac{2n-1}{1 \cdot n} P_{n-1} + \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3} + \frac{2n-9}{5(n-2)} P_{n-5} + \dots \right\};$$

de qua si ipsius S_{n-1} valor depromitur, substituiturque in aequationem β , eruitur

$$s. \quad Q_n(x) = \frac{2n+1}{2} \left\{ P_n \cdot \lg \frac{x+1}{x-1} - 2 \left[\frac{2n-1}{1 \cdot n} P_{n-1} + \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3} + \frac{2n-9}{5(n-2)} P_{n-5} + \dots \right] \right\},$$

quae aequatio eo inservire potest, ut functio $Q_n(x)$ pro omnibus qui fingi possunt, ipsius x valoribus definatur. — Quae determinatio, si attractionis theoriā non respicias, etiam aliis rationibus egregii usus est.

De functionibus hisce confer: Heine: de aeq. diff., Berol. 1848, *idem*: Aufg. für parz. Differenzialgl. Diar. Crell. XXVI., *idem*: Attraction der Ellipsoide ibid. XLII. — Neumann: Magnetisirung eines Rotationsellipsoids ibid. XXXV.

Omnes has integrationes ex aequatione identica eruere licet sequenti.
Sit pro omnibus ipsis m valoribus

$$z_m = e^{-\frac{rx}{a}} (x^2 - 1)^m f(x),$$

erit

$$\frac{1}{ra} \frac{dz_{n+1}}{dx} = \frac{1}{ra} \cdot e^{-\frac{rx}{a}} (x^2 - 1)^{n+1} \frac{df}{dx} + \frac{z_n}{a^2} - \frac{2n+2}{r} \frac{dz_n}{dr} - \frac{d^2 z_n}{dr^2}.$$

Quae facile demonstratur, si identitas in §° 10 obvia factore $f(x)$ multiplicatur. Eodem modo, sicut haec, tractanda est, functioque $f(x)$ singulis casibus adaptanda est. Qua in re ad casus modo tractatos eruentes formula XX. 1) utendum est.

Jam si in r. ponimus $m = n$, in t. tamen $n = 0$, ipsorum A_n et B_n obtinemus expressiones has:

$$A_0 = -\frac{1}{2} e^{-\frac{r}{a}}, A_n = V_{n-1} \left(\frac{r}{a} \right), B_0 = -\frac{1}{2} e^{\frac{r}{a}}, B_n = V_{n-1} \left(-\frac{r}{a} \right),$$

ubi constantes arbitrariae nullitati aequiparatae sunt, quae quum nisi constantes adhuc indefinitas in ipso U contentas afficere possint.

Aequationis p. itaque est integrale completum

$$\begin{aligned} u &= U - \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{r}{a}} X_0 + e^{\frac{r}{a}} Y_0 \right) \\ &+ \sum_0^n r^n \left\{ V_{n-1} \left(\frac{r}{a} \right) X_n + V_{n-1} \left(-\frac{r}{a} \right) Y_n \right\}. \end{aligned}$$

Integratio aequationis s. formulam generaliore[m] suppeditabit. Sit enim proposita aequatio

$$\text{v.} \quad a^2 \left\{ \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right\} = u + \alpha V_0 \left(\frac{r}{a} \right) + \beta V_0 \left(-\frac{r}{a} \right),$$

ubi $r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$, atque x_1, y_1, z_1 ab ipsis x, y, z independentia. Manifesto ejus integrale completum habebitur, si alicui ejus integrali particulari integrale additur completum U aequationis XXVIII. 1). Quod integrale particulare ita eligimus, ut sit functio mera ipsius r. Quo pacto v. in hanc transit:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} = \frac{u + \alpha V_0 \left(\frac{r}{a} \right) + \beta V_0 \left(-\frac{r}{a} \right)}{a^2},$$

unde integrale illud particulare hoc est:

$$u = -\frac{1}{2} \left(\alpha e^{-\frac{r}{a}} + \beta e^{\frac{r}{a}} \right),$$

eritque generaliter

$$w. \quad u = U - \frac{1}{2} \left(\alpha e^{-\frac{r}{a}} + \beta e^{\frac{r}{a}} \right).$$

Si tamen loco α, β datas functiones ipsorum x_1, y_1, z_1 ponimus $\varphi(x_1, y_1, z_1)$ et $\psi(x_1, y_1, z_1)$, (quae in ipso U continentur constantes arbitrariae et eadem pro talibus functionibus haberi debent), poniturque $dx_1 dy_1 dz_1 = dm_1$ esse elementum dati voluminis V : si porro integralia

$$\int u dm_1, \quad \int U dm_1$$

iterum vocantur u et U , poniturque

$$x. \quad \int \left\{ \varphi \cdot V_0\left(\frac{r}{a}\right) + \psi \cdot V_0\left(-\frac{r}{a}\right) \right\} dm_1 = u_1;$$

erit (vide XXVIII.)

1) u_1 integrale aequationis

$$\alpha^2 \left\{ \frac{d^2 u_1}{dx^2} + \frac{d^2 u_1}{dy^2} + \frac{d^2 u_1}{dz^2} \right\} = u_1$$

aut hujus

$$\alpha^2 \left\{ \frac{d^2 u_1}{dx^2} + \frac{d^2 u_1}{dy^2} + \frac{d^2 u_1}{dz^2} \right\} = u_1 + 4\pi\alpha^2(\psi(x, y, z) - \varphi(x, y, z)),$$

prout punctum x, y, z extra aut intra volumen V versatur;

2) simul est

$$y. \quad u = U - \frac{1}{2} \int \left\{ \varphi \cdot e^{-\frac{r}{a}} + \psi \cdot e^{\frac{r}{a}} \right\} dm_1$$

integrale completum aequationis

$$z. \quad \alpha^2 \left\{ \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right\} = u + u_1.$$

Suppositione igitur speciali de functione u_1 ex expressione ipsius u tres integrationes abierunt, vel potius nullae tres integrationes ad illas accesserunt, quae in ipso u_1 perficiendae sunt, quod tamen e comparatione aequationum XXVII. et XXVIII. 2) expectandum erat.

**De locis geometricis, quae in motu permanenti electricitatis
respienda sunt.**

14.

E formularum §ⁱ 11. sqq. complicatione satis intelligitur, priusquam de functionibus u_1' et v_1 a quibus problema pendet, certa conjectura facta sit, determinationes accuratiores proponi non posse. Nihilominus tamen haec in universum observare juvat.

Potentiale quum in toto spatio continuum sit, in unoquoque igitur puncto unum tantum valorem recipiat, omne punctum necessario in una vel altera superficierum $v = c$, nunquam autem in duabus earum situm est. Quodsi igitur constantem c continue mutari statuimus, evenire oportet, ut corpus attrahens aliqua harum superficierum in puncto aliquo tangatur. Talia autem puncta a ceteris omnibus superficiei punctis eo differunt, quod in iis attractio in superficie perpendicularis est. Jam si $P = 0$ est aequatio superficiei, punctorum illorum conditio analytica aequationibus

$$\xi. \quad \frac{dv}{dx} : \frac{dv}{dy} : \frac{dv}{dz} = \frac{dP}{dx} : \frac{dP}{dy} : \frac{dP}{dz}$$

$$\eta. \quad P = 0$$

expressa est. Curva ξ . est locus geometricus eorum punctorum, in quibus superficies systematum $v = c$, $P = c'$ inter se osculantur. Eodem modo locus omnium punctorum, in quibus systematum $w = c$, $P = c'$ superficies se tangunt, eo excellit, quod superficiem iis punctis, in quibus flumen electricum ad superficiem perpendicularare in spatium externum effunditur, secat. Aequationes ejus sunt:

$$\theta. \quad \frac{dw}{dx} : \frac{dw}{dy} : \frac{dw}{dz} = \frac{dP}{dx} : \frac{dP}{dy} : \frac{dP}{dz};$$

atque ad ora etiam ejus invenienda, addenda est aequatio η .

Ex harum curvarum definitione perspicuum est, eas, simulatque una vel altera superficierum $P = c'$ cuspidem praebet aut in unum punctum recidit, se mutuo secare. In sphaera igitur utraque per ejus centrum permeat.

Tum vero ea curva, quae superficierum $w = c$, $v = c'$ osculatione gignitur, consideranda est. Cui triplicem esse originem, superficierum systemate $u = c''$ assumpto, statim intelligitur. Attractionis directio in ea cum flumine electrico congruit; aequationes ejus sunt

$$\iota. \quad \frac{dw}{dx} : \frac{dw}{dy} : \frac{dw}{dz} = \frac{dv}{dx} : \frac{dv}{dy} : \frac{dv}{dz} = \frac{du}{dx} : \frac{du}{dy} : \frac{du}{dz};$$

quarum, prout una vel altera origo consideratur, pars una omitti potest.

Tribus his curvis respondent superficies hae:

$$\xi'. \quad \frac{dv}{dx} \frac{dP}{dx} + \frac{dv}{dy} \frac{dP}{dy} + \frac{dv}{dz} \frac{dP}{dz} = 0,$$

$$\theta'. \quad \frac{dw}{dx} \frac{dP}{dx} + \frac{dw}{dy} \frac{dP}{dy} + \frac{dw}{dz} \frac{dP}{dz} = 0,$$

$$\iota'. \quad \frac{dv}{dx} \frac{dw}{dx} + \frac{dv}{dy} \frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz} \frac{dw}{dz} = 0.$$

Prima earum, ξ' , superficiem η . secat in curva, in qua attractio in planum superficiem tangens incidit: altera, θ' , cum η . conjuncta omnium punctorum hujus superficiei definit locum, in quibus flumen electricum in planum tangens incidit. Tertia denique locus est omnium punctorum, in quibus flumen electricum in attractione perpendicularare est.

Jam vero haec loca geometrica ad motuum rationes in faciliori conspectu ponendas aptissima sunt; in omnibusque doctrinis cognatis eorum inveniuntur similitudines; praeterea artissime cohaerent cum Maximi et Minimi determinationibus, quibus parumper immorabimur.

Curvae ξ . et superficiei ξ' . nulla alia, ut facile patet, puncta communia sint, nisi quae aequationibus

$$\frac{dv}{dx} = 0 \quad \frac{dv}{dy} = 0 \quad \frac{dv}{dz} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dP}{dx} = 0 \quad \frac{dP}{dy} = 0 \quad \frac{dP}{dz} = 0$$

definita sunt. Posteriora haec, quorum jam supra mentio facta est, si negligimus, videmus, curvam ξ . et superficiem ξ' . communia habere omnia puncta, in quibus potentiale Maximum, Minimum vel Maximo-Minimum est.

Jam sint x, y, z talis puncti coordinatae, v_0 in eo valor potentialis; coordinatarum origine ad illud translata ita ut ξ, η, ζ fiant coordinatae novae, pro omnibus punctis vicinis accipimus

$$2(v - v_0) = \frac{d^2 v_0}{dx^2} \cdot \xi^2 + \dots + 2 \frac{d^2 v_0}{dy dz} \cdot \eta \zeta + \dots,$$

in qua altioris ordinis termini neglecti sunt.

Punctum autem x, y, z si in spatio externo situm est, coefficientium ipsorum ξ^2, η^2, ζ^2 summa evanescit; est igitur una trium harum quantitatum praedita signo a duabus reliquis diverso. Jam si v variamus, illa aequatione significatur copia similium similiterque sitarum superficierum secundi ordinis; atque valori $v = v_0$ respondet conus, qui est finis inter duo systemata, quorum alterum hyperbolica, alterum elliptica hyperboloidea continet. Qui quum simul sit omnium harum superficierum asymptota, singulae superficies utrarumque copiarum paulum a vertice ejus distantes, ei celerrime appropinquantur.

Sin autem punctum x, y, z in interioribus corporis attrahentis situm est, id accidere potest, ut superficies illae in ellipsoidea transeant.

Eodem modo superficies θ' . secatur curva θ . in omnibus punctis, in quibus pressio electrica valorem maximo-minimum accipit.

Denique omnia puncta, quibus loca ι . et ι' . communibus utuntur, aut hujus generis sunt aut illius, quod supra consideravimus.

Quum in corpore interiore semper sit

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} = 0,$$

in secundo punctorum genere hyperboloïdica tantum systemata consideranda sunt; in quorum centro flumen electricum, pro horum punctorum natura, nullum est. Sed utriusque systematis superficierum tam magna ad asymptotarum conum appropinquatione non procul a centro flumina fortissima existere oportet, quia hoc loco pressiones electricae diversae intensionis proxime sibi sunt oppositae, simulque flumen electricum virium illarum differentiae directe, distantiae inverse proportionale est.

Quae observationes si conjunctae cum determinationibus nonnullis de motu electricitatis in corporibus male conducentibus, quae mox sequentur, ad atmosphaeram terrestrem applicantur, — de consideratione hic sermonem esse levi tantum approximatione valitura vix monendum videtur, — memorabilia quaedam sequuntur, quae tamen hoc loco suppressere debemus, quum ad campum quandam a proposito nostro nimis remotum pertinentia, ex adjumentis alienis vigorem disiderent.

De motu permanenti electricitatis in corporibus male conducentibus.

15.

Jam ad extremum consideramus eum casum, quo corpus A ita comparatum est, ut fractio $\frac{ke}{8\pi h}$, quam $= a^2$ posuimus, valorem valde exiguum obtineat. Talia corpora si existunt, manifesto praecipue corporibus male conducentibus adnumeranda erunt. Neque tamen statim contendere licet, quod postea demum probabitur, ipsum a^2 in omnibus corporibus male conducentibus perparvum esse.

Ex aequatione in interioribus ipsius A locum habente

$$u = a^2 \left\{ \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right\}$$

suppositione illa sequitur, quoties expressio

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = K$$

non valore gaudet valde considerabili, densitatem u et ipsam minimam fore, et vice versa, quoties in interioribus ipsius A densitas u aliquo loco valorem accipit, qui mensura definiri potest, expressionem K in eodem loco valorem admodum magnum necessario induere.

Circa punctum x, y, z superficiem clausam ponimus infinite parvam, quae volumen dm continet: secundum § 4. 1)

$$k K dm$$

erit quantitas, qua flumen conductivum per dm transeuns, ubi in volumen hoc intrat, valorem superat, quem obtinet, ubi e volumine eodem progreditur. Quoties igitur K in loco quodam permagnum est, flumen conductivum, ideoque etiam flumen electricum completum mutationes rapidas patitur.

Unde videmus, in interioribus corporum ejus naturae, qualia supra descripsimus, densitatem electricam generaliter valde exiguam esse; quoties tamen illa in aliquo loco mensura definiri potest, intensitatem fluminis electrici in eodem loco rapidas subire mutationes. In interioribus talium corporum igitur evenire potest, ut in certo loco flumen electricum valorem considerabilem habeat, dum flumina circumfusa admodum parva sunt.

Constans a hujus phaenomeni conditionem praebet. Quoties enim, ut rem ad omnia corpora extendamus, in interioribus corporis cujusdam densitas electrica alicubi tanta est, ut quantitates ordinis a^2 cum illa comparatae pro levibus et parvulis haberi possint, semper violentae illae electricitatis vicissitudines expectandae erunt.

Longe diversa in superficie ipsius A eveniunt. In aequatione U. §1 6., si ponimus $u' + A = u_1$, hanc illa formam induit:

$$k \frac{du}{dp} + \frac{2h}{c} \frac{dV}{dp} + q(u_1 - u) = 0,$$

ubi V est potentiale omnium copiarum electricarum obvenientium. Ex hac aequatione patet, ipsum u in propinquitate superficiei generaliter valores finitos obtinere, talibusque directionibus, quae superficiei parallelae sunt, non nimias mutationes passurum esse.

Jam legem determinabimus, qua densitas electrica a superficiei inde decrescit, suppositione nitentes, ipsum u in interioribus ipsius A non valores nisi exiguos induere. Qua in re omnes quantitates negligemus, una cum ipso a evanescentes.

Quod ut impetremus, initio coordinatarum in punctum superficiei ipsius A translato, perpendicularum in illo puncto introrsum spectans pro axi positivorum x sumemus, axibus ipsorum y et z in plano superficiem tangenti sitis. Eas denique tantum corporis partes considerabimus, quae in axi ipsorum x jacent.

Quibus positis habemus aequationes:

$$a^2 \left\{ \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right\} = u$$

et pro $x = 0$

$$k \frac{du}{dx} + \frac{2h}{c} \frac{dV}{dx} + q(u_1 - u) = 0.$$

Quarum prior, posito $x = a\xi$, in hanc transit

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + a^2 \left\{ \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right\} = u,$$

vel si supponimus, quod ex observatione supra facta sequitur, quantitatem $\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2}$ non nimio valore gaudere

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} = u,$$

ex qua

$$u = Ae^{-\xi} + Be^{\xi},$$

vel

$$u = Ae^{-\frac{x}{a}} + Be^{\frac{x}{a}}$$

sequitur. Quum autem densitas u e suppositione nostra in interioribus ipsius A non valores nisi exiguos induat, ponendum est $B = 0$, obtinensque legem quaesitam, formula expressam hac

$$u = Ae^{-\frac{x}{a}},$$

ubi A de uno perpendiculo ad alterum variatur.

Jam ut ad ipsum A determinandum aequatione uti possimus pro $x = 0$ locum habente, observamus, e formula IV. § 8. eadem, in qua hoc loco acquiescimus approximatione haberi

$$4\pi a^2 u + v = a^2 \int \left\{ A \frac{d}{dp} + \frac{1}{ar} A \right\} ds,$$

vel

$$ku + \frac{2h}{c} v = \frac{2h}{c} \cdot a \int \left(a \frac{d}{dp} + \frac{1}{r} \right) A ds.$$

Quum igitur quantitas $ku + \frac{2h}{c} v$, ideoque etiam ejus quotiens differentialis ipsi a proportionalis sit, hunc in aequatione nostra negligamus necesse est. Quae itaque, si v_1 designamus potentiale omnium copiarum electricitatis externarum, loco u ejus valore A substituto, in hanc transit:

$$\frac{2h}{c} \frac{dv_1}{dx} + q(u_1 - A) = 0,$$

unde

$$A = u_1 + \frac{2h}{qc} \frac{dv_1}{dx},$$

denique

$$u = \left(u_1 + \frac{2h}{qc} \frac{dv_1}{dx} \right) e^{-\frac{x}{a}}$$

sequitur.

Itaque electricitas in corporibus, qualia consideravimus, nonnisi in profunditates valde exiguas procedit, densitate ejus in progressionem geometricam decrescente.

Hae deductiones, quae cum ratione, qua electricitas in corporibus male conducentibus versatur, optime consentire videntur, nostrae theoriae propriae sunt, neque ullo modo e theoria hactenus accepta erui possunt. Re vera haec theoria e nostra sequitur, si ubique (nisi forte in calculis approximatis modo propositis) ipsum a in infinitum crescere statuitur: dum calculi modo peracti e contrario ipsum a infinite parvum esse supponunt.

Quae phaenomena autem quum in omnibus corporibus male conducentibus appareant, sequitur, ut in omnibus his corporibus a sit quantitas admodum parva. Si enim in corpore male conducenti, in quo igitur k perparvum est, ipsum a valorem acciperet finitum vel adeo infinitum, secundum calculos nostros electricitas non in superficie ejus moraretur, sed densitate sensibili per tota ejus interiora penetraret.

Formulam κ . sub certis conditionibus ad substantias qualescunque extendere licet. Ipsum enim a quoniam pro datis substantiis per certas lineas repraesentatur, quas hactenus tacite ad mensuram omnibus corporibus communem rettulimus, manifesto illud valorem numericum eo minorem impetrabit, quo major erit unitas longitudinis, quae singulis casibus in calculos introducitur: et vice versa. Itaque si in disquisitione corporis, cujus dimensiones respectu lineae a valde considerabiles sunt, unitas longitudinis satis magna et calculis accommodata adhibetur, linea a numero valde exiguo exprimitur.

Inde sequitur, ut form. κ . ad omnia corpora qualiacunque valeat, quorum dimensiones respectu lineae a satis magnae sunt.

Nec minus vice versa patet, legem illam etiam in corporibus quam pessime conducentibus tandem necessario irritam fieri, si dimensiones eorum magis magisque diminuuntur.

Cogitare licet, constantes k et $\frac{h}{c}$ a se invicem pendere, ita ut altera mutata et altera mutetur. Sed hoc jam evictum est, ipso k in indefinitum decrescente, quantitatem $\frac{h}{c}$ multo saltem lentius decrescere quam k , ita ut ratio $\frac{kc}{h}$ denique cum k evanescat. Eodem modo e

consensu calculorum § 7. cum observationibus in bonis conductoribus institutis percipitur, crescente conductibilitate etiam quantitatem a^2 augeri, ita ut etiam in hanc partem quantitas $\frac{h}{c}$ multo lentius varietur, quam conductibilitas k .

Quamquam igitur secundum nostram theoriam modus, quo electricitas in corpore quodam distribuitur, vere e valore pendet, quem constans a in hoc corpore induit, tamen corporum in ordinem digerendorum rationem semper e conductibilitate eorum petere licet, quae quum in determinatione ipsius a omnino praevaleat.

Die beiden letzten Seiten des Originals enthalten:

VITA.

Natus sum ego Elwin Bruno Christoffel in oppido Rhenano Montjoie anno 1829 die 10. Novembris patre Francisco Carolo, quem morte mihi ereptum lugeo, matre Maria Helena e. g. Engels, quam vivam adhuc veneror.

Fidem confiteor catholicam.

Primis literarum elementis domi imbutus Coloniam Agrippinam me contuli gymnasiaque, quae ibi florent, primum Catholicum deinde Friderici Guilelmi quinque per annos frequentavi.

Maturitatis testimonio munitus Berolinum petii, ubi ab Ill. Busch rectore magnifico in civium academicorum numerum receptus et ab Ill. Boeckh decano spectabili in album facultatis philosophicae relatus sum. Per quadriennium lectiones audivi virorum Illustrissimorum, Clarissimorum, Experientissimorum

Borchardt, Lejeune-Dirichlet, Dove, Eisenstein, Encke, Joachimsthal, Lichtenstein, Magnus, Mitscherlich, Ohm, Steiner, Trendelenburg, Wiedemann.

Quibus omnibus viris de me maxime meritis summas quam possum gratias ago semperque habebo.

THESES.

1. Mathesis ad omnia valet, quae mensuram et ordinem habent.
2. Non dari saltum in natura est propositio mere theoretica.
3. In calculo infinitesimali methodus differentialium est omnium praestantissima.
4. Velocitatem, qua calor propagatur, finitam esse dico.

II.

Über die Gaußsche Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 55, 1858, S. 61—82.)

Das Folgende enthält eine neue Darstellung des bekannten, von Gauß (Comm. Gott. rec. 1814—15) erfundenen Verfahrens zur angenäherten Berechnung bestimmter Integrale. Im Anschluß hieran wird dasselbe in der Weise verallgemeinert, daß zu einer Anzahl beliebig gegebener Zwischenwerthe die übrigen nach den von Gauß aufgestellten Prinzipien ausgewählt werden. Diese neue Methode kann in verschiedenen Beziehungen von Nutzen sein, wie weiter unten nachgewiesen werden soll.

1.

Da die späteren Entwicklungen in stetigem Zusammenhange mit den Formeln für die mechanische Quadratur im Allgemeinen stehen, so kann eine kurze Herleitung der letztern nicht füglich umgangen werden. Sei

$$(1.) \quad f(x) = A(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n),$$

so fällt die Funktion

$$(2.) \quad \varphi(x) = f(x) \left\{ \frac{F(a_1)}{f'(a_1)(x - a_1)} + \frac{F(a_2)}{f'(a_2)(x - a_2)} + \cdots + \frac{F(a_n)}{f'(a_n)(x - a_n)} \right\}$$

mit der Funktion $F(x)$ für die Werthe $x = a_1, a_2, \dots, a_n$ zusammen, und es ist $\varphi(a_1) = F(a_1)$, $\varphi(a_2) = F(a_2)$, $\dots$ $\varphi(a_n) = F(a_n)$. Aus (2.) folgt

$$(3.) \quad \int_{-1}^1 \varphi(x) dx = \frac{F(a_1)}{f'(a_1)} \int_{-1}^1 \frac{f(x) dx}{x - a_1} + \frac{F(a_2)}{f'(a_2)} \int_{-1}^1 \frac{f(x) dx}{x - a_2} + \cdots + \frac{F(a_n)}{f'(a_n)} \int_{-1}^1 \frac{f(x) dx}{x - a_n},$$

und dieser Ausdruck ist bis auf einen bestimmten Fehler gleich dem Integrale $\int_{-1}^1 F(x) dx$.

Um die in (3.) angedeuteten Integrationen auszuführen, ist im Allgemeinen folgender Weg einzuschlagen. Ist u eine beliebige, außerhalb der Grenzen -1 und 1 liegende GröÙe, so hat man identisch

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x) dx}{x-u} = \int_{-1}^1 \frac{f(u) dx}{x-u} + \int_{-1}^1 \frac{f(x)-f(u)}{x-u} dx = f(u) \lg \frac{u-1}{u+1} + \int_{-1}^1 \frac{f(x)-f(u)}{x-u} dx.$$

Da $f(x)$ eine rationale ganze Funktion von x vom n^{ten} Grade ist, so ist $\frac{f(x)-f(u)}{x-u}$ ebenfalls eine solche Funktion vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade von x wie von u . Setzt man demnach

$$(4.) \quad \int_{-1}^1 \frac{f(x)-f(u)}{x-u} dx = f_1(u),$$

so ist $f_1(u)$ eine ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, und

$$(5.) \quad \int_{-1}^1 \frac{f(x) dx}{x-u} = f(u) \lg \frac{u-1}{u+1} + f_1(u).$$

Diese Formel bleibt offenbar selbst dann bestehen, wenn u zwischen die Grenzen -1 und $+1$ fällt, sobald nur die unter dem Integral linker Hand stehende Funktion $\frac{f(x)}{x-u}$ innerhalb jener Grenzen überall endlich bleibt. Die Formel (5.) gilt daher, wenn u einer der GröÙen $a_1, a_2, \dots a_n$ gleich gesetzt wird, unter allen Umständen, mögen diese GröÙen außerhalb oder innerhalb der erwähnten Grenzen liegen. Dadurch geht die Gleichung (3.) in folgende über:

$$(6.) \quad \int_{-1}^1 \varphi(x) dx = \frac{f_1(a_1)}{f'(a_1)} F(a_1) + \frac{f_1(a_2)}{f'(a_2)} F(a_2) + \dots + \frac{f_1(a_n)}{f'(a_n)} F(a_n),$$

und man hat annähernd

$$(7.) \quad \int_{-1}^1 F(x) dx = \int_{-1}^1 \varphi(x) dx.$$

Durch Zerlegung in Partialbrüche folgt:

$$\frac{f_1(u)}{f(u)} = \frac{f_1(a_1)}{f'(a_1)} \cdot \frac{1}{u-a_1} + \frac{f_1(a_2)}{f'(a_2)} \cdot \frac{1}{u-a_2} + \dots + \frac{f_1(a_n)}{f'(a_n)} \cdot \frac{1}{u-a_n},$$

so daß $\frac{f_1(u)}{f(u)}$ der mittelst der Zwischenwerthe $a_1, a_2, \dots a_n$ berechnete

angenäherte Werth des Integrals $\int_{-1}^1 \frac{\partial x}{u-x}$ ist; und wenn man dies in (5.) anwendet:

$$(8.) \quad \int_{-1}^1 \frac{f(x) \partial x}{x-u} = f(u) \left\{ \lg \frac{u+1}{u-1} + \frac{f_1(a_1)}{f'(a_1)} \cdot \frac{1}{u-a_1} + \frac{f_1(a_2)}{f'(a_2)} \cdot \frac{1}{u-a_2} + \cdots + \frac{f_1(a_n)}{f'(a_n)} \cdot \frac{1}{u-a_n} \right\}.$$

Setzt man von jetzt an

$$(9.) \quad \int_{-1}^1 \frac{f(x) \partial x}{u-x} = f_2(u),$$

so ist wegen (5.)

$$(10.) \quad f(u) \lg \frac{u+1}{u-1} = f_1(u) + f_2(u),$$

und wegen (8.)

$$(11.) \quad \int_{-1}^1 \frac{\partial x}{u-x} - \left\{ \frac{f_1(a_1)}{f'(a_1)} \cdot \frac{1}{u-a_1} + \frac{f_1(a_2)}{f'(a_2)} \cdot \frac{1}{u-a_2} + \cdots + \frac{f_1(a_n)}{f'(a_n)} \cdot \frac{1}{u-a_n} \right\} = \frac{f_2(u)}{f(u)}.$$

Es ist somit $\frac{f_2(u)}{f(u)}$ der Unterschied zwischen dem wahren und dem an-

genäherten Werthe von $\int_{-1}^1 \frac{\partial x}{u-x} = \lg \frac{u+1}{u-1}$. Entwickelt man daher in

(11.) die linke Seite nach absteigenden Potenzen von u , und setzt den Überschufs des wahren Werthes von $\int_{-1}^1 x^m \partial x$ über den angenäherten Werth desselben, nämlich

$$(12.) \quad \int_{-1}^1 x^m \partial x - \left\{ \frac{f_1(a_1)}{f'(a_1)} a_1^m + \frac{f_1(a_2)}{f'(a_2)} a_2^m + \cdots + \frac{f_1(a_n)}{f'(a_n)} a_n^m \right\} = k_m,$$

so erhält man:

$$(13.) \quad \frac{k_0}{u} + \frac{k_1}{u^2} + \frac{k_2}{u^3} + \cdots = \frac{f_2(u)}{f(u)}.$$

Setzt man andererseits

$$(14.) \quad \int_{-1}^1 f(x) \partial x = A_1,$$

und allgemein

$$(15.) \quad \int_{-1}^1 f(x) x^s \partial x = A_{s+1},$$

ferner

$$\frac{1}{f(u)} = \frac{A'}{u^n} + \frac{A''}{u^{n+1}} + \frac{A'''}{u^{n+2}} + \dots,$$

so ist

$$(16.) \quad f_2(u) = \frac{A_1}{u} + \frac{A_2}{u^2} + \frac{A_3}{u^3} + \dots$$

und

$$(17.) \quad \frac{f_2(u)}{f(u)} = \frac{A_1 A'}{u^{n+1}} + \frac{A_2 A' + A_1 A''}{u^{n+2}} + \frac{A_3 A' + A_2 A'' + A_1 A'''}{u^{n+3}} + \dots,$$

mithin $k_0 = k_1 = k_2 = \dots = k_{n-1} = 0$. Die Formel (7.) liefert also allemal den genauen Werth von $\int_{-1}^1 F(x) dx$, so oft $F(x)$ eine ganze Funktion ist, welche den $(n-1)$ ten Grad nicht übersteigt. Man hat ferner

$$k_n = A_1 A', \quad k_{n+1} = A_2 A' + A_1 A'', \quad k_{n+2} = A_3 A' + A_2 A'' + A_1 A''', \text{ etc.}$$

Kann man nun $f(u)$ so bestimmen, daß in der Entwicklung von $f_2(u)$ die m ersten Glieder, also in der Entwicklung von $f(u) \lg \frac{u+1}{u-1}$ die Glieder, welche $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^2}, \dots, \frac{1}{u^m}$ enthalten, von selbst wegfallen, so beginnt die Reihe für $\frac{f_2(u)}{f(u)}$ mit dem Term $\frac{k_{m+n}}{u^{m+n+1}}$, und die Formel (7.) ist für alle ganzen Funktionen vom $(m+n-1)$ ten oder einem niedrigeren Grade vollkommen streng. Gleichzeitig ist

$$k_{n+m} = A_{m+1} A', \quad k_{n+m+1} = A_{m+2} A' + A_{m+1} A'', \text{ etc.}$$

Es wird sich bald zeigen, daß der höchste Grad von Genauigkeit, welcher mit der vorausgesetzten Form von $f(x)$ erreicht werden kann, dem Falle entspricht, wo $m = n$ ist. Es ist dies der nämliche Fall, den Gauss in der oben angeführten Abhandlung, und Jacobi in gegenwärtigem Journal behandelt haben.

2.

Das Folgende beruht auf diesem Lemma:

Unterwirft man eine ganze Funktion $f(u)$ vom n ten Grade der Bedingung, daß aus der absteigenden Entwicklung von $f(u) \lg \frac{u+1}{u-1}$ die Terme, welche $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^2}, \dots, \frac{1}{u^n}$ enthalten, von selbst wegfallen, so giebt es stets eine Funktion, welche diesen Bedingungen genügt, und dieselbe ist bis auf einen constanten Faktor bestimmt. Verlangt man außerdem, daß das Glied mit $\frac{1}{u^{n+1}}$ verschwinde, so wird die Funktion $f(u)$ identisch gleich

Null, indem jener constante Faktor den bestimmten Werth Null erhält.

Dasselbe ergibt sich leicht mittelst der Formeln (10.) und (14.), denen zufolge allgemein der Coefficient von $\frac{1}{u}$ in der absteigenden Entwicklung von $F(u) \lg \frac{u+1}{u-1}$ gleich $\int_{-1}^1 F(x) dx$ ist, vorausgesetzt, daß $F(u)$ eine rationale ganze Function ist. Sei zunächst $f(u)$ so bestimmt, daß in (10.) $f_1(u)$ die Form

$$f_1(u) = \frac{A_{n+2}}{u^{n+2}} + \frac{A_{n+3}}{u^{n+3}} + \dots$$

hat, und sei ferner $f(u) = P + Qi$, wo P und Q reelle ganze Functionen von u sind; so multiplicire man die Gleichung (10.) mit $P - Qi$. Dann ist $(P - Qi)f_1(u)$ wieder eine ganze Function von u , während die Entwicklung von $(P - Qi)f_2(u)$ mit dem Term $\frac{1}{u^2}$ beginnt. Also ist der Faktor von $\frac{1}{u}$ gleich Null. Da derselbe aber gleich

$$\int_{-1}^1 f(u)(P - Qi) du = \int_{-1}^1 (P^2 + Q^2) du$$

ist, und die Elemente dieses Integrals alle positiv sind, so muß, wenn das ganze Integral gleich Null sein soll, jedes einzelne Element verschwinden, also, wie behauptet, $f(u)$ identisch gleich Null sein.

Da somit die, in Bezug auf die unbekannten Coefficienten der Function $f(u)$ linearen Gleichungen

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad \dots \quad A_n = 0, \quad A_{n+1} = 0$$

von einander unabhängig sind, indem sich aus ihnen für jede der $(n+1)$ unbekannten Größen ein einziger Werth ergibt, so folgt, daß man unter den $(n+1)$ Coefficienten von $f(u)$ wenigstens auf eine Art ein System von n derselben so auswählen kann, daß die n Gleichungen

$$(A.) \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad \dots \quad A_n = 0$$

in Bezug auf dieses System von Unbekannten von einander unabhängig sind. Denn wäre dies nicht der Fall, so müßte man, wie leicht zu sehen ist, aus den Gleichungen

$$A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2, \quad \dots \quad A_n = \alpha_n, \quad A_{n+1} = \alpha_{n+1}$$

sämmtliche Unbekannten eliminiren können, was nach dem eben bewiesenen nicht möglich ist.

Da endlich die Gleichungen (A.) linear sind, so bestimmen sie das Verhältniß von n Coefficienten zum $(n+1)^{\text{ten}}$ auf eine einzige Weise, wodurch obiges Lemma in allen seinen Theilen bewiesen ist.

Differentiirt man nun die Gleichung (10.), und multiplicirt mit $u^2 - 1$, so folgt:

$$(18.) \quad (u^2 - 1) \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \lg \frac{u+1}{u-1} = 2f + (u^2 - 1) \frac{\partial f_1}{\partial u} + (u^2 - 1) \frac{\partial f_2}{\partial u},$$

und eine nochmalige Differentiation giebt:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left((u^2 - 1) \frac{\partial f}{\partial u} \right) \lg \frac{u+1}{u-1} - 4 \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} \left((u^2 - 1) \frac{\partial f_1}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left((u^2 - 1) \frac{\partial f_2}{\partial u} \right).$$

Diese beiden Gleichungen haben wieder die Form von (10.). Nimmt man aber jetzt an, daß $f_2(u)$ die Potenzen $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^2}, \dots, \frac{1}{u^n}$ nicht enthält, daß also

$$f_2 = \frac{A_{n+1}}{u^{n+1}} + \frac{A_{n+2}}{u^{n+2}} + \dots$$

ist, so folgt

$$\frac{\partial}{\partial u} \left((u^2 - 1) \frac{\partial f_2}{\partial u} \right) = \frac{n(n+1)A_{n+1}}{u^{n+1}} + \dots,$$

so daß die Funktion $\frac{\partial}{\partial u} \left((u^2 - 1) \frac{\partial f_2}{\partial u} \right) - n(n+1)f_2$, nach negativen Potenzen von u entwickelt, die Potenzen $\frac{1}{u}, \frac{1}{u^2}, \dots, \frac{1}{u^n}, \frac{1}{u^{n+1}}$ nicht enthält. Multiplicirt man daher die Gleichung (10.) mit $n(n+1)$ und subtrahirt sie von der vorstehenden, so folgt

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left((u^2 - 1) \frac{\partial f}{\partial u} \right) - n(n+1)f \right\} \lg \frac{u+1}{u-1} - 4 \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} \left((u^2 - 1) \frac{\partial f_1}{\partial u} \right) - n(n+1)f_1 + \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left((u^2 - 1) \frac{\partial f_2}{\partial u} \right) - n(n+1)f_2 \right\};$$

und da der Faktor von $\lg \frac{u+1}{u-1}$ den $(n+1)^{\text{ten}}$ Grad nicht erreicht, so folgt vermöge des obigen Lemmas, daß er identisch gleich Null sein muß. Da ferner auf der rechten Seite die drei ersten Glieder nur positive Potenzen von u enthalten, während das Folgende sich nur aus negativen Potenzen von u zusammensetzt, und da diese beiden Theile für sich verschwinden müssen, so haben wir

$$(19.) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left((u^2 - 1) \frac{\partial f}{\partial u} \right) - n(n+1)f = 0,$$

$$(20.) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left((u^2 - 1) \frac{\partial f_1}{\partial u} \right) - n(n+1)f_1 = 0,$$

$$(21.) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left((u^2 - 1) \frac{\partial f_2}{\partial u} \right) - n(n+1)f_2 + 4 \frac{\partial f}{\partial u} = 0.$$

Nach den bekannten Untersuchungen über die Gleichung (19.) folgt hieraus

$$(22.) \quad f(u) - P_n(u) = \frac{\partial^n(u^2-1)^n}{2^n \Gamma(n+1) \partial u^n} \\ = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2n-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} u^n - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n-2} u^{n-2} + \cdots,$$

und wegen (9.)

$$(23.) \quad f_2(u) - Q_n(u) = \int_{-1}^1 \frac{P_n(x) \partial x}{u-x},$$

welche Bezeichnung von der gewöhnlichen nur wenig abweicht. So-
dann folgt, daß die Gleichung

$$(24.) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left((u^2-1) \frac{\partial U}{\partial u} \right) = n(n+1) U - 4 \frac{\partial P_n(u)}{\partial u}$$

zu ihrem complete Integrals einen Ausdruck von der Form

$$(25.) \quad U = A P_n(u) + B Q_n(u) + R_n(u)$$

hat, wo $R_n(u)$ eine rationale ganze Funktion vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade, und
nichts Anderes, als die bisher durch $f_1(u)$ bezeichnete Funktion ist. Die
Funktionen P, Q, R stehen in Folge der Gleichung (10.) in der Relation

$$(26.) \quad P_n(u) \lg \frac{u+1}{u-1} = Q_n(u) + R_n(u),$$

oder auch

$$(27.) \quad Q_n(u) = P_n(u) \lg \frac{u+1}{u-1} - R_n(u),$$

so daß nur noch die Funktion $R_n(u)$ zu bestimmen übrig bleibt. Zu-
vor will ich aber noch die Formeln

$$(28.) \quad (u^2-1) P_n'(u) = \frac{n(n+1)}{2n+1} (P_{n+1}(u) - P_{n-1}(u)),$$

$$(29.) \quad \begin{cases} (2n+1)u P_n(u) = (n+1) P_{n+1}(u) + n P_{n-1}(u), \\ (2n+1)u Q_n(u) = (n+1) Q_{n+1}(u) + n Q_{n-1}(u), \\ (2n+1)u R_n(u) = (n+1) R_{n+1}(u) + n R_{n-1}(u) \end{cases}$$

einschalten, welche sich auf verschiedene Art, unter anderm auch mittelst
obigen Lemma's beweisen lassen. Setzt man z. B. in (18.) $P_n(u)$ für
 $f(u)$ ein, so beginnt die Entwicklung von $(u^2-1) \frac{\partial f_2}{\partial u}$ mit dem Term
 $-\frac{(n+1)A_{n+1}}{u^n}$. Bedenkt man nun, daß man setzen kann

$$(u^2-1) P_n'(u) = a P_{n+1}(u) + b P_{n-1}(u) + c P_{n-3}(u) + \cdots,$$

so folgt aus unserm Lemma, daß auf der rechten Seite alle Coeffi-

cienten, mit Ausnahme von a und b , verschwinden. Die Bestimmung der Constanten a und b hat keine Schwierigkeiten. — Zur Herleitung der Gleichungen (29.) hat man nur (26.) mit u zu multipliciren, und ganz ähnliche Betrachtungen anzustellen. Diese Gleichungen stimmen übrigens im Wesentlichen mit denen überein, deren sich Gauß in den artt. 17. und 18. seiner Abhandlung bedient.

Differentiirt man die Gleichung (28.) so folgt wegen (19.)

$$P'_{n+1}(u) - P'_{n-1}(u) = (2n+1)P_n(u),$$

also auch

$$P'_{n-1}(u) - P'_{n-3}(u) = (2n-3)P_{n-2}(u),$$

u. s. f., woraus durch Addition

$$(30.) \quad P'_{n+1}(u) = (2n+1)P_n(u) + (2n-3)P_{n-2}(u) + (2n-7)P_{n-4}(u) + \dots$$

folgt. Vermöge dieser Formel geht die Gleichung (24.) in folgende über:

$$(31.) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left((u^2 - 1) \frac{\partial U}{\partial u} \right) - n(n+1)U \\ + 4 \{ (2n-1)P_{n-1} + (2n-5)P_{n-3} + (2n-9)P_{n-5} + \dots \} = 0.$$

Um nun zur Bestimmung von $R_n(u)$ überzugehen, bemerke man, daß die Gleichung (26.) durch Aenderung des Vorzeichens von u und nachfolgende Multiplication mit $(-1)^{n-1}$ folgende Gestalt annimmt:

$$P_n(u) \lg \frac{u+1}{u-1} = (-1)^{n+1} Q_n(-u) + (-1)^{n-1} R_n(-u),$$

woraus durch Vergleichung mit (26.) $R_n(-u) = (-1)^{n-1} R_n(u)$ folgt. Da somit $R_n(u)$ nur die Potenzen u^{n-1} , u^{n-3} , u^{n-5} etc. enthalten kann, so hat es die Form

$$R_n(u) = a_1 P_{n-1}(u) + a_3 P_{n-3}(u) + a_5 P_{n-5}(u) + \dots$$

Setzt man dies in (31.) für U ein, so folgt:

$$0 = a_1 [(n-1)n - n(n+1)] P_{n-1} + a_3 [(n-3)(n-2) - n(n+1)] P_{n-3} \\ + 4(2n-1)P_{n-1} + 4(2n-5)P_{n-3} \\ + a_5 [(n-5)(n-4) - n(n+1)] P_{n-5} + \dots \\ + 4(2n-9)P_{n-5} + \dots,$$

und hieraus

$$a_1 = 2 \frac{2n-1}{1 \cdot n}, \quad a_3 = 2 \frac{2n-5}{3(n-1)}, \quad a_5 = 2 \frac{2n-9}{5(n-2)}, \quad \text{u. s. w.}$$

Damit sind die verlangten Funktionen f , f_1 , f_2 vollständig bestimmt; es ist nämlich:

$$(32.) \quad \begin{cases} f(u) = P_n(u) - \frac{\partial^n(u^2-1)^n}{2^n \Gamma(n+1) \partial u^n}, \\ f_1(u) = R_n(u) = 2 \left\{ \frac{2n-1}{1 \cdot n} P_{n-1}(u) + \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3}(u) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{2n-9}{5(n-2)} P_{n-5}(u) + \dots \right\}, \\ f_2(u) = Q_n(u) = P_n(u) \lg \frac{u+1}{u-1} - R_n(u) - \int_{-1}^1 \frac{P_n(x) \partial x}{u-x} \\ \qquad \qquad \qquad - 2 \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{2s+1 \cdot 2s+2 \dots 2s+n}{2s+1 \cdot 2s+3 \dots 2s+2n-1} \cdot \frac{1}{u^{n+2s+1}}. \end{cases}$$

Den allgemeinen Ausdruck der Funktion $P_n(u)$ hat Gauß in seiner Abhandlung gegeben, doch rührt die elegante, obenstehende Form derselben von Jacobi her. Auch findet man bei Gauß den Ausdruck von $Q_n(u)$ sowohl in Form einer hypergeometrischen Reihe, wie in seiner Reduction auf einen algebraischen und einen transcendenten Theil.

Obgleich auf diese Weise die Coefficienten in der Gleichung (6.) explicite dargestellt sind, so giebt es doch mit Rücksicht darauf, daß in den Größen $\frac{f_1(u)}{f'(u)}$ dort für u nur solche Werthe zu substituiren sind, welche $f(u)$ verschwinden machen, noch einfachere Darstellungsweisen für dieselben. Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}((u^2-1)P'_n(u)) &= n(n+1)P_n(u), \\ \frac{\partial}{\partial u}((u^2-1)R'_n(u)) &= n(n+1)R_n(u) - 4P'_n(u) \end{aligned}$$

folgt durch Elimination von $n(n+1)$:

$$P_n \frac{\partial}{\partial u}((u^2-1)R'_n) - R_n \frac{\partial}{\partial u}((u^2-1)P'_n) + 4P_n P'_n = 0,$$

und hieraus durch teilweise Integration

$$(u^2-1)(P_n R'_n - R_n P'_n) + 2P_n^2 = a.$$

Für $u = 1$ ergibt sich hieraus $a = 2$, also ist identisch

$$(33.) \quad \frac{u^2-1}{2} \{ P_n(u) R'_n(u) - R_n(u) P'_n(u) \} + P_n^2(u) = 1,$$

mithin für alle Werthe von u , für welche $P_n(u) = 0$ ist:

$$(34.) \quad \frac{1-u^2}{2} P'_n(u) R_n(u) = 1.$$

Daraus folgt für die nämlichen Werthe von u :

$$(35.) \quad \frac{f_1(u)}{f'(u)} = \frac{R_n(u)}{P'_n(u)} = \frac{1-u^2}{2} (R_n(u))^2 = \frac{2}{(1-u^2)(P'_n(u))^2}.$$

Die erste dieser Darstellungen ist von Gauß gegeben; die zweite dagegen hat den Vorzug, daß sie die Berechnung der Coefficienten $\frac{f_1(u)}{f'(u)}$ bloß von der Funktion $P'_n(u)$ abhängig macht, deren numerischer Werth bei der Auflösung der Gleichung $P_n(u) = 0$ gleichzeitig mit der Wurzel u bestimmt wird.

Sind $a_1, a_2, \dots, a_n$ die Wurzeln der Gleichung $P_n(u) = 0$, so ist

$$(36.) \quad P_n(u) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2n-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} (u-a_1)(u-a_2) \cdots (u-a_n),$$

folglich nach der zweiten Darstellungsweise

$$(37.) \quad \frac{f_1(a_1)}{f'(a_1)} = \frac{2 \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2n-1} \right)^2}{(1-a_1)(1+a_1)[(a_1-a_2)(a_1-a_3) \cdots (a_1-a_n)]^2},$$

so daß sämtliche Coefficienten in einfache, leicht zu bildende Faktoren zerlegt sind. Ich bemerke noch folgende Formeln, welche sich unter der Voraussetzung, daß $P_n(u) = 0$ sei, aus (28.) und (29.) leicht ergeben:

$$(38.) \quad (1-u^2)P'_n(u) = nP_{n-1}(u) = -(n+1)P_{n+1}(u),$$

$$(39.) \quad \frac{f_1(u)}{f'(u)} = \frac{2(1-u^2)}{(nP_{n-1}(u))^2} = \frac{2(1-u^2)}{((n+1)P_{n+1}(u))^2}.$$

Diese Ausdrücke treten durch Auflösung in lineare Faktoren in eine interessante Beziehung zum Produkte

$$\frac{R_n(a_1)}{P'_n(a_1)} \cdot \frac{R_n(a_2)}{P'_n(a_2)} \cdots \frac{R_n(a_n)}{P'_n(a_n)}.$$

Dies vorangeschickt haben wir das Resultat, daß, wenn $F(x)$ eine rationale ganze Funktion von x ist, welche den $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grad nicht überschreitet, man die streng richtige Gleichung hat

$$(40.) \quad \int_{-1}^1 F(x) dx = \frac{R_n(a_1)}{P'_n(a_1)} F(a_1) + \frac{R_n(a_2)}{P'_n(a_2)} F(a_2) + \cdots + \frac{R_n(a_n)}{P'_n(a_n)} F(a_n).$$

Läßt sich ferner $F(x)$ in eine nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln, welche für alle zwischen -1 und 1 liegenden Werthe von x so stark convergirt, daß man die Reihe, ohne ihren Werth merklich zu ändern, auf ihre $2n$ ersten Glieder reduciren kann, so gilt die Formel (40.) wieder ohne merklichen Fehler. Dasselbe gilt, wenn man vermöge der besondern Beschaffenheit von $F(x)$

alle auf das $2n^{\text{te}}$ folgenden Glieder in den sogenannten Rest der Reihe vereinigen muß, wofern nur dieser Rest gegen $F(x)$ vernachlässigt werden darf.

Un hiervon eine Anwendung zu geben, werde ich die Interpolationsformel (2.) für den Fall, wo die Größen $a_1, a_2, \dots a_n$ die Wurzeln der Gleichung $P_n(u) = 0$ sind, in eine andere Form bringen. Ich erinnere zu dem Zwecke an die bekannten Formeln

$$\int_{-1}^1 P_\mu(x) P_\nu(x) dx = 0, \quad \int_{-1}^1 P_\nu(x) P_\nu(x) dx = \frac{2}{2\nu+1},$$

von denen sich die erstere aus der Betrachtung des Produktes $P_\mu(u) Q_{n+\mu}(u)$ unter Anwendung der Gleichung (14.) leicht ergibt. — Ist nun $\mu + \nu < 2n$ und auch $2\nu < 2n$, so muß man mittelst der Formel (40.) den genauen Werth dieser Integrale erhalten, und es ist somit

$$(41.) \quad \sum P_\mu(a) P_\nu(a) \frac{R_n(a)}{P'_n(a)} = 0$$

$$(42.) \quad \sum P_\nu(a) P_\nu(a) \frac{R_n(a)}{P'_n(a)} = \frac{2}{2\nu+1},$$

wo die Summen sich auf die Werthe $a = a_1, a_2, \dots a_n$ beziehen. Will man jetzt die Funktion $F(x)$ durch eine Funktion $f(x)$ vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ersetzen, welche mit ihr für die Werthe $x = a_1, a_2, \dots a_n$ übereinstimmen soll, so kann man setzen

$$f(x) = \beta P_0(x) + \beta_1 P_1(x) + \beta_2 P_2(x) + \dots + \beta_{n-1} P_{n-1}(x),$$

und hat zur Bestimmung der Coefficienten $\beta, \beta_1, \dots \beta_{n-1}$ die Gleichungen

$$F(a_1) = \beta P_0(a_1) + \beta_1 P_1(a_1) + \beta_2 P_2(a_1) + \dots + \beta_{n-1} P_{n-1}(a_1)$$

$$F(a_2) = \beta P_0(a_2) + \beta_1 P_1(a_2) + \beta_2 P_2(a_2) + \dots + \beta_{n-1} P_{n-1}(a_2)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$F(a_n) = \beta P_0(a_n) + \beta_1 P_1(a_n) + \beta_2 P_2(a_n) + \dots + \beta_{n-1} P_{n-1}(a_n).$$

Multipliziert man diese der Reihe nach mit

$$P_\nu(a_1) \frac{R_n(a_1)}{P'_n(a_1)}, \quad P_\nu(a_2) \frac{R_n(a_2)}{P'_n(a_2)}, \quad \dots \quad P_\nu(a_n) \frac{R_n(a_n)}{P'_n(a_n)}$$

und addirt, so fallen wegen (41.) alle β weg, deren Index von ν verschieden ist: da hingegen nach (42.) der Coefficient von β , gleich $\frac{2}{2\nu+1}$ ist, so folgt

$$\beta_\nu = \frac{2\nu+1}{2} \sum F(a) P_\nu(a) \frac{R_n(a)}{P'_n(a)},$$

wo die Summe wie oben zu interpretiren ist. Die so bestimmte Funktion $f(x)$ ist mit der durch die Gleichung (2.) definirten $\varphi(x)$ identisch, da beides rationale ganze Funktionen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades sind, welche für n Werthe von x mit einander übereinstimmen. Es ist also

$$(43.) \quad \varphi(x) = \sum_{v=0}^{n-1} \frac{2^v+1}{2} P_v(x) \sum F(a) P_v(a) \frac{R_n(a)}{P_n'(a)}.$$

Ist $F(x)$ eine ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, so fällt diese Formel mit der bekannten Entwicklung zusammen. Setzt man z. B. $F(x) = \frac{P_n(x) - P_n(y)}{x-y}$, so ist $\varphi(x) = F(x)$, ferner $F(a_v) = \frac{P_n(y)}{y-a_v}$, mithin

$$\begin{aligned} \beta_v &= \frac{2^v+1}{2} P_n(y) \sum \frac{P_v(a)}{y-a} \frac{R_n(a)}{P_n'(a)} \\ &= \frac{2^v+1}{2} \left\{ P_v(y) \sum \frac{R_n(a)}{P_n'(a)} \frac{P_n(y)}{y-a} - P_n(y) \sum \frac{P_v(y) - P_v(a)}{y-a} \frac{R_n(a)}{P_n'(a)} \right\}. \end{aligned}$$

In diesem Ausdrücke ist die erste Summe gleich $R_n(y)$; die andere kann, da $\frac{P_v(y) - P_v(x)}{y-x}$ eine ganze Funktion von x ist, welche den $2n^{\text{ten}}$ Grad

nicht erreicht, nach (40.) durch das Integral $\int_{-1}^1 \frac{P_v(y) - P_v(x)}{y-x} \partial x = R_v(y)$ ersetzt werden. Folglich ist

$$\beta_v = \frac{2^v+1}{2} (P_v(y) R_n(y) - P_n(y) R_v(y))$$

und

$$\frac{P_n(x) - P_n(y)}{x-y} = \sum_0^{n-1} \frac{2^v+1}{2} \{ P_v(y) R_n(y) - P_n(y) R_v(y) \} P_v(x).$$

Setzt man hier tx und ty statt x und y , so überzeugt man sich leicht, daß β_v höchstens vom $(n-v-1)^{\text{ten}}$ Grade sein kann.

Die erzeugende Funktion der Ausdrücke

$$\Pi_m = P_n(u) R_{n+m}(u) - P_{n+m}(u) R_n(u),$$

nämlich $v = \sum_0^{\infty} \Pi_m x^m$, genügt der Differentialgleichung

$$(1 - 2ux + x^2) \frac{\partial x^v v}{\partial x} + (x-u)x^v v = 2x^v,$$

wie man durch Substitution der Reihe für v mittelst (29.) leicht verificirt; und es findet sich

$$v = \frac{2}{x^2 \sqrt{1-2ux+x^2}} \int_0^x \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{1-2ux+x^2}}.$$

Daraus ergibt sich

$$\Pi_{m+1} = 2 \sum_0^m \frac{P_s(u) P_{m-s}(u)}{n+s+1},$$

also wenn $\nu < n$:

$$P_\nu R_n - P_n R_\nu = 2 \sum_0^{n-\nu-1} \frac{P_s P_{n-\nu-s-1}}{\nu+s+1},$$

wodurch die oben nachgewiesene Reduktion bewerkstelligt ist.

Eine interessantere, auch in der Folge nützliche Anwendung von (43.) ist folgende. Setzt man in dieser Formel

$$F(x) = \frac{n}{2} \cdot \frac{P_n(x) P_{n-1}(y) - P_n(y) P_{n-1}(x)}{x-y},$$

so erhält man wieder $\varphi(x) = F(x)$, da letztere Funktion in Bezug auf x ganz und vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist. Es ist aber

$$F(a) = \frac{n}{2} \cdot \frac{P_n(y) P_{n-1}(a)}{y-a},$$

folglich

$$\beta_\nu = \frac{n}{2} \cdot \frac{2\nu+1}{2} \sum \frac{P_n(y)}{y-a} \frac{P_\nu(a) P_{n-1}(a) R_n(a)}{P'_n(a)}.$$

Aus (38.) und (34.) folgt weiter

$$(1-a^2) P'_n(a) = n P_{n-1}(a), \quad (1-a^2) P'_n(a) R_n(a) = n P_{n-1}(a) R_n(a) - 2,$$

mithin

$$\beta_\nu = \frac{2\nu+1}{2} \sum \frac{P_n(y)}{y-a} \frac{P_\nu(a)}{P'_n(a)} = \frac{2\nu+1}{2} P_\nu(y).$$

Es ist daher identisch

$$(44.) \quad \frac{n}{2} \cdot \frac{P_n(x) P_{n-1}(y) - P_n(y) P_{n-1}(x)}{x-y} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{2\nu+1}{2} P_\nu(x) P_\nu(y),$$

wie man auch durch Multiplication mit $x-y$ und Anwendung von (29.) verificiren kann.

3.

Sei jetzt, um zu dem in 1. angedeuteten allgemeinen Falle überzugehen, $f(u)$ eine Funktion vom $(m+n)^{\text{ten}}$ Grade, welche die Eigenschaft hat, daß aus der Entwicklung von $f(u) \lg \frac{u+1}{u-1}$ die Terme $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{u^2}$, ... $\frac{1}{u^m}$ wegfallen, und sei wie früher

$$(1.) \quad f_1(u) = \int_{-1}^1 \frac{f(x) - f(u)}{x-u} \partial x;$$

seien ferner $a_1, a_2, \dots a_{n+m}$ die Wurzeln der Gleichung $f(u) = 0$, so giebt der Ausdruck

$$(2.) \quad \Omega = \sum_{i=1}^{i=n+m} \frac{f_i(a_i)}{f'(a_i)} F(a_i)$$

im Allgemeinen einen genäherten Wert des Integrals $\int_{-1}^1 F(x) dx$, während er diesen Werth genau darstellt, so oft $F(x)$ eine ganze Funktion ist, welche den $(2m+n-1)^{\text{ten}}$ Grad nicht übersteigt.

Zur Bestimmung der Funktion $f(u)$ bietet sich zunächst ein Weg dar durch die Gleichungen 1. (14.), (15.), denen zufolge die erwähnte Eigenschaft von $f(u)$ durch die Gleichungen

$$(3.) \quad \int_{-1}^1 f(x) dx = 0, \quad \int_{-1}^1 f(x)x dx = 0, \quad \dots \quad \int_{-1}^1 f(x)x^{m-1} dx = 0$$

bedingt wird.

Da diese Gleichungen nach dem in art. 2 Eingangs Bemerkten von einander unabhängig sind, so lassen sich aus ihnen m Coefficienten von $f(u)$ durch die übrigen $(n+1)$ ausdrücken. Geht man also auf die Wurzeln von $f(u)$ zurück, so sind durch die Gleichungen (3.) m dieser Wurzeln durch die übrigen n auf eine einzige Weise bestimmt; letztere dagegen bleiben vollkommen willkürlich. Genau gesprochen besteht also die vorliegende Aufgabe darin, daß man diejenige Funktion $f(u)$ vom $(n+m)^{\text{ten}}$ Grade bestimmen soll, welche den Gleichungen (3.) Genüge leistet, und für gegebene n Werthe von u verschwindet. Zugleich ist ersichtlich, daß diese Aufgabe stets eine, und nur eine einzige Lösung zuläßt.

Gegenwärtige Methode gewährt demnach die Möglichkeit, bei der angenäherten Integration einer *gegebenen* Funktion alle Vortheile zu vereinigen, welche einerseits aus der Berücksichtigung des numerischen Verlaufs dieser Funktion, und andererseits aus der Anwendung der Gaußschen Methode entspringen können. Man wird nämlich jene n willkürlichen Wurzeln so wählen, daß für sie die Funktion $F(x)$ besonders einfache, oder auch solche Werthe annimmt, von denen ein großer Einfluß auf den Werth des gesuchten Integrals zu erwarten ist.

Man kann aber auch in den Fall kommen, daß der analytische Ausdruck von $F(x)$ unbekannt ist, während die Werthe $F(a_1), F(a_2), \dots F(a_n)$ beispielsweise durch Beobachtungen bestimmt worden sind. Kann man es alsdann dahin bringen, auch noch die Werthe von $F(x)$ für die übrigen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ zu bestimmen, so gewährt die Formel (2.), abgesehen von den Beobachtungsfehlern, einen

höheren Grad von Genauigkeit, als sich mit jenen n und irgend welchen andern m Zwischenwerthen im Allgemeinen würde erreichen lassen.

Seien also $a_1, a_2, \dots a_n$ die gegebenen Wurzeln von $f(x)$, und

$$(4.) \quad y = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n),$$

so kann man setzen

$$(5.) \quad f(x) = y(A_m x^m + A'_m x^{m-1} + \dots + A_m^{(m)}).$$

Setzt man ferner

$$(6.) \quad \int_{-1}^1 y x^i \partial x = Y_i,$$

so gehen die Gleichungen (3.) in folgende über:

$$\begin{aligned} 0 &= A_m Y_m + A'_m Y_{m-1} + \dots + A_m^{(m)} Y_0 \\ 0 &= A_m Y_{m+1} + A'_m Y_m + \dots + A_m^{(m)} Y_1 \\ &\dots \dots \dots \\ 0 &= A_m Y_{2m-1} + A'_m Y_{2m-2} + \dots + A_m^{(m)} Y_{m-1}, \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich, wenn $y_1, y_2, \dots y_m$ die Werthe von y für $x = x_1, x_2, \dots x_m$ vorstellen, und man von einem constanten Faktor absieht

$$(7.) \quad f(x) = y \int_{-1}^{1(m)} y_1 y_2 \dots y_m (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m) \\ \Pi(x_1, x_2, \dots x_m) x_1^0 x_2^1 \dots x_m^{m-1} \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m,$$

wo $\Pi(x_1, x_2, \dots x_m) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \dots$ ist. Ist $i_1, i_2, \dots i_m$ irgend eine Permutation der Zahlen 1, 2, $\dots m$, so ist dies auch gleich

$$y \int_{-1}^{1(m)} y_1 y_2 \dots y_m (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m) \\ \Pi(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots x_{i_m}) x_{i_1}^0 x_{i_2}^1 \dots x_{i_m}^{m-1} \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m.$$

Bringt man aber in Π die Indices wieder in die frühere Ordnung, so erhält $x_{i_1}^0, x_{i_2}^1, \dots x_{i_m}^{m-1}$ dasselbe Vorzeichen, welches es in der Determinante

$$\Sigma \pm x_1^0 x_2^1 \dots x_m^{m-1} = \Pi(x_1, x_2, \dots x_m)$$

hat. Folglich ist auch

$$(8.) \quad \Gamma(m+1) \cdot f(x) \\ = y \int_{-1}^{1(m)} y_1 y_2 \dots y_m (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m) [\Pi(x_1, x_2, \dots x_m)]^2 \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m.$$

Dies ist der allgemeine Ausdruck der Funktion $f(x)$, und es steht seiner

Anwendung nichts im Wege, als die zahlreichen und unbequemen Integrationen, welche er involvirt. Ich werde daher für einige besondere Fälle seine entwickelte Form hersetzen. Es ist für

$$(9.) \left\{ \begin{array}{l} m=0 \quad f(x) = y \\ m=1 \quad f(x) = y \{ x Y_0 - Y_1 \} \\ m=2 \quad f(x) = y \{ x^2 [Y_1^2 - Y_0 Y_2] - x [Y_1 Y_2 - Y_0 Y_3] + [Y_2^2 - Y_1 Y_3] \} \\ m=3 \quad f(x) = y \{ x^3 [Y_2^3 - Y_1 Y_2 Y_3 + Y_3^2 Y_0 - Y_1 Y_2 Y_3 + Y_1^2 Y_4 - Y_0 Y_2 Y_4] \\ \quad - x^2 [Y_2^2 Y_3 - Y_1 Y_3^2 + Y_0 Y_3 Y_4 - Y_1 Y_2 Y_4 + Y_1^2 Y_5 - Y_0 Y_2 Y_5] \\ \quad + x [Y_0 Y_4^2 - Y_0 Y_3 Y_5 + Y_1 Y_2 Y_5 - Y_1 Y_3 Y_4 + Y_2 Y_3^2 - Y_2^2 Y_4] \\ \quad - [Y_3^3 - Y_2 Y_3 Y_4 + Y_1 Y_4^2 - Y_2 Y_3 Y_4 + Y_2^2 Y_5 - Y_1 Y_3 Y_5] \} \\ \text{etc.} \qquad \qquad \qquad \text{etc.} \end{array} \right.$$

Für gewisse Anwendungen ist es nöthig, die Gleichung (2.) in eine andere Form zu bringen. Sei

$$y = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) = A(x),$$

$$f(x) = y B(x) = y A_m(x - b_1)(x - b_2) \dots (x - b_m),$$

so daß die Größen $b_1, b_2, \dots b_m$ mit den früher durch $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots a_{n+m}$ bezeichneten zusammenfallen. Sei ferner

$$(10.) \quad \varphi(x) = \sum \frac{F(a)}{A'(a)} \frac{A(x)}{x - a},$$

$$(11.) \quad \psi(x) = \sum \frac{F(a)}{A'(a)} \frac{A(x)B(x)}{(x - a)B(a)} + \sum \frac{F(b)}{B'(b)} \frac{A(x)B(x)}{(x - b)A(b)},$$

so ist die rechte Seite von (2.) nichts anderes als das von $x = -1$ bis $x = 1$ genommene Integral von $\psi(x)$. Man kann aber diese Funktion auch in die Form

$$(12.) \quad \psi(x) = \varphi(x) + \sum \frac{F(b) - \varphi(b)}{A(b)B'(b)} \frac{A(x)B(x)}{x - b}$$

bringen, indem beide Ausdrücke für $x = a_1, a_2, \dots a_n, b_1, b_2, \dots b_m$ mit $F(x)$ übereinstimmen, und somit als Funktionen des $(n + m - 1)$ ten Grades identisch sein müssen. Dies festgestellt, erhalten wir statt der Gleichung (2.) folgende:

$$(13.) \quad \Omega = \sum \frac{A_1(a)}{A'(a)} F(a) + \sum \frac{F(b) - \varphi(b)}{A(b)B'(b)} \int_{-1}^1 \frac{A(x)B(x)}{x - b} dx,$$

welche für die Anwendung gegenwärtiger Methode einen neuen Gesichtspunkt darbietet. Betrachtet man nämlich

$$\int_{-1}^1 \varphi(x) dx = \sum \frac{A_1(a)}{A'(a)} F(a)$$

als erste Annäherung an den Werth von $\int_{-1}^1 F(x) \partial x$, so stellt sich der Ausdruck

$$\Delta = \sum \frac{F(b) - \varphi(b)}{A(b)B(b)} \int_{-1}^1 \frac{A(x)B(x)}{x-b} \partial x$$

als die Correction dar, welche man an jener anzubringen hat, um einen genauern Werth zu erhalten.

So aufgefaßt kommt also unsere Methode darauf hinaus, die Wurzeln $b_1, b_2, \dots b_m$ so auszuwählen, daß die mittelst derselben berechnete Correction Δ eine höhere Genauigkeit erreicht, als sich im Allgemeinen mittelst irgend welcher anderer m Wurzeln würde erzielen lassen.

Ist $k_n^{(m)}$ der bei der Integration von x^n begangene Fehler, so hat man nach art. 1 $k_0^{(m)} = k_1^{(m)} = \dots = k_{2m+n-1}^{(m)} = 0$,

$$\frac{k_{2m+n}^{(m)}}{u^{2m+n+1}} + \frac{k_{2m+n+1}^{(m)}}{u^{2m+n+2}} + \dots = \frac{f(u)}{f'(u)} = \frac{1}{f'(u)} \sum_0^{\infty} \frac{1}{u^{m+s+1}} \int_{-1}^1 x^{m+s} f(x) \partial x,$$

also

$$k_{2m+n}^{(m)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u^{m+1} f_2(u)}{f(u)} = \frac{1}{A_m} \int_{-1}^1 x^m f(x) \partial x.$$

Aus (7.) folgt aber weiter, daß

$$\int_{-1}^1 x^m f(x) \partial x = \int_{-1}^1 y_1 y_2 \dots y_{m+1} \Pi(x_1, x_2, \dots x_{m+1}) x_1^0 x_2^1 \dots x_{m+1}^m \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{m+1}$$

der Coefficient der höchsten Potenz von x in

$$y \int_{-1}^1 y_1 y_2 \dots y_{m+1} (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_{m+1}) \cdot \Pi(x_1, x_2, \dots x_{m+1}) x_1^0 x_2^1 \dots x_{m+1}^m \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{m+1},$$

also nach der Bezeichnung der Formel (5.) gleich A_{m+1} ist. Folglich hat man allgemein

$$k_{2m+n}^{(m)} = \frac{A_{m+1}}{A_m},$$

also z. B.

$$k_n^{(0)} = Y_0, \quad k_{n+2}' = \frac{\begin{vmatrix} Y_1 & Y_0 \\ Y_2 & Y_1 \end{vmatrix}}{Y_0}, \quad k_{n+4}'' = \frac{\begin{vmatrix} Y_2 & Y_1 & Y_0 \\ Y_3 & Y_2 & Y_1 \\ Y_4 & Y_3 & Y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_1 & Y_0 \\ Y_2 & Y_1 \end{vmatrix}}, \quad \text{etc.}$$

4.

Obgleich die Entwicklungen des vorigen art. für alle in der Praxis vorkommenden Fälle ausreichen dürften, so werde ich doch eine zweite Herleitung derselben nicht übergehen, da die gesuchten Ausdrücke auf einem andern Wege eine vollkommnere Gestalt annehmen.

Ist $f(x)$ eine ganze Funktion vom $(n+m)^{\text{ten}}$ Grade, so kann man stets setzen

$$f(x) = A P_{n+m}(x) + A_1 P_{n+m-1}(x) + \dots + A_{n+m-1} P_1(x) + A_{n+m} P_0(x).$$

Sollen nun aus der Entwicklung von $f(x) \lg \frac{x+1}{x-1}$ die Terme $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\dots$, $\frac{1}{x^m}$ ausfallen, so sieht man aus den früher entwickelten Eigenschaften der Funktionen P , daß $f(x)$ die Funktionen $P_0, P_1, \dots, P_{m-1}$ nicht enthalten darf, und es ist daher der allgemeinste Ausdruck der Funktion $(n+m)^{\text{ten}}$ Grades, welche jener Bedingung genügt, dieser:

$$f(x) = A P_{n+m}(x) + A_1 P_{n+m-1}(x) + \dots + A_n P_m(x).$$

Diese Funktion soll ferner für $x = a_1, a_2, \dots, a_n$ verschwinden. Wenn man daher von einem willkürlichen constanten Faktor absieht, so erhält man

$$(1.) \quad f(x) = \Sigma \pm P_{n+m}(x) P_{n+m-1}(a_1) P_{n+m-2}(a_2) \dots P_m(a_n),$$

und es handelt sich darum, diese Determinante durch das Produkt

$$(x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_n)$$

wirklich zu dividiren. Für $n=1$ gelingt dies mittelst der Formel (44.) art. 2. Setzt man nämlich dort $m+1$ statt n und a_1 statt y , so ergibt sich

$$(2.) \quad \frac{P_{m+1}(x) P_m(a_1) - P_m(x) P_{m+1}(a_1)}{x - a_1} = \frac{2}{2m+1} \cdot \frac{2m+1}{m+1} \sum_0^m \frac{2v+1}{2} P_v(x) P_v(a_1).$$

Ich werde jetzt einen Hilfssatz beibringen, durch welchen man von vorstehender Formel zur Division der Gleichung (1.) durch den Ausdruck

$$(x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_n)$$

gelangen kann.

Bezeichnet man die in (1.) rechts stehende Determinante durch Δ , so bilde man die Funktion

$$(3.) \quad U = \frac{P_{n+m-1}(a_1) \frac{\partial \Delta}{\partial P_{n+m}(a_1)}}{(x-a_2)(x-a_3) \dots (x-a_n)} + \frac{P_{n+m-1}(a_2) \frac{\partial \Delta}{\partial P_{n+m}(a_2)}}{(x-a_1) \dots (x-a_n)(x-a_3)} + \dots$$

$$+ \frac{P_{n+m-1}(a_n) \frac{\partial \Delta}{\partial P_{n+m}(a_n)}}{(x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_{n-1})},$$

also

$$\begin{aligned} & (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) U \\ = & (x - a_1) P_{n+m-1}(a_1) \frac{\partial \Delta}{\partial P_{n+m}(a_1)} + (x - a_2) P_{n+m-1}(a_2) \frac{\partial \Delta}{\partial P_{n+m}(a_2)} + \dots \\ & + (x - a_n) P_{n+m-1}(a_n) \frac{\partial \Delta}{\partial P_{n+m}(a_n)}. \end{aligned}$$

Nun ist nach den bekannten Eigenschaften der Determinanten

$$\begin{aligned} & P_{n+m-1}(x) \frac{\partial \Delta}{\partial P_{n+m}(x)} + P_{n+m-1}(a_1) \frac{\partial \Delta}{\partial P_{n+m}(a_1)} + \dots \\ & + P_{n+m-1}(a_n) \frac{\partial \Delta}{\partial P_{n+m}(a_n)} = 0, \end{aligned}$$

mithin vorstehendes gleich

$$- \left\{ x P_{n+m-1}(x) \frac{\partial \Delta}{\partial P_{n+m}(x)} + a_1 P_{n+m-1}(a_1) \frac{\partial \Delta}{\partial P_{n+m}(a_1)} + \dots \right\}.$$

Transformirt man hier die Faktoren der Partialdeterminanten mittelst der Formel (29.) art. 2

$$u P_{n+m-1}(u) = \frac{n+m}{2n+2m-1} P_{n+m}(u) + \frac{n+m-1}{2n+2m-1} P_{n+m-2}(u),$$

so zerstören sich alle Glieder, welche Faktoren von der Form

$$\frac{n+m-1}{2n+2m-1} P_{n+m-2}(u)$$

erhalten, und dieser Ausdruck ergibt sich gleich

$$\begin{aligned} & - \frac{n+m}{2n+2m-1} \left\{ P_{n+m}(x) \frac{\partial \Delta}{\partial P_{n+m}(x)} + P_{n+m}(a_1) \frac{\partial \Delta}{\partial P_{n+m}(a_1)} + \dots \right\} \\ & = - \frac{n+m}{2n+2m-1} \Delta. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Formel

$$(4.) \quad \frac{\Delta}{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)} = - \frac{2n+2m-1}{n+m} U.$$

Da die partiellen Determinanten $\frac{\partial \Delta}{\partial P_{n+m}(a_i)}$ von derselben Art wie Δ selber, aber eine Ordnung niedriger sind, so reducirt sich durch (4.) die Herstellung der Quotienten zur Linken auf die von n andern Quotienten derselben Gattung, in denen Zähler und Nenner um eine Ordnung niedriger sind.

Mittelst der Formeln (2.) und (4.) erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{\Sigma \pm P_{m+2}(x) P_{m+1}(a_1) P_m(a_2)}{(x - a_1)(x - a_2)} \\ = & \frac{2m+3}{m+2} \left\{ P_{m+1}(a_1) \frac{\Sigma \pm P_{m+1}(x) P_m(a_2)}{x - a_2} - P_{m+1}(a_2) \frac{\Sigma \pm P_{m+1}(x) P_m(a_1)}{x - a_1} \right\} \\ = & \frac{2}{2m+1} \cdot \frac{2m+1 \cdot 2m+3}{m+1 \cdot m+2} \sum_0^m \frac{2v+1}{2} P_v(x) \Sigma \pm P_{m+1}(a_1) P_v(a_2). \end{aligned}$$

6*

Ebenso ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{\Sigma \pm P_{m+2}(x) P_{m+2}(a_1) P_{m+1}(a_2) P_m(a_3)}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)} \\ &= \frac{2m+5}{m+3} \left\{ P_{m+2}(a_1) \frac{\Sigma \pm P_{m+2}(x) P_{m+1}(a_2) P_m(a_3)}{(x-a_2)(x-a_3)} \right. \\ & \quad + P_{m+2}(a_2) \frac{\Sigma \pm P_{m+2}(x) P_{m+1}(a_3) P_m(a_1)}{(x-a_3)(x-a_1)} \\ & \quad \left. + P_{m+2}(a_3) \frac{\Sigma \pm P_{m+2}(x) P_{m+1}(a_1) P_m(a_2)}{(x-a_1)(x-a_2)} \right\} \\ &= \frac{2}{2m+1} \cdot \frac{2m+1 \cdot 2m+3 \cdot 2m+5}{m+1 \cdot m+2 \cdot m+3} \sum_0^m \frac{2\nu+1}{2} P_\nu(x) \Sigma \pm P_{m+2}(a_1) P_{m+1}(a_2) P_\nu(a_3). \end{aligned}$$

Man kann auf diese Weise fortfahren, und es hat nicht die geringste Schwierigkeit, durch Induktion folgende allgemeine Formel nachzuweisen:

$$\begin{aligned} (5.) \quad f(x) &= \Sigma \pm P_{m+n}(x) P_{m+n-1}(a_1) \dots P_m(a_n) \\ &= \frac{2}{2m+1} \cdot \frac{2m+1 \cdot 2m+3 \dots 2m+2n-1}{m+1 \cdot m+2 \dots m+n} (x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_n) \\ & \quad \cdot \sum_0^m \frac{2\nu+1}{2} P_\nu(x) \Sigma \pm P_{m+n-1}(a_1) \dots P_{m+1}(a_{n-1}) P_\nu(a_n). \end{aligned}$$

Es ergibt sich ferner unter Beibehaltung der frühern Bezeichnung

$$(6.) \quad \begin{cases} f_1(x) = \Sigma \pm R_{m+n}(x) P_{m+n-1}(a_1) \dots P_m(a_n), \\ f_2(x) = \Sigma \pm Q_{m+n}(x) P_{m+n-1}(a_1) \dots P_m(a_n), \end{cases}$$

welche Determinanten durch Permutation der an den Funktionalzeichen befindlichen Indices zu bilden sind.

Setzt man zur Abkürzung

$$\Sigma \pm P_{m+n-1}(a_1) P_{m+n-2}(a_2) \dots P_m(a_n) = \mathfrak{U}_m,$$

so erhält man für den bei der Integration von x^{2m+n} begangenen Fehler $k_{2m+n}^{(m)}$, welcher mit dem in art. 3 bestimmten identisch sein muß, in folgender Weise einen neuen Ausdruck. Da nämlich nach art. 1

$$\frac{k_{2m+n}^{(m)}}{u^{2m+n+1}} + \frac{k_{2m+n+1}^{(m)}}{u^{2m+n+2}} + \dots = \frac{f_2(u)}{f(u)}$$

ist, so folgt, daß $k_{2m+n}^{(m)}$ die Gränze ist, welcher sich

$$u^{2m+n+1} \frac{Q_m(u) \frac{\partial f(x)}{\partial P_m(x)}}{P_{m+n}(u) \frac{\partial f(x)}{\partial P_{m+n}(x)}}$$

mit wachsendem n nähert. Man erhält

$$(7) \quad k_{2m+n}^{(m)} = \frac{2}{2m+1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdots m}{1 \cdot 3 \cdots 2m-1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdots m+n}{1 \cdot 3 \cdots 2m+2n-1} \cdot \frac{\frac{\partial f(x)}{\partial P_m(x)}}{\frac{\partial f(x)}{\partial P_{m+n}(x)}} \\ = (-1)^n \frac{2}{2m+1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdots m}{1 \cdot 3 \cdots 2m-1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdots m+n}{1 \cdot 3 \cdots 2m+2n-1} \cdot \frac{\mathfrak{A}_{m+1}}{\mathfrak{A}_m}.$$

Bezeichnet man den Coefficienten von x^s in $P_s(x)$, nämlich $\frac{1 \cdot 3 \cdots 2s-1}{1 \cdot 2 \cdots s}$ durch γ_s , und setzt vorstehenden Ausdruck dem in art. 3 gefundenen gleich, so folgt:

$$\frac{A_{m+1}}{A_m} = \frac{2(-1)^n}{(2m+1)\gamma_m\gamma_{m+n}} \frac{\mathfrak{A}_{m+1}}{\mathfrak{A}_m},$$

mithin

$$\frac{A_m}{A_0} = \frac{(-1)^{m \cdot 2^m}}{1 \cdot 3 \cdots 2m-1} \cdot \frac{1}{\gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_{m-1} \cdot \gamma_n\gamma_{n+1} \cdots \gamma_{m+n-1}} \cdot \frac{\mathfrak{A}_m}{\mathfrak{A}_0}.$$

Es ist ferner $A_0 = 1$, und wie sich leicht findet

$$\mathfrak{A}_0 = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_{n-1} \Pi(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

folglich

$$(8) \quad \mathfrak{A}_m = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(2m+n-1)} \cdot 1 \cdot 2 \cdots m}{2^m} \gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_m \cdot \gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_{m+n-1} \Pi(a_1, a_2, \dots, a_n) A_m.$$

Setzt man in diese Gleichung die Ausdrücke für $\mathfrak{A}_m$ und $1 \cdot 2 \cdots m A_m$ ein, indem man letztern aus art. 3 (8.) entnimmt, so folgt

$$\Sigma \pm P_{m+n-1}(a_1) \cdots P_m(a_n) \\ = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(2m+n-1)}}{2^m} \gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_m \cdot \gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_{m+n-1} \Pi(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ \int_{-1}^{1(m)} y_1 y_2 \cdots y_m [\Pi(x_1, x_2, \dots, x_m)]^2 \partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_m.$$

Dehnt man diese Formel auf $n+1$ Argumente $x, a_1, \dots, a_n$ aus, so ergibt sich

$$(9) \quad \Sigma \pm P_{m+n}(x) P_{m+n-1}(a_1) \cdots P_m(a_n) \\ = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n(2m+n-1)}}{2^m} \gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_m \cdot \gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_{m+n} \Pi(a_1, \dots, a_n, x) \\ \int_{-1}^{1(m)} y_1 y_2 \cdots y_m (x-x_1)(x-x_2) \cdots (x-x_m) [\Pi(x_1, \dots, x_m)]^2 \partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_m,$$

wodurch der Zusammenhang zwischen den Formeln des gegenwärtigen und des vorigen art. dargelegt ist.

Ich werde jetzt noch einen dritten Ausdruck für $f(x)$ herleiten, der ebenfalls eigenthümlicher Natur ist. Integriert man die Gleichung (1.)

m mal hinter einander nach x von -1 bis x , ebenso m mal nach a_1 , $a_2, \dots a_n$ von -1 bis $a_1, -1$ bis $a_2, \dots -1$ bis a_n , und wendet dann in jedem Term der Determinante den Jacobischen Satz

$$\int_{-1}^{x(m)} P_n(x) \partial x^m = (x^2 - 1)^m \frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n+m+1)} \frac{\partial^m P_n(x)}{\partial x^m}$$

an, so erhält man

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{x, a_1, \dots, a_n(m(n+1))} f(x) (\partial x \partial a_1 \dots \partial a_n)^m \\ &= \Sigma \pm \int_{-1}^{x(m)} P_{n+m}(x) \partial x^m \int_{-1}^{a_1(m)} P_{n+m-1}(a_1) \partial a_1^m \dots \int_{-1}^{a_n(m)} P_m(a_n) \partial a_n^m \\ &= \frac{\Gamma(1)\Gamma(2)\dots\Gamma(n+1)}{\Gamma(2m+1)\Gamma(2m+2)\dots\Gamma(2m+n)} [(x^2-1)(a_1^2-1)\dots(a_n^2-1)]^m \\ & \quad \Sigma \pm P_{n+m}^{(m)}(x) P_{n+m-1}^{(m)}(a_1) \dots P_m^{(m)}(a_n). \end{aligned}$$

In dieser Determinante kann man aber zufolge eines bekannten Satzes alle Elemente auf ihren ersten Term reduciren. Schreibt man darauf die gemeinsamen Faktoren aller Elemente derselben Vertikalreihen heraus, so ergibt sich vorstehendes

$$\begin{aligned} &= c[(x^2-1)(a_1^2-1)\dots(a_n^2-1)]^m \Sigma \pm x^n a_1^{n-1} \dots a_n^0 \\ &= c[(x^2-1)(a_1^2-1)\dots(a_n^2-1)]^m \Pi(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, x), \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$c = \frac{1}{[2^m \Gamma(m+1)]^{n+1}} \cdot \frac{(2m)_0 (2m+2)_1 (2m+4)_2 \dots (2m+2n)_n}{m_0 (m+1)_1 (m+2)_2 \dots (m+n)_n},$$

und μ , wie üblich den Coefficienten von x^μ in der Entwicklung von $(1+x)^\mu$ bezeichnet. Es ist demnach auch

$$\begin{aligned} (10.) \quad & \Sigma \pm P_{n+m}(x) P_{n+m-1}(a_1) \dots P_m(a_n) \\ &= c \frac{\partial^{m(n+1)}}{(\partial x \partial a_1 \dots \partial a_n)^m} \{ [(x^2-1)(a_1^2-1)\dots(a_n^2-1)]^m \Pi(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, x) \}, \end{aligned}$$

oder wenn man

$$(11.) \quad \frac{\partial^{mn}}{(\partial a_1 \partial a_2 \dots \partial a_n)^m} \{ [(a_1^2-1)(a_2^2-1)\dots(a_n^2-1)]^m \Pi(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, x) \} = V$$

setzt:

$$(12.) \quad \Sigma \pm P_{n+m}(x) P_{n+m-1}(a_1) \dots P_m(a_n) = c \frac{\partial^m (x^2-1)^m}{\partial x^m} V.$$

Ist nun der Ausdruck V reell oder so beschaffen, daß er durch Multiplication mit einer constanten GröÙe reell gemacht werden kann,

so schließt man aus dieser Gleichung nach bekannten Methoden, daß zum Mindesten m Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ reell und zwischen den Gränzen -1 und $+1$ gelegen sein müssen. Sind also z. B. die gegebenen n Wurzeln $a_1, a_2, \dots, a_n$ reell und außerhalb jener Gränzen belegen, so müssen die übrigen m Wurzeln echte Brüche sein. — Sind ferner alle Wurzeln der Gleichung $V = 0$ reell, so sind es auch alle Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, und die Anzahl der außerhalb der Gränzen -1 und 1 liegenden Wurzeln ist in beiden dieselbe.

Hieraus ist es ersichtlich, daß man gegenwärtiges Verfahren zur angenäherten Integration von $F(x)$ mit großem Vortheil z. B. dann wird anwenden können, wenn sich $F(x)$ für n bestimmte, außerhalb des Integrationsintervalls, und für beliebig viele innerhalb desselben willkürlich vertheilte Werthe von x annähernd oder genau ermitteln läßt.

Anmerkung.

In dem Handexemplar Christoffels, das im Vorwort erwähnt ist, finden sich ziemlich umfangreiche Ausführungen, die auf eine Ausdehnung der Gaußschen Quadratur auf den Fall unendlicher Grenzen abzielen. Sie beschäftigen sich hauptsächlich mit den Funktionensystemen, die durch die Gleichungen

$$f_n(x) = \frac{e^x x^{1-\alpha}}{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} (e^{-x} x^{\alpha+1}) \quad (\alpha \text{ positiv})$$

und

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} (e^{-x^2}) \quad (\text{Hermitesche Polynome})$$

definiert sind. Diese Ausführungen sind in die Abhandlung *Sur une classe particulière de fonctions entières et de fractions continues* (XXVIII) übergegangen und dort verallgemeinert. Über die Verwendung dieser Funktionen zur Ausführung der ins Unendliche erstreckten Integration finden sich nur kurze Andeutungen.

M.

III.

Ueber die lineare Abhängigkeit von Functionen einer einzigen Veränderlichen.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 55, 1858, S. 281—299.)

Eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung ohne zweiten Theil zwischen y und der unabhängigen Veränderlichen x hat bekanntlich stets n Integrale $y_1, y_2, \dots y_n$, der Beschaffenheit, daß es unmöglich ist, n Constanten $a_1, a_2, \dots a_n$ zu bestimmen, welche den Ausdruck:

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n = H$$

identisch zu Null machen, ohne daß zu gleicher Zeit alle diese Constanten verschwinden; es ist in diesem Falle H das complete Integral jener Differentialgleichung. Läßt sich dagegen H durch constante Werthe von $a_1, a_2, \dots a_n$, die alle oder zum Theil von Null verschieden sind, zum Verschwinden bringen, so reichen die Functionen $y_1, y_2, \dots y_n$ zur Darstellung des complete Integrals nicht aus. — Ganz ähnliche Verhältnisse finden bei den linearen Differenzgleichungen statt.

Hat man demnach n Integrale einer solchen Gleichung gefunden, so muß man untersuchen, ob zwischen denselben eine lineare homogene Relation existirt, oder nicht, ob man also aus ihnen das complete, oder nur ein partikulares Integral zusammensetzen kann. Die Entscheidung dieser Frage hängt von analytischen Kriterien ab, welche im Folgenden hergeleitet werden sollen.

Wenn ferner durch die Anwendung dieser Kriterien gefunden ist, daß zwischen gegebenen Functionen eine lineare homogene Relation besteht, so kann man verlangen, daß dieselbe wirklich aufgestellt werde. Dabei zeigt es sich, daß die Werthe der Coefficienten, mit welchen die einzelnen Functionen in dieser Relation behaftet sind, im Allgemeinen von den Grenzen abhängen, zwischen denen die unabhängige Veränderliche liegt, und für andere Grenzen ganz verschieden ausfallen. Die folgende Untersuchung wird lehren, daß auch die Bestimmung dieser Grenzen nach allgemeinen Prinzipien von Statten geht, so daß

für die beiden Hauptfragen, auf welche man auf diesem Gebiete stößt, leitende Grundsätze vorhanden sind.

Um die zu dieser Untersuchung erforderlichen Unterscheidungen treffen zu können, ist es nothwendig, den Begriff der Function in folgender Weise zu erweitern.

Es bezeichne x eine Veränderliche, welche *jeden reellen Werth* annehmen kann, m eine zweite Veränderliche, welche *nur positive und negative ganzzahlige Werthe* annimmt. Ist nun eine Function $f(x)$ zwischen den willkürlichen reellen Grenzen a und b gegeben, so stellt die Gleichung $y = f(x)$ eine Curve dar, welche von $x = a$ bis $x = b$ in gegebener Weise verläuft. Die Gleichung $y = f(m)$ dagegen stellt vermöge der über m getroffenen Bestimmung ein System von Punkten dar, deren Abscissen die zwischen den Grenzen a und b enthaltenen ganzen Zahlen sind. Sowie nun $f(x)$ eine Function von x ist, weil es für jedes zwischen a und b liegende x einen bestimmten Werth hat, so ist $f(m)$ eine Function von m , weil es für jedes zwischen a und b liegende m einen bestimmten Werth hat. Da man aber durch jenes System von Punkten beliebig viele unter einander nicht im Mindesten verwandte Curven $y = f_1(x)$ legen kann, so daß, für jedes zwischen a und b liegende m , $f_1(m) = f(m)$ ist, so sieht man, daß die Natur dieses Systems von Punkten, nämlich die Function $f(m)$ ganz unabhängig ist von den Werthen, welche $f(x)$ für die nicht ganzzahligen Abscissen annimmt. Man muß also bei der Definition der Function von m die Vorstellung, daß sie in einem Ausdrücke enthalten sei, der auch für nicht ganzzahlige Werthe der Veränderlichen gewisse Werthe hat, als ganz unwesentlich fallen lassen, und sich diese Function entweder graphisch durch ein auf bestimmte Axen bezogenes System von Punkten, oder was genau dasselbe ist, numerisch durch eine Tabelle gegeben denken, in welcher die eine Colonne diejenigen Werthe enthält, welche m annehmen kann, während die andere Colonne jedesmal den zugehörigen Functionalwerth liefert.

Da nach dem Gesagten unzählig viele Functionen von x dieselbe Function von m enthalten, so kann durch eine Function von m ohne Hinzufügung weiterer Bedingungen keine einzige Function von x bestimmt sein. Aber es ist wesentlich zu bemerken, daß man von den Functionen von m zu den Functionen von x übergehen kann. Hängt nämlich $f(m)$ noch von einer willkürlichen Constanten ε in der Weise ab, daß $f(m) = F(m\varepsilon)$ ist, wo ε nicht anders als in der Verbindung $m\varepsilon$ vorkommt, so setze man $m\varepsilon = x$; dann entspricht der Aenderung von m um eine Einheit die von x um ε , d. h. um eine GröÙe, welche vermöge ihrer Willkürlichkeit auf jeden Grad von Kleinheit gebracht werden kann.

Auf dieselbe Art, wie die Functionen von m , lassen sich auch Functionen einer Veränderlichen m' definiren, welche sich nicht mehr wie m um constante, sondern um ganz beliebige Differenzen ändert. Aber da die Werthe, welche m' annehmen kann, eine bestimmte Aufeinanderfolge zeigen, so kann man m' , und folglich auch jede Function von m' als Function von m betrachten.

Sind $n + 1$ Functionen von m gegeben, $f(m), f_1(m), \dots f_n(m)$, so kann man stets eine lineare homogene Relation $Af(m) + A_1f_1(m) + \dots + A_nf_n(m) = 0$ aufstellen, in welcher mindestens einer der Coefficienten $A, A_1, \dots A_n$ von Null verschieden ist, und welche für bestimmte n aufeinanderfolgende Werthe von m , etwa für $m = m_0, m_0 + 1, \dots m_0 + n - 1$ gültig ist. In dem besonderen Falle, wo diese nämliche Relation auch noch für Werthe $m = m_0 - 1, m_0 - 2, \dots m_0 - q; m_0 + n, m_0 + n + 1, \dots m_0 + n + p$ stattfindet, nenne ich die Functionen $f(m), f_1(m), \dots f_n(m)$ *linearabhängig für die Werthe $m = m_0 - q, m_0 - q + 1, \dots m_0 + n + p$* . Die Anzahl der Werthe von m , für welche gegebene Functionen von m linearabhängig sind, kann demnach nie kleiner sein, als die Anzahl der Functionen. Es ist nach dem Vorangeschickten kaum nöthig zu bemerken, daß die Eigenschaft der Linearabhängigkeit sich nicht auf die Functionen $f(x), f_1(x), \dots f_n(x)$ bezieht, in welchen jene enthalten sind, sondern nur auf die besondern Werthe, welche diese Functionen für die angegebenen ganzzahligen Werthe von x annehmen. — Sind die gegebenen Functionen in den Intervallen $m = m', m' + 1, \dots m'' - 1; m = m'', m'' + 1, \dots m''' - 1; \dots m = m^t, m^t + 1, \dots m^k - 1$ linearabhängig, während die Relationen, durch welche diese Abhängigkeit ausgedrückt wird, in den einzelnen Intervallen verschieden sind, so nenne ich die Functionen wieder linearabhängig für die Werthe $m = m', m' + 1, \dots m^k - 1$.

Wenn die gegebenen Functionen in einem bestimmten Intervall den Bedingungen der Linearabhängigkeit nicht genügen, so nenne ich sie *linearunabhängig für die in jenem Intervall enthaltenen Werthe von m* .

Es ist nach dem oben Angedeuteten einleuchtend, wie diese Definitionen auf den Fall einer continuirlichen Veränderlichen x übertragen werden. Will man dieselben benutzen, um zu untersuchen, ob und innerhalb welcher Grenzen die Functionen $f(m), f_1(m), \dots f_n(m)$ linearabhängig sind, so muß man zunächst die Coefficienten $A, A_1, \dots A_n$ so bestimmen, daß die Gleichung $Af(m) + A_1f_1(m) + \dots + A_nf_n(m) = 0$ für $m = m_0, m_0 + 1, \dots m_0 + n - 1$ stattfindet, wo m_0 irgend einen besondern Werth von m vorstellt. Ist dies geschehen, so muß man versuchen, ob diese Gleichung auch noch für einen der Werthe $m = m_0 - 1$,

wenigstens eine der Größen $\Delta_\mu(m)$ für jedes der Reihe $m_0, m_0 + 1, \dots, m_0 + p + 1$ angehörige m von Null verschieden ist, während die Determinante $\Delta(m)$ für die Werthe $m = m_0, m_0 + 1, \dots, m_0 + p$ verschwindet.

Im zweiten Falle hat man für jedes der Reihe $m_0, m_0 + 1, \dots, m_0 + p + n$ angehörige m wenigstens zwei von einander unabhängige Relationen:

$$Af(m) + A_1f_1(m) + \dots + A_nf_n(m) = 0,$$

$$Bf(m) + B_1f_1(m) + \dots + B_nf_n(m) = 0,$$

woraus wiederum für die Werthe $m = m_0, m_0 + 1, \dots, m_0 + p$ die Gleichung $\Delta(m) = 0$ folgt. Da aber der Voraussetzung gemäß die Quotienten $\frac{B}{A}, \frac{B_1}{A_1}, \dots, \frac{B_n}{A_n}$ wenigstens zum Theil von einander verschieden sind, so erhält man, wenn aus beiden Gleichungen eine der Functionen f_μ eliminirt wird, stets eine Relation derselben Art zwischen den übrigen Functionen, in welcher wenigstens ein Coefficient von Null verschieden ist. Daraus folgt, daß man in diesem Falle nothwendig die Gleichungen $\Delta_\mu(m) = 0$ hat, wo μ jede der Zahlen $0, 1, \dots, n$, und m einen beliebigen der Werthe $m_0, m_0 + 1, \dots, m_0 + p + 1$ vorstellt. Bestehen mehr als zwei Relationen zwischen den gegebenen Functionen unabhängig von einander, so erhält man außer den Gleichungen $\Delta(m) = 0, \Delta_\mu(m) = 0$ noch weitere Formeln, welche für unsern Zweck jedoch kein näheres Interesse haben.

Was den dritten Fall betrifft, so sieht man leicht, daß, wenn alle in den unentwickelten Determinanten $\Delta(m)$ oder $\Delta_\mu(m)$ vorkommenden Argumente demselben Intervall angehören, sich die in den beiden ersten Fällen gegebenen Erörterungen mit den nöthigen Modificationen wörtlich wiederholen lassen. Liegen diese Argumente dagegen in zwei aufeinanderfolgenden Intervallen, so lassen sich in Bezug auf die in diesen Intervallen stattfindenden Relationen sehr verschiedene Voraussetzungen machen, von denen hier nur eine einzige discutirt werden soll. Nimmt man an, daß von den linearen Relationen, welche in den einzelnen Intervallen stattfinden, keine auch im andern gültig ist, so kann man augenscheinlich aus diesen Relationen keine allgemeingültigen Gleichungen herleiten, in welchen aus beiden Intervallen bestimmte Functionalwerthe, aber außer diesen keine anderen Größen mehr vorkommen. Man kann daher über den Werth von $\Delta(m)$ oder $\Delta_\mu(m)$ im Allgemeinen gar nichts festsetzen, sobald die in ihnen vorkommenden Argumente verschiedenen Intervallen angehören; liegen dagegen diese Argumente in demselben Intervall, so ist auf jeden Fall $\Delta(m) = 0$, und es sind außerdem alle $\Delta_\mu(m)$ gleich Null, oder wenigstens ein Theil derselben von Null

verschieden, jenachdem das Intervall von der zweiten oder der ersten Art ist. Die Anzahl der Werthe von m , für welche die in $\Delta(m)$ vorkommenden Argumente zwei aufeinanderfolgenden Intervallen angehören können, ist gleich n , und kann diese Zahl nicht übersteigen, da jedes Intervall mehr als n Argumente umfaßt. Sind daher $n + 1$ Functionen linearabhängig, so kann es vorkommen, daß n , aber nicht mehr aufeinanderfolgende Werthe ihrer Determinante $\Delta(m)$ von Null verschieden sind. Ist umgekehrt $\Delta(m)$ für mehr als n aufeinanderfolgende Werthe von m von Null verschieden, so können jene Functionen nicht für alle Werthe von m linearabhängig sein.

2.

Ich gehe jetzt von der Voraussetzung aus, daß $\Delta(m)$ für die Werthe $m = m_0, m_0 + 1, \dots, m_0 + p$ verschwindet, dagegen für die Werthe $m = m_0 - 1, m_0 + p + 1$ von Null verschieden ist. Dann gilt der Satz, daß die Functionen $f, f_1, \dots, f_n$ für die Werthe $m = m_0, m_0 + 1, \dots, m_0 + p + n$ linearabhängig sind.

Es soll zunächst bewiesen werden, daß dieser Satz für $n + 1$ Functionen gilt, wenn er für n Functionen stattfindet. Setzt man:

$$(1.) \quad \varphi(m) = Af(m) + A_1f_1(m) + \dots + A_nf_n(m),$$

und nimmt für die Coefficienten $A, A_1, \dots, A_n$ bestimmte Zahlen, welche den Gleichungen:

$$(2.) \quad \varphi(m') = 0, \quad \varphi(m' + 1) = 0, \dots, \varphi(m' + n - 1) = 0$$

genügen, wo m' irgend einen besondern Werth von m bedeutet, so erhält man aus den Gleichungen (2.) und einer der folgenden:

$$Af(m' - 1) + A_1f_1(m' - 1) + \dots + A_nf_n(m' - 1) = \varphi(m' - 1),$$

$$Af(m' + n) + A_1f_1(m' + n) + \dots + A_nf_n(m' + n) = \varphi(m' + n),$$

die Gleichungen:

$$(3.) \quad A_\mu \Delta(m' - 1) = (-1)^n \varphi(m' - 1) \Delta_\mu(m'),$$

$$(4.) \quad A_\mu \Delta(m') = \varphi(m' + n) \Delta_\mu(m').$$

Ist nun m' eine der Zahlen $m_0, m_0 + 1, \dots, m_0 + p$, so verschwindet in (4.) der Voraussetzung zufolge die linke Seite, und man hat:

$$(5.) \quad \varphi(m' + n) \Delta_\mu(m') = 0,$$

so daß entweder $\varphi(m' + n) = 0$ ist, oder sämtliche $\Delta_\mu(m')$ verschwinden. Es zerfällt daher im Allgemeinen die Reihe $m_0, m_0 + 1, \dots, m_0 + p$ in Intervalle von zweierlei Art; in denen der ersten Art ist wenigstens eine der Größen $\Delta_\mu(m')$ von Null verschieden, und es sind daher, wie

behauptet, die Functionen $f, f_1, \dots, f_n$ in diesem Intervall linearabhängig. In den Intervallen der zweiten Art, in welchen man die $n + 1$ Relationen $\mathcal{A}_\mu(m') = 0$ hat, sind je n der gegebenen Functionen linearabhängig vermöge der Voraussetzung, daß obiger Satz für n Functionen gültig sei. In der That haben die Determinanten $\mathcal{A}_\mu(m)$ dieselbe Form wie $\mathcal{A}(m)$, während sie eine Function weniger enthalten.

In einem Intervall der ersten Art kann nur eine einzige lineare homogene Relation zwischen den gegebenen Functionen stattfinden; in einem der zweiten Art dagegen bestehen in Folge der gemachten Voraussetzungen $n + 1$ Relationen, deren jede von einer Function frei ist. Eine Anzahl von $n + 1$ Relationen dieser Form kann sich nicht aus einer einzigen Relation herleiten lassen, es bestehen daher in den Intervallen der zweiten Art mindestens zwei lineare Relationen zwischen den gegebenen Functionen unabhängig von einander.

Da $\mathcal{A}(m_0 - 1) = (-1)^n \{f(m_0 - 1) \mathcal{A}_0(m_0) + f_1(m_0 - 1) \mathcal{A}_1(m_0) + \dots\}$ von Null verschieden ist, so muß von den Größen $\mathcal{A}_\mu(m_0)$, also auch von den zu ihnen proportionalen Größen A_μ , eine wenigstens von Null verschieden sein. Die Werthe $m_0, m_0 + 1, \dots, m_0 + n$ gehören also zu einem Intervall der ersten Art, in welchem nur eine einzige Relation $\varphi(m) = 0$ stattfindet; und diese Gleichung kann wegen (3.) nicht auch für den Werth $m = m_0 - 1$ bestehen. — Gehört ferner der Werth $m_0 + p$ zu einem Intervall der ersten Art, so besteht die in demselben stattfindende lineare Relation wegen (4.) auch für den Werth $m' = m_0 + p + n$, während sie unmöglich für den folgenden Werth von m' stattfinden kann. Liegt jener Werth in einem Intervall der zweiten Art, so hat man der Voraussetzung gemäß mindestens zwei von einander unabhängige lineare Relationen $\psi(m) = 0, \chi(m) = 0$, welche für die Werthe $m_0 + p + n - 1, m_0 + p + n - 2, \dots$ stattfinden. Für dieselben Werthe besteht also auch die Relation $\alpha\psi(m) + \beta\chi(m) = 0$; in welcher man die Zahlen α und β so bestimmen kann, daß dieselbe auch für $m = m_0 + p + n$ stattfindet. Auch diese Relation kann unmöglich für $m = m_0 + p + n + 1$ stattfinden, wie man leicht sieht, wenn man in (4.) $m' = m_0 + p + 1$ setzt.

Es bleibt nur noch übrig, obigen Satz für zwei Functionen nachzuweisen, da er alsdann auf jede Anzahl von Functionen ausgedehnt werden kann. Dieser Beweis ergibt sich ohne Weiteres aus dem Vorangehenden, da nämlich in unserem Falle $\mathcal{A}_0(m) = -f_1(m), \mathcal{A}_1(m) = f(m)$ ist, so besteht in den Intervallen der zweiten Art jede beliebige lineare Relation zwischen den gegebenen Functionen, während für die Intervalle der ersten Art die Linearabhängigkeit der gegebenen Functionen bereits nachgewiesen ist. Auch wiederholen sich die Bemerkungen,

durch welche die Grenzen nachgewiesen wurden, innerhalb deren die Linearabhängigkeit nothwendig stattfindet.

Aus diesen Beweisen ergeben sich nun weiter folgende Sätze:

1) Damit gegebene $n + 1$ Functionen $f(m), f_1(m), \dots, f_n(m)$ für alle Werthe von m linearunabhängig sind, ist erforderlich und hinreichend daß ihre Determinante $\Delta(m)$ für alle Werthe von m von Null verschieden ist.

2) Ist die Anzahl aufeinanderfolgender Werthe von m , für welche $\Delta(m)$ von Null verschieden ist, nie größer als n , so sind die Functionen $f(m), f_1(m), \dots, f_n(m)$ für alle Werthe von m linearabhängig.

An diese Sätze, welche in Verbindung mit den im Anfange bewiesenen die vollständigen Kriterien für die Linearabhängigkeit oder Unabhängigkeit gegebener Functionen enthalten, schliessen sich folgende Bemerkungen, die zur Bestimmung der Grenzen dienen, innerhalb welcher die Linearabhängigkeit im Allgemeinen durch verschiedene lineare Relationen ausgedrückt wird.

3) Sind zwei Intervalle, in welchen $\Delta(m)$ verschwindet, durch n oder weniger Werthe von m getrennt, für welche $\Delta(m)$ von Null verschieden ist, so kann keine lineare Relation zwischen den gegebenen Functionen, welche in dem einen Statt findet, auch im andern gültig sein.

Dies ergibt sich unmittelbar aus dem vorhin geführten Beweise. Ist ferner m' der erste Werth von m in einem Intervall der ersten Art, $m' - 1$ der letzte in einem von der zweiten Art, und $\varphi(m) = 0$ die in jenem stattfindende lineare Relation, welche also für $m = m', m' + 1, \dots$ besteht, so ist in (3.) $\Delta(m' - 1) = 0$, dagegen von den Größen $\Delta_\mu(m')$ mindestens eine von Null verschieden, also nothwendig $\varphi(m' - 1) = 0$. Da ferner in der Gleichung $A_\mu \Delta(m' - 2) = (-1)^\mu \cdot \varphi(m' - 2) \Delta_\mu(m' - 1)$ beide Seiten unabhängig von $\varphi(m' - 2)$ verschwinden, so kann dieser Wert von Null verschieden sein, so daß also die Relation $\varphi(m) = 0$ nothwendig für $m = m' - 1$, aber nicht auch für $m = m' - 2$ stattfindet. — Ist ferner $m' + 1$ der erste Werth in einem Intervall der zweiten Art, m' der letzte in einem von der ersten Art, und $\varphi(m) = 0$ die in letzterem stattfindende lineare Relation, so ist nach dem vorhin Bewiesenen $\varphi(m' + n) = 0$; aber da in der Gleichung

$$A_\mu \Delta(m' + 1) = \varphi(m' + n + 1) \Delta_\mu(m' + 1)$$

beide Seiten unabhängig von $\varphi(m' + n + 1)$ verschwinden, so kann dies von Null verschieden sein.

4) Sind also zwei Intervalle der ersten Art durch eines von der zweiten Art geschieden, so ist die lineare Relation, welche in dem einen stattfindet, nicht nothwendig auch in dem andern gültig.

5) Ist ein Intervall der ersten Art, welches die Werthe $m = m_0, m_0 + 1, \dots m'_0$ umfaßt, durch zwei andere von der zweiten Art begrenzt, so findet in ihm eine einzige lineare Relation statt, welche für die Werthe $m = m_0 - 1, m_0, \dots m'_0 + n$, aber nicht nothwendig auch noch für die Werthe $m_0 - 2$ und $m'_0 + n + 1$ gültig ist.

Um diese Sätze auf ein Beispiel anzuwenden, nehme ich an, daß: $\mathcal{A}(m) = 0$ ist für jedes m , und daß sämtliche $\mathcal{A}_\mu(m)$ verschwinden, wenn m einer der Gruppen:

$$m_1, m_1 + 1, \dots m'_1 - 1; \quad m_2, m_2 + 1, \dots m'_2 - 1; \\ \dots m_\mu, m_\mu + 1, \dots m'_\mu - 1$$

angehört, während für jeden anderen Werth von m wenigstens eine jener Größen von Null verschieden ist; und sei $m_1 < m'_1 < m_2 < m'_2 \dots < m_\mu < m'_\mu$. Dann findet zwischen den $n + 1$ Functionen eine einzige lineare Relation statt für $m = -\infty, \dots m_1 + n - 1$; eine andere für $m = m'_1 - 1, m'_1, \dots m_2 + n - 1$; eine dritte für $m = m'_2 - 1, m'_2, \dots m_2 + n - 1$; u. s. f.; und endlich eine im Allgemeinen von jenen verschiedene für $m = m'_\mu - 1, m'_\mu, \dots \infty$. Dagegen sind jede beliebige n von den gegebenen Functionen linearabhängig für die Werthe $m = m_1, m_1 + 1, \dots m'_1 + n - 2$; $m = m_2, m_2 + 1, \dots m'_2 + n - 2$; $\dots m = m_\mu, m_\mu + 1, \dots m'_\mu + n - 2$, und es finden in den einzelnen Intervallen im Allgemeinen verschiedene lineare Relationen statt.

3.

Ich werde jetzt die lineare Differenzengleichung:

$$(1.) \quad P(m)f(m+n) + P_1(m)f(m+n-1) + \dots + P_n(m)f(m) = 0$$

untersuchen, in welcher die Coefficienten $P, P_1, \dots P_n$ analytische Functionen von m sind, und dabei die erlaubte Voraussetzung machen, daß für keinen Werth von m sämtliche Coefficienten verschwinden. Ist dies nämlich nicht der Fall, so darf man (1.) nur durch eine Function $\varphi(m)$ dividiren, welche nur dann verschwindet, wenn sämtliche Coefficienten verschwinden, und sich jedesmal in derselben Weise der Null nähert, wie derjenige Coefficient, welcher von allen am langsamsten gegen Null convergirt. Ebenso werde ich voraussetzen, daß für keinen Werth von m einer oder mehrere dieser Coefficienten unendlich groß werden.

Es handelt sich bei dieser Untersuchung, wie im Folgenden bei den linearen Differentialgleichungen, wesentlich darum, genau festzusetzen, welchen Grad von Allgemeinheit das complete Integral einer solchen Gleichung im Allgemeinen, und welchen dasselbe unter ge-

$\Delta_0(m)$ noch $\Delta_0(m+1)$ gleich Null. Es ist daher nicht möglich, daß eine der Größen $P(m)$ und $P_n(m)$, aber nicht zugleich die andere verschwinde; und umgekehrt würde, wenn dies der Fall wäre, eine der Größen $\Delta_0(m)$ und $\Delta_0(m+1)$ gleich Null sein, also eine Linearabhängigkeit zwischen den gegebenen Functionen bestehen. Die Coefficienten $P(m)$ und $P_n(m)$ können aber auch für keinen der Werthe (a.) zugleich verschwinden. Setzt man nämlich $\frac{\partial \Delta_0(m)}{\partial f_\mu(m)} = \Delta_{0,\mu}(m)$, woraus

$$\Delta_0(m) = f_1(m)\Delta_{0,1}(m) + f_2(m)\Delta_{0,2}(m) + \dots,$$

$$(-1)^{n-1}\Delta_0(m+1) = f_1(m+n)\Delta_{0,1}(m) + f_2(m+n)\Delta_{0,2}(m) + \dots$$

folgt, so ergibt sich unter der Voraussetzung $P(m) = 0$ und $P_n(m) = 0$ aus den Gleichungen (2.), daß entweder sämtliche Coefficienten der Gleichung (1.), oder sämtliche Größen $\Delta_{0,\mu}(m)$ verschwinden. Das Erstere ist gleich im Anfange ausgeschlossen worden; wäre das Andere der Fall, so hätte man auch $\Delta_0(m) = 0$, $\Delta_0(m+1) = 0$, woraus der Voraussetzung zuwider die Linearabhängigkeit der gegebenen Functionen für die Werthe von $m, m+1, \dots, m+n$ folgt.

Bezeichnet man demnach durch m' die besonderen Werthe von m , für welche einer der Coefficienten $P(m)$ und $P_n(m)$, oder beide zugleich verschwinden, so hat man folgende Regeln:

1) Gegebene n Functionen, welche der Gleichung (1.) für einen der Werthe m' genügen, können nicht linearunabhängig sein.

2) Will man die Gleichung (1.) durch n linearunabhängige Functionen integrieren, so ist dazu erforderlich, daß für keinen der Werthe m' jede dieser Functionen der Gleichung (1.) Genüge leiste.

3) Hat man umgekehrt n linearunabhängige Functionen, welche der Gleichung (1.) in bestimmten Intervallen genügen, so kann es unter den Werthen m' keinen geben, für welchen sämtliche Functionen der Gleichung (1.) genügen.

4) Stellt man bei der Integration der Gleichung (1.) die Bedingung, daß das gesuchte Integral jener Gleichung auch noch für einen der Werthe m' genüge, so giebt es keine n , sondern höchstens $n-1$ linearunabhängige Functionen, welche diesen Bedingungen genügen, und ihre Anzahl kann durch weitere Bedingungen auch noch weiter reducirt werden.

Aus diesen Sätzen folgt, daß bei der Integration der Gleichung (1.) die erste Aufgabe darin besteht, die besonderen Werthe m' zu ermitteln. Dadurch zerfällt die Reihe der Werthe von m in Intervalle, zwischen denen die Werthe m' eingeschaltet sind; in jedem einzelnen Intervall muß die Integration besonders vorgenommen werden.

Hieran schließt sich der bekannte Satz, daß die Gleichung (1.) nie mehr als n linearunabhängige Integrale haben kann. Denn genügen die Functionen $f, f_1, \dots, f_n$ jener Gleichung für die Werthe (a.) so folgt $\Delta(m) = 0$, woraus sich weiter ergibt, daß diese Functionen für die Werthe (b.) linearabhängig sind. Bilden die Werthe (a.) eines der eben beschriebenen Intervalle, und sind in demselben die Functionen $f_1, f_2, \dots, f_n$ linearunabhängig, so sind $\Delta_0(m_0), \Delta_0(m_0 + 1), \dots, \Delta_0(m_0 + p + 1)$ von Null verschieden, und es besteht für die Werthe (b.) eine einzige lineare Relation:

$$A f(m) + A_1 f_1(m) + \dots + A_n f_n(m) = 0,$$

in welcher A von Null verschieden sein muß. Denn, wäre $A = 0$, so müßten wegen der Linearunabhängigkeit von $f_1, f_2, \dots, f_n$ auch die übrigen Coefficienten $A_1, A_2, \dots, A_n$ verschwinden. Es besteht also für sämtliche Werthe (b.) eine einzige Relation von der Form;

$$f(m) = a_1 f_1(m) + a_2 f_2(m) + \dots + a_n f_n(m).$$

Genügen die Functionen $f, f_1, \dots, f_n$ der Gleichung (1.) in mehreren aufeinanderfolgenden Intervallen, in denen $f_1, f_2, \dots, f_n$ linearunabhängig sind, so kann für einen beliebigen der zwischen jenen Intervallen eingeschalteten Werthe m' wenigstens eine der letzteren Functionen der Gleichung (1.) nicht Genüge leisten, also $\Delta(m')$ nicht gleich Null sein.

Sind daher zwischen zwei dieser Intervalle n oder weniger Werthe m' eingeschaltet, so muß die in dem einen stattfindende lineare Relation von der im andern bestehenden gänzlich verschieden sein (§. 2. 3).

4.

Die noch rückständige Untersuchung von Functionen, welche von einer stetigen Veränderlichen abhängen, erledigt sich aus dem Vorangehenden mittelst der identischen Gleichung:

$$(1.) \quad \Sigma \pm f(m) f_1(m+1) \dots f_n(m+n) = \Sigma \pm f(m) \Delta f_1(m) \dots \Delta^n f_n(m),$$

in welcher nach der gewöhnlichen Bezeichnung von Differenzen:

$$\Delta^i f_k(m) = f_k(m+i) - i f_k(m+i-1) + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2} f_k(m+i-2) - \dots + (-1)^i f_k(m)$$

ist. Dieselbe wird einfach dadurch bewiesen, daß man auf der rechten Seite für die Differenzen ihre Entwicklungen setzt, und dann durch Addition von Verticalreihen reducirt. Aus (1.) ergibt sich:

$$(2.) \quad \Delta_\mu(m) = \frac{\partial \Delta(m)}{\partial \Delta^n f_\mu(m)}.$$

Nun wird an den frühern Betrachtungen gar nichts geändert, wenn man überall statt der Argumente $m, m + \mu$ der einzelnen Functionen dasselbe Vielfache derselben $m\varepsilon, (m + \mu)\varepsilon$ einführt, also auch nicht, wenn man $m\varepsilon = x, \varepsilon = \varepsilon x$ setzt. Dann ist:

$$\begin{aligned} \Delta f_k(m\varepsilon) &= \partial x f_k^{(k)}(x), \\ \frac{\Delta(m\varepsilon)}{\partial x^{\frac{1}{2}n(n+1)}} &= \Sigma \pm f(x)f_1'(x) \dots f_n^{(n)}(x) = E(x), \\ \frac{\Delta_\mu(m\varepsilon)}{\partial x^{\frac{1}{2}n(n-1)}} &= \frac{\partial E(x)}{\partial f_\mu^{(n)}(x)} = E_\mu(x), \end{aligned}$$

u. s. w. Dies festgestellt, hat man folgende Sätze:

1) Verschwindet $E(x)$ für alle Werthe von $x = x_0$ bis $x = x_1$, wo $x_0 < x_1$ ist, so sind die Functionen $f(x), f_1(x), \dots, f_n(x)$ für diese nämlichen Werthe von x linearabhängig. Ist $\varphi(x) = 0$ eine der linearen Relationen, welche für $x = x_1$ und kleinere Werthe von x stattfinden, und construirt man die Curve $y = \varphi(x)$ für alle Werthe von x , die größer als x_1 sind, so hat diese Curve für $x = x_1$ mit der Abscissenaxe einen Contact von der n^{ten} Ordnung.

2) Sind zwei Intervalle, in denen $E(x)$ verschwindet, durch Werthe von x getrennt, für welche $E(x)$ von Null verschieden ist, so wird die Linearabhängigkeit der gegebenen Functionen in beiden Intervallen im Allgemeinen durch verschiedene Relationen ausgedrückt.

3) Damit gegebene $n + 1$ Functionen $f(x), f_1(x), \dots, f_n(x)$ für alle Werthe von x linearunabhängig sind, ist es erforderlich und hinreichend, daß ihre Determinante $E(x)$ für alle Werthe von x von Null verschieden ist.

Nennt man ferner ein Intervall, in welchem mindestens eine der Größen $E_\mu(x)$ von Null verschieden ist, ein Intervall der ersten Art, dagegen ein solches, in welchem sämtliche $E_\mu(x)$ verschwinden, eines von der zweiten Art, während $E(x) = 0$ vorausgesetzt wird, so hat man weiter:

4) Sind zwei Intervalle der ersten Art durch eines von der zweiten Art geschieden, so ist die lineare Relation, welche in dem einen stattfindet, nicht nothwendig auch im andern gültig.

5) Ist ein Intervall der ersten Art, welches sich von $x = x_0$ bis $x = x_1$ incl. ausdehnt, durch zwei andere von der zweiten Art begrenzt, so findet in ihm eine einzige lineare Relation $\varphi(x) = 0$ statt. Construirt man die Curve $y = \varphi(x)$ für die Werthe $x < x_0$ und $x > x_1$, so hat der erste Zweig für $x = x_0$ mit der Abscissenaxe einen Contact von der ersten, der andere für $x = x_1$ einen von der n^{ten} Ordnung. Nur

in besonderen Fällen kann in diesen Punkten der Contact auf eine höhere Ordnung steigen.

Ich wende mich zur Untersuchung der Differentialgleichung:

$$(3.) \quad A(x)f^{(n)}(x) + A_1(x)f^{(n-1)}(x) + \dots + A_n(x)f(x) = 0,$$

und betrachte statt derselben zunächst die Gleichung:

$$(4.) \quad A(m\varepsilon) \frac{\Delta^n f(m\varepsilon)}{\varepsilon^n} + A_1(m\varepsilon) \frac{\Delta^{n-1} f(m\varepsilon)}{\varepsilon^{n-1}} + \dots + A_n(m\varepsilon) f(m\varepsilon) = 0,$$

welche durch die Substitution:

$$A_n = \varepsilon^{n-s} \left\{ P_s + (n-s+1) P_{s-1} + \frac{(n-s+2)(n-s+1)}{1 \cdot 2} P_{s-2} + \dots \right. \\ \left. + \frac{n(n-1) \dots (n-s+1)}{1 \cdot 2 \dots s} P \right\}$$

oder:

$$P_s = \frac{A_s}{\varepsilon^{n-s}} - (n-s+1) \frac{A_{s-1}}{\varepsilon^{n-s+1}} + \frac{(n-s+2)(n-s+1)}{1 \cdot 2} \frac{A_{s-2}}{\varepsilon^{n-s+2}} - \dots \\ + (-1)^s \frac{n(n-1) \dots (n-s+1)}{1 \cdot 2 \dots s} A$$

die Form:

$$P(m\varepsilon)f((m+n)\varepsilon) + P_1(m\varepsilon)f((m+n-1)\varepsilon) + \dots + P_n(m\varepsilon)f(m\varepsilon) = 0$$

annimmt. Es läßt sich daher alles, was im vorigen Paragraph festgestellt wurde, auch auf vorstehende Gleichung (4.) übertragen, welches auch der Werth von ε sei, also auch dann, wenn ε unter einer beliebigen Grenze liegt.

Bezeichnet man daher durch m' die Werthe von m , für welche bei einem bestimmten, unter einer gegebenen Grenze liegenden ε eine der Größen

$$P(m\varepsilon) = \frac{A(m\varepsilon)}{\varepsilon^n},$$

$$P_n(m\varepsilon) = (-1)^n \left\{ \frac{A(m\varepsilon)}{\varepsilon^n} - \frac{A_1(m\varepsilon)}{\varepsilon^{n-1}} + \frac{A_2(m\varepsilon)}{\varepsilon^{n-2}} - \dots \right\},$$

oder beide zusammen im Vergleich zu allen übrigen Größen P , verschwinden, so sieht man augenblicklich, dafs, wenn jene Grenze immer kleiner genommen wird, diese Werthe sich auf diejenigen reduciren, für welche $P(m\varepsilon)$ verschwindet.

Macht man nun die erlaubte Voraussetzung, dafs es keinen endlichen Werth von x giebt, für welchen alle Coefficienten $A_s(x)$ verschwinden, oder für den einen oder mehrere derselben die Grenzen des Endlichen übersteigen, und bezeichnet durch x' diejenigen Werthe von x , für welche $A(x)$ verschwindet, so erhält man folgende Resultate:

unabhängig, also darf eines derselben für $x = -1$, und eines für $x = 1$ der Differentialgleichung nicht genügen. Dies ist in der That mit f_2 der Fall, da f_2 in der Nähe jener Werthe aufhört der Voraussetzung zu entsprechen, daß seine Aenderung der Aenderung von x proportional sei, also von der Herstellung der Differentialquotienten f' und f'' für jene Werthe keine Rede sein kann. — Untersucht man die Wärmebewegung in einer Vollkugel nach der Fourier'schen Theorie für den Fall, wo die Temperatur u nur von der Zeit t und dem aus dem Centrum genommenen Radiusvector x abhängt, so hat man für alle Punkte der Kugel ohne Ausnahme $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a^2}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right)$. Ist a eine willkürliche Constante, so kann man ein particulares Integral finden, wenn man noch die Gleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = -a^2 u$ hinzunimmt. Dann erhält man:

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{a^2} x u = 0,$$

und es ist ein solches Integral zu suchen, welches dieser Gleichung für den Punkt $x = 0$ genügt. Diese Gleichung hat die Integrale:

$$f_1 = c_1 \frac{\sin \frac{ax}{a}}{x}, \quad f_2 = c_2 \frac{\cos \frac{ax}{a}}{x},$$

von denen das Letztere zu verwerfen ist, weil es der Gleichung nicht für $x = 0$ genügt.

Aus art. 3 übertragen wir noch folgende Sätze. Hat man $n + 1$ Functionen $f, f_1, \dots, f_n$, welche der Gleichung (3.) für alle Werthe von $x = x_0$ bis $x = x_1$ genügen, so sind dieselben für die nämlichen Werthe von x linearabhängig. Sind die Functionen $f_1, f_2, \dots, f_n$ in jenem Intervall linearunabhängig, so besteht in demselben eine einzige Relation von der Form:

$$f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x).$$

Genügen diese nämlichen Functionen der Gleichung (3.) in zwei aufeinanderfolgenden Intervallen, zwischen denen ein Werth x' liegt, für den $A(x), A'(x), \dots, A^{(\mu)}(x)$ verschwinden, und ist $\mu \leq n$, so muß die in dem einen Intervall stattfindende lineare Relation von der im andern bestehenden gänzlich verschieden sein.

5.

Es ist hier am Orte, einige Eigenschaften der im Vorhergehenden betrachteten Determinanten anzuschließen. Es ist:

$$\Sigma \pm V U \cdot V_1 U_1' \cdot V_2 U_2'' \dots V_n U_n^{(n)} = V V_1 \dots V_n \Sigma \pm U U_1' U_2'' \dots U_n^{(n)},$$

und wenn man $U_{\nu+1}^{(\mu)} - U_{\nu}^{(\mu)} = \mathcal{A} U_{\nu}^{(\mu)}$, $\mathcal{A} U_{\nu+1}^{(\mu)} - \mathcal{A} U_{\nu}^{(\mu)} = \mathcal{A}^2 U_{\nu}^{(\mu)}$ etc. setzt:

$$\Sigma \pm U \mathcal{A} U' \mathcal{A}^2 U'' \dots \mathcal{A}^n U^{(n)} = \Sigma \pm U U_1' U_2'' \dots U_n^{(n)},$$

eine Formel, welche man auf dieselbe Art, wie die Gleichung (1.) art. 4 beweist. Die Verbindung dieser Gleichungen giebt:

$$(1.) \quad \Sigma \pm V U \cdot \mathcal{A}(V U') \cdot \mathcal{A}^2(V U'') \dots \mathcal{A}^n(V U^{(n)}) \\ = V V_1 V_2 \dots V_n \Sigma \pm U \mathcal{A} U' \mathcal{A}^2 U'' \dots \mathcal{A}^n U^{(n)}.$$

Setzt man in dieser $V = \frac{1}{U}$, $V_1 = \frac{1}{U_1}$, $\dots V_n = \frac{1}{U_n}$, so folgt:

$$\Sigma \pm U \mathcal{A} U' \mathcal{A}^2 U'' \dots \mathcal{A}^n U^{(n)} \\ = U U_1 U_2 \dots U_n \Sigma \pm \mathcal{A}\left(\frac{U'}{U}\right) \mathcal{A}^2\left(\frac{U''}{U}\right) \dots \mathcal{A}^n\left(\frac{U^{(n)}}{U}\right).$$

Wiederholt man diese Operation und setzt:

$$\mathcal{A}\left(\frac{U^{(\mu)}}{U}\right) = U^{\mu,0}, \quad \mathcal{A}\left(\frac{U^{\mu,0}}{U^{1,0}}\right) = U^{\mu,1}, \quad \mathcal{A}\left(\frac{U^{\mu,1}}{U^{2,1}}\right) = U^{\mu,2}, \text{ etc.,}$$

so ergibt sich schliesslich:

$$(2.) \quad \Sigma \pm U \mathcal{A} U' \mathcal{A}^2 U'' \dots \mathcal{A}^n U^{(n)} \\ = U U_1 \dots U_n \cdot U^{1,0} U_1^{1,0} \dots U_n^{1,0} \cdot U^{2,1} U_1^{2,1} \dots U_n^{2,1} \dots U^{n-1,n-2} U_1^{n-1,n-2} \dots U_n^{n-1,n-2},$$

wodurch die Determinante zur Linken als das Produkt von $\frac{n+1 \cdot n+2}{2}$ Factoren dargestellt ist. Setzt man $U_{\mu}^{(\nu)} = f_{\nu}(m\varepsilon + \mu\varepsilon)$, $V_{\mu} = \varphi(m\varepsilon + \mu\varepsilon)$, $m\varepsilon = x$ und $\varepsilon = \partial x$, so erhält man aus (1.), wenn man durch $\partial x^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ dividirt und zur Grenze übergeht:

$$(3.) \quad \Sigma \pm \varphi f \frac{\partial \varphi f_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \varphi f_2}{\partial x^2} \dots \frac{\partial^n \varphi f_n}{\partial x^n} = \varphi^{n+1} \Sigma \pm f \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} \dots \frac{\partial^n f_n}{\partial x^n}.$$

Bezeichnet man ferner die Grenze von $\frac{U^{\mu,\nu}}{\partial x}$ durch $f_{\mu,\nu}$, so dafs man hat:

$$f_{\mu,0} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_{\mu}}{f} \right), \quad f_{\mu,1} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_{\mu,0}}{f_{1,0}} \right), \quad f_{\mu,2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_{\mu,1}}{f_{2,1}} \right), \text{ etc.,}$$

so folgt aus (2.):

$$(4.) \quad \Sigma \pm f \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} \dots \frac{\partial^n f_n}{\partial x^n} = f^{n+1} f_{1,0} f_{2,1} \dots f_{n-1,n-2} f_{n,n-1}.$$

Die Gleichungen (3.) und (4.) sind zuerst von Herrn Hesse im 54^{sten} Bande dieses Journals pag. 249, 250 veröffentlicht worden.*)

*) Die in diesen beiden Gleichungen enthaltenen Ergebnisse waren bereits vor länger als einem Jahr von Herrn Christoffel gefunden und der Redaction dieses Journals mitgetheilt worden. Nur dem Umstande, dafs der Herr Verfasser dieser Arbeit einige Aenderungen in derselben vorzunehmen wünschte, ist es zuzuschreiben, dafs die nämlichen Ergebnisse, welche Herr Hesse in der citirten Abhandlung erhalten hat, von diesem früher veröffentlicht worden sind. B.

**Zusatz zu der vorstehenden Abhandlung über die lineare Abhängigkeit
von Functionen einer einzigen Veränderlichen.**

(Aus dem Nachlaß Christoffels.)

Durch eine gütige Mittheilung des Herrn Prof. Kummer wurde ich auf einen in der Anwendung der Lehre von der Linearabhängigkeit vorkommenden Fall aufmerksam gemacht, welcher sich mittelst der in obigen artt. gegebenen Regeln nicht erledigen läßt, nämlich den Fall, wo eine Function so beschaffen ist, daß sie einer gegebenen Differenzen- oder Differenzialgleichung nur innerhalb eines bestimmten Intervalls genügt. Die in art. 3. angestellte Untersuchung ist nämlich nur so weit geführt worden, daß sich ein Schluss auf das Verhalten solcher n Functionen ziehen ließe, welche der Gleichung 1. in allen p. 98 bezeichneten Intervallen genügen. Es ist daher auch wesentliche Bedingung zu den durch 1) 2) 3) 4) bezeichneten Sätzen, daß die Functionen $f_1, f_2, \dots, f_n$ der Gleichung 1. in mehr als einem Intervall genügen, d. h. daß die in Frage kommenden Werte m' zwischen Intervallen liegen, in denen der Gleichung 1. durch jene Functionen Genüge geschieht. Die analoge Bedingung gilt für die Sätze des art. 4.

Um den obigen Fall zu behandeln, zerlege ich nach Anleitung von pag. 98 die Reihe der Werthe m in Intervalle, zwischen denen die Werthe m' eingeschaltet sind, und sei die Reihe a. ein solches Intervall; dann ist also sowohl für $m = m_0 - 1$, als für $m = m_0 + p + 1$ eine der Functionen $P(m)$ und $P_n(m)$ oder es sind beide gleich Null. Man befindet sich demnach in dem pag. 97 erörterten Falle; die unter den dortigen Voraussetzungen bestimmten Functionen sind für die Werthe b. linearunabhängig. Handelt es sich nun darum, die Werthe dieser Functionen für $m = m_0 - 1$ und $m = m_0 + p + 1$ so zu bestimmen, daß der Gleichung 1. Genüge geschieht, so sind folgende Fälle zu unterscheiden.

- A. 1) $P_n(m_0 - 1) = 0, P(m_0 - 1) \leq 0$. Da $\mathcal{A}(m_0)$ von Null verschieden ist, so folgt aus 3. $\mathcal{A}_0(m_0 - 1) = \infty$, was unzulässig ist. Es kann also mindestens eine der Functionen $f_1, f_2, \dots, f_n$ nicht bis zu dem Werthe $m = m_0 - 1$ fortgesetzt werden.
- 2) $P_n(m_0 - 1) = 0, P(m_0 - 1) = 0$. Aus 2. folgt, daß $\mathcal{A}_{0,\mu}(m_0 - 1) = 0$ für $\mu = 1, 2, \dots, n$, also $\mathcal{A}_0(m_0) = 0$, was nicht der Fall ist. Also haben wir dasselbe Resultat wie in 1).
- 3) $P_n(m_0 - 1) \leq 0, P(m_0 - 1) = 0$. Aus 3. ergibt sich $\mathcal{A}_0(m_0 - 1) = 0$; folglich sind die Functionen $f_1, f_2, \dots, f_n$ linearabhängig für $m = m_0 - 1, m_0, \dots, m_0 + n - 2$.

- B. 1) $P(m_0 + p + 1) = 0$, $P_n(m_0 + p + 1) \leq 0$. Unter dieser Voraussetzung wird $\Delta_0(m_0 + p + 2) = \infty$, also kann zum wenigsten eine der Functionen $f_1, f_2, \dots, f_n$ nicht bis zum Werthe $m = m_0 + p + n + 1$ fortgesetzt werden.
- 2) $P(m_0 + p + 1) = 0$, $P_n(m_0 + p + 1) = 0$. Hieraus folgt $\Delta_{0,\mu}(m_0 + p + 1) = 0$ für $\mu = 1, 2, \dots, n$, also auch $\Delta_0(m_0 + p + 1) = 0$, was nicht der Fall ist, also gilt wieder das vorige Resultat.
- 3) $P(m_0 + p + 1) \leq 0$, $P_n(m_0 + p + 1) = 0$ liefert die Gleichung $\Delta_0(m_0 + p + 2) = 0$; die Functionen $f_1, f_2, \dots, f_n$ können daher bis zum Werthe $m = m_0 + p + 1$ fortgesetzt werden, sind aber für die Werthe $m = m_0 + p + 2, m_0 + p + 3, \dots, m_0 + p + n + 1$ linearabhängig.

Sollen demnach alle Functionen $f_1, f_2, \dots, f_n$ bis zu obigen Werthen mittelst der Gleichung 1. fortgesetzt werden, so ist dies nur in den Fällen A. 3) und B. 3) möglich, und es stellt sich die Thatsache heraus, daß die n Functionen für die n extremen Werthe des um die Werthe $m' = m_0 - 1$ und $m' = m_0 + p + n + 1$ vermehrten Intervalls ihre Linearunabhängigkeit nicht bewahren.

Um alle Fälle zu erledigen, welche sich bei der Fortsetzung obiger Functionen mittelst der Gleichung 1. darbieten können, wenn dieselbe überhaupt möglich ist, gehe ich zur Betrachtung der Werthe $m = m_0 - 2$, $m = m_0 + p + 2$ über. Es sind dabei folgende Fälle möglich.

- A. 3) $\alpha)$ $P_n(m_0 - 2) \leq 0$, $P(m_0 - 2) \leq 0$. Aus 3. folgt $\Delta_0(m_0 - 2) = 0$, die Functionen können also fortgesetzt werden, bleiben aber linearabhängig.
- $\beta)$ $P_n(m_0 - 2) = 0$, $P(m_0 - 2) \leq 0$. Aus 2. folgt, daß die Werthe der Functionen $f_1, f_2, \dots, f_n$ für $m = m_0 - 2$ willkürlich sind; es ist also gestattet, diese Werthe so auszuwählen, daß die Functionen für die Werthe $m_0 - 2, m_0 - 1, \dots, m_0 + n - 3$ linearunabhängig werden; jedenfalls wird aber die weitere Fortsetzung derselben von ihrem früheren Verlauf unabhängig, indem zu derselben die Angabe der zu $m = m_0 - 2$ gehörigen Functionalwerthe erforderlich ist.
- $\gamma)$ $P_n(m_0 - 2) \leq 0$, $P(m_0 - 2) = 0$; aus 3. ergibt sich $\Delta_0(m_0 - 2) = 0$, wie in $\alpha)$.
- $\delta)$ $P_n(m_0 - 2) = 0$, $P(m_0 - 2) = 0$; aus 2. folgt $\Delta_{0,\mu}(m_0 - 2) = 0$ für $\mu = 1, 2, \dots, n$, also ist wie in $\alpha)$ und $\gamma)$ $\Delta_0(m_0 - 2) = 0$.

- B. 3) α) $P(m_0 + p + 2) \leq 0$, $P_n(m_0 + p + 2) \leq 0$ giebt $\Delta_0(m_0 + p + 2) = 0$; die Functionen können also zum Werthe $m = m_0 + p + n + 2$ fortgesetzt werden, indem sie dabei linearabhängig bleiben.
- β) $P(m_0 + p + 2) = 0$, $P_n(m_0 + p + 2) \leq 0$; die Werthe der Functionen $f_1, f_2, \dots, f_n$ bleiben für $m = m_0 + p + n + 2$ willkürlich; sie können also so gewählt werden, daß die Functionen für $m = m_0 + p + 3, m_0 + p + 4, \dots, m_0 + p + n + 2$ linearunabhängig werden; jedenfalls wird aber die weitere Fortsetzung derselben von ihrem früheren Verlaufe unabhängig, indem zu derselben die durch die Gleichung 1. nicht vermittelte Angabe der zu $m = m_0 + p + n + 2$ gehörigen Functionalwerthe erforderlich ist.
- γ) $P(m_0 + p + 2) \leq 0$, $P_n(m_0 + p + 2) = 0$ giebt wie in α) $\Delta_0(m_0 + p + 2) = 0$.
- δ) $P(m_0 + p + 2) = 0$, $P_n(m_0 + p + 2) = 0$ giebt aus 2. für $\mu = 1, 2, \dots, n$ $\Delta_{0,\mu}(m_0 + p + 2) = 0$, also wie in α) und γ) $\Delta_0(m_0 + p + 2) = 0$.

Daraus ergibt sich nun folgender Satz:

Genügen n linearunabhängige Functionen $f_1, f_2, \dots, f_n$ der Gleichung 1. in einem bestimmten Intervalle a., welcher unten und oben durch die Werthe $m' = m_0 - 1$ und $m' = m_0 + p + 1$ begrenzt ist, so können nur dann alle Functionen mittelst der Gleichung 1. über das Intervall b. fortgesetzt werden, wenn $P_n(m_0 - 1)$ und $P(m_0 + p + 1)$ von Null verschieden ist; ist dies aber der Fall, so ist auch die weitere Fortsetzung der Functionen zulässig und richtet sich nach folgenden Gesetzen.

Ist unter den Zahlen $m = m_0 - 2, m_0 - 3, \dots, m_0 - q$ die Zahl $m_0 - q$ die einzige, welche der Bedingung (A. 3) β) $P_n(m) = 0$ $P(m) \leq 0$ genügt, so sind die Functionen $f_1, f_2, \dots, f_n$ für die Werthe $m_0 - q + 1, m_0 - q + 2, \dots, m_0 + n - 2$ linearabhängig. Zur Bestimmung der für $m = m_0 - q$ und darüber hinaus stattfindenden Functionalwerthe reicht die Angabe der Werthe, welche die Functionen für $m = m_0, m_0 + 1, \dots, m_0 + n - 1$ haben, nicht mehr aus, sondern es müssen mindestens die zu $m = m_0 - q$ gehörigen Werthe derselben unmittelbar gegeben werden; dies kann aber so geschehen, daß die Functionen von $m_0 - q + n - 1$ abwärts linearunabhängig werden, da wegen der willkürlichen Functionalwerthe, welche bei $m_0 - q$ stattfinden, beliebig viele solche Fortsetzungen erhalten werden können.

Ist unter den Zahlen $m = m_0 + p + 2, m_0 + p + 3, \dots, m_0 + p + r + 2$ die Zahl $m_0 + p + r + 2$ die einzige, welche der Bedingung (B. 3) β)

$P(m) = 0$, $P_*(m) \leq 0$ genügt, so sind die Functionen $f_1, f_2, \dots, f_n$ für die Werthe $m_0 + p + 2, m_0 + p + 3, \dots, m_0 + p + r + n + 1$ linearabhängig. Zur Bestimmung der für $m = m_0 + p + r + 2$ und darüber hinaus stattfindenden Functionalwerthe reicht die Angabe der Werthe, welche die Functionen für $m = m_0, m_0 + 1, \dots, m_0 + n - 1$ haben, nicht mehr aus, sondern es müssen mindestens die zu $m = m_0 + p + r + 2$ gehörigen Werthe derselben unmittelbar gegeben werden; dies kann aber so geschehen, daß die Functionen von $m_0 + p + r + 3$ aufwärts linearunabhängig werden. Jedenfalls können aber die Werthe, welche man hierdurch für die Functionen $f_1, f_2, \dots, f_n$ von $m_0 + p + r + 2$ an erhält, nicht mehr als die Fortsetzung des früheren Verlaufs dieser Functionen betrachtet werden, da wegen der bei $m_0 + p + r + 2$ stattfindenden willkürlichen Functionalwerthe beliebig viele solcher Fortsetzungen erhalten werden können.

Was nun den Übergang von diesen Betrachtungen zu denen des art. 4 betrifft, so ist darüber folgendes zu bemerken. Genügen n linearunabhängige Functionen $f_1, f_2, \dots, f_n$ der Differenzialgleichung 3. für alle zwischen x_0' und x_1' liegenden Werthe von x , während x_0' und x_1' den Coefficienten $A(x)$ zum Verschwinden bringen, so kann es sich ereignen, daß sie der Gleichung auch noch für einen dieser Werthe oder für beide genügen; jedenfalls hat man dann für diesen extremen Werth von x die Gleichung $a_1 f_1^{(\mu)} + a_2 f_2^{(\mu)} + \dots + a_n f_n^{(\mu)} = 0$, $\mu = 1, 2, \dots, n$. Aber die Bedingungen für das Eintreten dieses Falles lassen sich nur aus einer genaueren Untersuchung der Gleichungen (pag. 101) $P(m\varepsilon) = 0$, $P_*(m\varepsilon) = 0$ unter Anwendung obiger Sätze herleiten und sind der allgemeinen Untersuchung nicht zugänglich.

IV.

Zur Abhandlung von Heine: „Ueber Zähler und Nenner der Näherungswerthe von Kettenbrüchen“ im 57. Band des Journals für die reine und angewandte Mathematik.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 58, 1861, S. 90—92.)

Herr Heine hat im § 7 der genannten Abhandlung die Zähler und Nenner der Näherungswerthe des Kettenbruchs für

$$(1.) \quad u = \frac{F\left(k, k, \gamma + 1, \frac{x}{k^2}\right)}{F\left(k, k, \gamma, \frac{x}{k^2}\right)}, \quad k = \infty$$

gefunden, und zwar erfordert der dort eingeschlagene Weg die gesonderte Bestimmung der beiden auf einander folgenden Zähler P_{2m} , P_{2m+1} und der entsprechenden Nenner Q_{2m} , Q_{2m+1} . Es dürfte von einigem Interesse sein, daß diese vier Functionen sämmtlich in einer einzigen Form enthalten sind.

Bestimmt man nämlich zwei Reihen von Functionen V und W durch die Gleichungen

$$(2.) \quad \begin{cases} V_0 = 1, & V_1 = \gamma + 1, & V_2 = (\gamma + 2) V_1 + x, & V_3 = (\gamma + 3) V_2 + x V_1, & \dots \\ & & V_{m+3} = (\gamma + m + 3) V_{m+2} + x V_{m+1}, \\ W_0 = \gamma & & W_1 = (\gamma + 1) W_0 + x, & W_2 = (\gamma + 2) W_1 + x W_0, \dots \\ & & W_{m+2} = (\gamma + m + 2) W_{m+1} + x W_m, \end{cases}$$

so ist

$$\frac{V_m}{W_m} = \frac{1}{\gamma + \frac{x}{\gamma + 1 + \dots + \frac{x}{\gamma + m}}} = \left[\begin{matrix} 1, & x, & x, & \dots & x \\ \gamma, & \gamma + 1, & \gamma + 2, & & \gamma + m \end{matrix} \right],$$

mithin $\frac{V_m}{W_m}$ der $m + 1^{\text{te}}$ Näherungswerth des Kettenbruchs für $\frac{u}{\gamma}$. Folglich können γV_m und W_m von P_m und Q_m nur durch ein und denselben constanten Factor verschieden sein.

Vergleicht man in (2.) die über einander stehenden Gleichungen, so zeigt sich sofort, daß, wenn

$$(3.) \quad V_m = \varphi(x, \gamma + 1, m)$$

gesetzt wird, zugleich

$$(4.) \quad W_m = \varphi(x, \gamma, m + 1)$$

sein muß; damit ist die oben aufgestellte Behauptung erwiesen. Es ergibt sich

$$(5.) \quad \varphi(x, \gamma, m) = \Sigma(m-s) \cdot \frac{\Gamma(\gamma+m-s)}{\Gamma(\gamma+s)} x^s,$$

wo s die Werthe $0, 1, 2, \dots$ bis zur größten in $\frac{1}{2}m$ enthaltenen ganzen Zahl inclusive durchläuft, und statt des Quotienten der beiden Γ die entsprechende Facultät zu setzen ist. Mittels dieser Bezeichnung wird nun

$$(6.) \quad \begin{cases} (\gamma+1)(\gamma+2)\cdots(\gamma+2m-1) P_{2m} = \varphi(x, \gamma+1, 2m-1), \\ (\gamma+1)(\gamma+2)\cdots(\gamma+2m) P_{2m+1} = \varphi(x, \gamma+1, 2m), \\ \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\cdots(\gamma+2m-1) Q_{2m} = \varphi(x, \gamma, 2m), \\ \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\cdots(\gamma+2m) Q_{2m+1} = \varphi(x, \gamma, 2m+1). \end{cases}$$

Der Werth von u läßt sich stets in ausgeführter Form angeben, so oft γ die Hälfte einer positiven und ungeraden Zahl ist. Für $\gamma = \frac{1}{2}$ findet man denselben in der Abhandlung des Herrn Heine; ist

$$(7.) \quad \gamma = \frac{1}{2}(2n+3), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

so setze man

$$(8.) \quad x = \frac{1}{2}y^2,$$

und

$$(9.) \quad \mathfrak{A}_n = \frac{1}{2}e^{-y} \frac{\partial^{n+1} e^y}{\partial x^{n+1}}, \quad \mathfrak{B}_n = -\frac{1}{2}e^y \frac{\partial^{n+1} e^{-y}}{\partial x^{n+1}},$$

oder in anderer Form

$$(10.) \quad \begin{cases} \mathfrak{A}_n = \frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{1 - \frac{2y}{1} + \frac{(2y)^2}{1 \cdot 2} - \cdots \pm \frac{(2y)^n}{1 \cdot 2 \cdots n}}{y^{n+1}}, \\ \mathfrak{B}_n = \frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{1 + \frac{2y}{1} + \frac{(2y)^2}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{(2y)^n}{1 \cdot 2 \cdots n}}{y^{n+1}}, \end{cases}$$

dann wird

$$(11.) \quad \frac{u}{\gamma} = \left[\begin{matrix} 1, & x, & x, & \dots \\ \gamma, & \gamma+1, & \gamma+2, & \end{matrix} \right] = \frac{e^y \mathfrak{A}_{n+1} - e^{-y} \mathfrak{B}_{n+1}}{e^y \mathfrak{A}_n - e^{-y} \mathfrak{B}_n},$$

und nach dem Früheren ist hiervon der $m+1^{\text{te}}$ Näherungswerth

$$(12.) \quad \frac{V_m}{W_m} = \frac{\varphi(x, \frac{1}{2}(2n+5), m)}{\varphi(x, \frac{1}{2}(2n+3), m+1)},$$

welcher sich auch in die zu (11.) ganz analoge Form

$$\frac{\mathfrak{B}_{m+n+2} \mathfrak{A}_{n+1} - \mathfrak{A}_{m+n+2} \mathfrak{B}_{n+1}}{\mathfrak{B}_{m+n+2} \mathfrak{A}_n - \mathfrak{A}_{m+n+2} \mathfrak{B}_n}$$

bringen läßt.

Die Functionen φ scheinen zu einer größeren Rolle bestimmt zu sein, als sich aus ihrer Beziehung zur hypergeometrischen Reihe vermuthen läßt. Sie stehen nämlich mit den Integralen der Riccatischen Gleichung in einem so genauen Zusammenhange, daß man fast in allen Untersuchungen auf sie geführt wird, welche ein näheres Eingehen auf die Natur dieser Integrale erfordern.

Berlin, im März 1860.

V.

Über die Dispersion des Lichts.

(Monatsberichte der Kgl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1861, S. 906—921 und 997—999; wieder abgedruckt in Annalen der Physik und Chemie Bd. 117, 1862, S. 27—45.)

Seit den Untersuchungen Cauchy's über die Dispersion des Lichts hat man sich vielfach mit diesem Problem beschäftigt, theils um nachzuweisen, daß die Resultate des *Mémoire sur la dispersion*, in Folge der ihnen zu Grunde gelegten Voraussetzungen von der Dispersion keine Rechenschaft zu geben vermögen, theils um dieselben von andern Gesichtspunkten aus neu zu begründen oder durch andere zu ersetzen. Der hauptsächlichste Einwurf, den man gegen Cauchy's Theorie erheben kann, bezieht sich darauf, daß in derselben eine genügende Erörterung desjenigen Punktes vermißt wird, auf den es vor allem ankommt, nämlich der Frage, ob die Constanten, vermöge deren die Wellenlänge in den Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eingeht, auch solcher Werthe fähig sind, daß dadurch eine wahrnehmbare Abhängigkeit zwischen jenen Größen begründet wird; derselbe trifft in diesem Sinne auch alle später über diesen Gegenstand veröffentlichten Arbeiten.

Die genauere Untersuchung dieser Frage, welche sich in ähnlicher Form auch bei andern Problemen der Molekulartheorie wiederholt, hat gezeigt, daß die Voraussetzungen der §§ 1. 2. 3. des *Mém. s. l. disp.*, auf gebührende Grenzen eingeschränkt, die Dispersion des Lichtes in isotropen Mittein, mit Ausschluss bestimmter Grenzfälle, vollständig erklären, und zwar durch eine Formel, welche alle bisher aufgestellten an Einfachheit wesentlich übertrifft. Nennt man nämlich die Wellenlänge eines Strahls im dispersionsfreien Raume und seinen Brechungsindex für den Übergang in ein anderes isotropes Mittel die Elemente dieses Strahls, so besteht die von mir gefundene Dispersionsformel in einer Relation zwischen den Elementen zweier Strahlen, von denen der eine willkürlich, der andere physikalisch definirt und für die Natur der

brechenden Substanz charakteristisch ist; während die Annäherungsformeln von Cauchy, Baden-Powell, Broch und Redtenbacher ihrer Natur nach als Relationen zwischen den Elementen von drei, die letztere von vier willkürlichen Strahlen aufgefaßt werden müssen.

Das Mémoire s. l. disp., an welches hier angeknüpft wird, handelt von den kleinen Schwingungen, welche ein sich selbst überlassenes System materieller Punkte um eine stabile Gleichgewichtslage herum ausführt. In der letztern sind die Punkte retikular geordnet; ihre Entfernungen von einander halten sich sowohl vor, als während der Bewegung über einer endlichen, wenn auch sehr kleinen Grenze ρ_0 . Nennt man m, m' die als einander gleich vorausgesetzten Massen zweier Punkte, r ihre gegenseitige Entfernung, so wirkt zwischen ihnen die Anziehung $mm'f(r)$, welche nebst ihrer ersten Derivirten $mm'f'(r)$ die Eigenschaft hat, während r von ρ_0 bis zu einem andern endlichen, jedoch sehr kleinen Werthe ρ wächst, nie unendlich oder unstetig zu werden, und für gröfsere Werthe von r zu verschwinden. Diese Entfernung ρ wird der Radius der Wirkungssphäre genannt.

Hierzu wird die einschränkende Bedingung gefügt, dafs die von verschiedenen lokalen Störungen des Gleichgewichts herrührenden Erschütterungen sich überall, wo sie einander begegnen, ohne merkbare gegenseitige Störung superponiren. Reduzirt man dem entsprechend die beschleunigenden Kräfte auf ihre linearen Theile, so findet sich, dafs dies nur so lange geschehen kann, als die ursprüngliche gegenseitige Lage von Punkten, die mit mefsbarer Stärke auf einander wirken, nur sehr wenig geändert ist. Bei Wellenbewegungen lassen sich zwei Grenzfälle nachweisen, in denen diese Bedingung nicht erfüllt ist; man gelangt zu denselben, bei constanter Wellenlänge durch Vergröfserung der Amplitude, und bei constanter Amplitude durch Verringerung der Wellenlänge. Die Gesetze, nach denen die Bewegung in diesen Fällen verläuft, können sich demnach aus der Untersuchung der superponirbaren kleinen Schwingungen nicht ergeben, da sie bei derselben von vornherein ausgeschlossen sind.

Dies vorausgeschickt, findet Cauchy folgendes Resultat. Ist das oben bezeichnete System isotrop, so besteht zwischen der Schwingungsdauer $t = \frac{2\pi}{s}$ ebener Wellen, in denen die Schwingungen transversal sind, und ihrer Wellenlänge $l = \frac{2\pi}{k}$ eine Relation von der Form:

$$1. \quad s^3 = a_1 k^3 + a_2 k^4 + a_3 k^5 + \dots;$$

hier sind $a_1, a_2, a_3, \dots$ constante Gröfsen, welche von der Einwirkung

abhängen, die irgend ein Punkt O des Systems während des Gleichgewichts von Seiten der übrigen, in seiner Wirkungssphäre befindlichen Punkte erfährt; ist m einer der letztern, und r seine Entfernung von O , so hat man (§ 9.)

$$2. \quad a_{i+1} = \frac{(-1)^i}{\Pi(2i+3)} \left(A_i + \frac{1}{2i+5} B_i \right),$$

$$A_i = \sum m f(r) r^{2i+1}, \quad B_i = \sum m (r f'(r) - f(r)) r^{2i+1}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Wellen ist $\frac{l}{t} = \frac{s}{k}$, folglich, so lange nicht alle Constanten $a_1, a_2, \dots$ verschwinden, für Wellen von verschiedener Länge verschieden.

Denkt man sich jetzt zwei isotrope Medien μ und m , welche sich längs einer Ebene E berühren, und von denen das erstere außerdem die Eigenschaft hat, Wellen von jeder Länge mit der nämlichen Geschwindigkeit fortzupflanzen, so besteht die Aufgabe der Dispersionstheorie darin, den Brechungsindex n für den Übergang eines Wellensystems aus μ nach m als Funktion derjenigen Größen darzustellen, durch welche die Bewegung dieser Wellen in μ bestimmt wird.

Bezeichnet man die Werthe, welche die oben eingeführten Größen in μ annehmen, durch die entsprechenden griechischen Buchstaben, so hat man $\sigma^2 = \alpha_1 x^2$, $\sigma = \frac{2\pi}{\tau}$, $x = \frac{2\pi}{\lambda}$. Da ferner die auf die Ebene E bezüglichen Bedingungen in linearen Gleichungen zwischen einer endlichen Anzahl von rechts und links dieser Ebene stattfindenden Verrückungen und Beschleunigungen bestehen, so erhält man die bekannten Relationen $\lambda = n l$, $\tau = t$. Hieraus ergibt sich $\sigma = s$, $k = \frac{2\pi n}{\lambda}$, $x = \frac{2\pi}{\lambda}$, also findet zwischen n und λ die Gleichung

$$3. \quad \alpha_1 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 = a_1 \left(\frac{2\pi n}{\lambda} \right)^2 + a_2 \left(\frac{2\pi n}{\lambda} \right)^4 + a_3 \left(\frac{2\pi n}{\lambda} \right)^6 + \dots$$

statt, aus welcher n zu bestimmen ist.

Zu dem Ende nimmt Cauchy an, daß die Quotienten $\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1}, \dots$ sehr kleine Größen von der Ordnung ϱ^2 sind, und kehrt nun die Reihe 1. um, woraus für k^2 ein Ausdruck von der Form $k^2 = b_1 s^2 + b_2 s^4 + b_3 s^6 + \dots$ folgt; dieselbe Operation, auf 3. angewandt, giebt $n^2 = b_1 \alpha_1 + \frac{(2\pi)^2 b_2 \alpha_1^2}{\lambda^2} + \frac{(2\pi)^4 b_3 \alpha_1^3}{\lambda^4} + \dots$; es folgt aus jener Voraussetzung, daß auch in dieser Reihe jeder Coefficient sich im Vergleich zum vorangehenden wie eine GröÙe von der Ordnung ϱ^2 verhalten muß. Die numerische Verifikation zeigt, daß diese Voraussetzung, welche schon im Prinzip den Zweck der Untersuchung in Frage stellt, keineswegs

mit der Erfahrung übereinstimmt, indem selbst in solchen Fällen, wo n sich nur sehr langsam mit λ ändert, die angenommene rapide Abnahme der Coëffizienten nicht eintritt. Auch ist dieselbe keine nothwendige Folge der frühern Voraussetzungen; vielmehr läßt sich leicht zeigen, daß durch geeignete Bestimmungen über die Funktion $f(r)$ den Constanten a_1 und a_2 jeder endliche Werth angewiesen werden kann, während alsdann bei den folgenden Coëffizienten jene Größenordnung allerdings stattfindet.

Sei p die Anzahl der verschiedenen Werthe von r , denen im Innern der zu O gehörigen Wirkungssphäre Punkte des Systems entsprechen, so ist p eine endliche, durch den Werth von ϱ völlig bestimmte Zahl. Jede der Summen A_i enthält dann die nämlichen p Werthe der Funktion $f(r)$, über welche man, mit Berücksichtigung der über diese Funktion bereits getroffenen Bestimmungen, frei verfügen kann. Betrachtet man diese Werthe von $f(r)$ als Unbekannte, so fragt es sich, ob man in 2. die Werthe $A_0, A_1, \dots, A_{p-1}$ als willkürlich gegeben betrachten darf, oder ob die der Funktion $f(r)$ auferlegten Bedingungen eine Beschränkung in der Auswahl dieser Werthe nach sich ziehen.

Die Werthe von $f(r)$ müssen 1) mit der Stabilität des Systems vereinbar sein, 2) den Bedingungen der Isotropie genügen, und 3) darf keiner derselben unendlich groß sein. Die erste Bedingung hat auf die augenblickliche Untersuchung keinen Einfluß, da sie nur das Zeichen, nicht den absoluten Werth eines Ausdrucks bestimmt, welcher von den in Frage kommenden Werthen von $f(r)$ und $f'(r)$ abhängt; die Isotropiebedingungen bleiben vorläufig ganz bei Seite, da sie erst durch die folgenden Betrachtungen auf ihren gebührenden Umfang eingeschränkt werden müssen.

Bezeichnet man jetzt die in A_i einzusetzenden Werthe von r durch r_i oder s_i , jenachdem ihnen ein positiver oder negativer Werth von $f(r)$ entspricht, und setzt: $\sum m f(r_i) r_i^{2i+1} = R_i$, $-\sum m f(s_i) s_i^{2i+1} = R'_i$, so ist A_i als Summe einer endlichen Anzahl von Gliedern gleich $R_i - R'_i$; ferner lassen sich zwischen ϱ_0 und ϱ zwei Werthe r_{1i} und s_{1i} so auswählen, daß $R_i = r_{1i}^{2i} R_0$, $R'_i = s_{1i}^{2i} R'_0$ wird; daraus folgt

$$A_0 = R_0 - R'_0, A_1 = r_{11}^2 R_0 - s_{11}^2 R'_0, \dots A_i = r_{1i}^{2i} R_0 - s_{1i}^{2i} R'_0.$$

Wenn nun $f(r)$ bei der Summation sein Zeichen nicht wechselt, so ist eine der Größen R_0, R'_0 gleich Null, also findet dann, wenigstens bei den Constanten A_i , die von Cauchy angenommene Größenordnung statt. Werden dagegen Zeichenwechsel zugelassen, so steht nichts im Wege, der Funktion $f(r)$ einen solchen Verlauf zu geben, daß r_{1i}^{2i} von

s_{11}^2 um irgend eine endliche GröÙe von der Ordnung ϱ^3 verschieden ist; dann erhält man:

$$R_0 = \frac{A_1 - s_{11}^2 A_0}{r_{11}^2 - s_{11}^2}, \quad R_0' = \frac{A_1 - r_{11}^2 A_0}{r_{11}^2 - s_{11}^2},$$

$$A_i = \frac{r_{11}^2 s_{11}^2 - s_{11}^4}{r_{11}^2 - s_{11}^2} A_1 - \frac{r_{11}^2 s_{11}^2 - s_{11}^4 r_{11}^2}{r_{11}^2 - s_{11}^2} A_0.$$

Ertheilt man jetzt den GröÙen A_1 und A_0 endliche Werthe von derselben Ordnung, so werden R_0 und R_0' endlich und im Vergleich zu ihnen von der Ordnung $\frac{1}{\varrho^3}$, was mit keiner frühern Bestimmung im Widerspruche steht; dagegen wird der erste Theil von A_i , wenn $i \geq 2$ ist, von der Ordnung ϱ^{2i-2} , der andere von der Ordnung ϱ^{2i} , also tritt hier der oben erwähnte Umstand wirklich ein.

Durch Häufung der Bedingungen, denen $f(r)$ unterworfen ist, kann man bewirken, daß $r_{11}^2 = s_{11}^2$ wird. Ich lasse diesen Fall im Folgenden unberücksichtigt, da es nicht der Natur der Sache angemessen zu sein scheint, die Schlusresultate, aus denen, wie es bei Untersuchungen dieser Art stets der Fall ist, jede Spur vom besondern Charakter der Funktion $f(r)$ herausfällt, an spezielle Voraussetzungen über den Verlauf derselben zu binden.

Da dieselbe Betrachtung auf B_i anwendbar ist, so folgt, daß in jeder der beiden Reihen $A_0, A_1, A_2 \dots$ und $B_0, B_1, B_2, \dots$ die zwei ersten Glieder endlicher Werthe von derselben Ordnung fähig sind, dagegen das dritte und jedes folgende Glied im Vergleich zum vorangehenden eine GröÙe von der Ordnung ϱ^3 ist. Dasselbe gilt daher auch von der Reihe $a_1, a_2, a_3, \dots$

So lange nun in der Gleichung (3.) $\frac{\lambda}{n} = l$ so klein ist, daß alle Glieder der rechten Seite einen merklichen Einfluß auf ihren Werth äußern, findet offenbar kein einfacher Zusammenhang zwischen n und λ statt; ich beschränke daher die Untersuchung auf den Fall, wo l zum Radius der Wirkungssphäre in einem solchen Verhältnisse steht, daß die Glieder, deren Coëffizienten von der Ordnung $\varrho^2, \varrho^4, \varrho^6, \dots$ sind, keinen wesentlichen Beitrag zum vollen Werthe der rechten Seite mehr liefern. Es muß dabei der Erfahrung überlassen werden, zu entscheiden, bis zu welchen Werthen von l alle nach dem zweiten folgenden Glieder vernachlässigt werden dürfen, während es ganz dahin gestellt bleibt, wie groß oder klein man sich den Radius der Wirkungssphäre zu denken hat. Abgesehen von allen andern Bedingungen wird also die Formel

$$4. \quad a_1 = a_1 n^2 + (2\pi)^2 a_2 \frac{n^4}{\lambda^2}$$

für hinlänglich große Werthe von l den Voraussetzungen der Theorie genau entsprechen, dagegen bei abnehmendem l einmal aufhören, die Resultate derselben darzustellen.

Dies festgestellt, denke man sich durch O eine Gerade g von beliebiger Richtung gezogen, und setze, unter (rg) den Winkel zwischen g und r verstanden,

$$\mathfrak{A}_i = \Sigma m f(r) r^{2i+1} \cos^{2i+1}(rg)$$

$$\mathfrak{B}_i = \Sigma m (rf'(r) - f(r)) r^{2i+1} \cos^{2i+1}(rg);$$

dann bestehen nach Cauchy (man vergl. § 3. 43.—46. mit § 9. 10.—11.) die Bedingungen für die Isotropie darin, daß für $i = 0, 1, 2, \dots$ bei jeder beliebigen Richtung von g

$$5. \quad \mathfrak{A}_i = \frac{1}{2i+3} A_i, \quad \mathfrak{B}_i = \frac{1}{2i+5} B_i$$

sein muß.

Will man nun die Bedingung der Isotropie unbeschränkt aufrecht erhalten, so hat man zu untersuchen, ob dieser unendlichen Zahl von Bedingungsgleichungen bei einer endlichen Zahl von Werthen der Funktionen $f(r)$ und $rf'(r) - f(r)$ durch eine passende Anordnung des Systems Genüge geschehen könne, d. h. ob es möglich ist, eine solche Einrichtung des retikularen Punktsystems anzugeben, daß diese Bedingungsgleichungen sich von selbst auf eine endliche Zahl reduzieren. Dieser Untersuchung kann man sich aber ganz überheben, wenn man die Betrachtung so einschränkt, wie es vorhin geschehen ist. In der That läßt sich nachweisen, daß bei den vorausgesetzten Werthen von l die Gleichung 4., oder was auf dasselbe hinauskommt, die Gleichung $s^2 = a_1 k^2 + a_2 k^4$ stattfindet, sobald nur die Gleichungen 5. für $i = 0$ und $i = 1$ erfüllt sind, während es ganz gleichgültig ist, ob dies auch mit den folgenden der Fall ist.

Die Größe s^2 ist im Allgemeinen durch eine kubische Gleichung bestimmt, deren Coefficienten von den beiden Funktionen

$$T = \frac{1}{\Pi(2)} \mathfrak{A}_0 k^2 - \frac{1}{\Pi(4)} \mathfrak{A}_1 k^4 + \frac{1}{\Pi(6)} \mathfrak{A}_2 k^6 - \dots$$

$$V - \mathfrak{B}_{-2} = \frac{1}{\Pi(4)} \mathfrak{B}_0 k^4 - \frac{1}{\Pi(6)} \mathfrak{B}_1 k^6 + \frac{1}{\Pi(8)} \mathfrak{B}_2 k^8 - \dots$$

abhängen, und zwar ist für den Fall, daß alle Isotropiebedingungen erfüllt sind, $s^2 = T + \frac{dV}{kdk}$. Da $\mathfrak{A}_i$ sich in die Form $r_i^{2i} \cos^{2i+1} \varphi_i R_0 - s_i^{2i} \cos^{2i+1} \psi_i R_0'$ bringen läßt, und ähnliches von $\mathfrak{B}_i$ gilt, so sind $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{B}_i$ von derselben Ordnung, wie A_i und B_i . Reduzirt man daher vorstehende Reihen auf ihre beiden ersten Glieder, so wird unter der Voraussetzung, daß die Gleichungen 5. für $i = 0$ und $i = 1$ erfüllt sind,

$$T = \frac{1}{\Pi(3)} A_0 k^3 - \frac{1}{\Pi(5)} A_1 k^4, \quad V = \mathfrak{B}_{-2} + \frac{1}{\Pi(5)} B_0 k^4 - \frac{1}{\Pi(7)} B_1 k^6;$$

daraus ergibt sich für s^2 die nämliche kubische Gleichung, als ob in dem Falle der unbeschränkten Isotropie die Ausdrücke für T und V ebenfalls auf ihre ersten Glieder reduziert worden wären; man erhält also, wie vorhin, $s^2 = a_1 k^2 + a_2 k^4$.

Drückt man in den Gleichungen $\mathfrak{A}_0 = \frac{1}{3} A_0$, $\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{5} A_1$, $\mathfrak{B}_0 = \frac{1}{5} B_0$, $\mathfrak{B}_1 = \frac{1}{7} B_1$, auf welche sich in Folge der über l gemachten Voraussetzung die Isotropiebedingungen reduzieren, $\cos(rg)$ durch die Cosinus der Winkel aus, welche r und g mit drei rechtwinkligen Axen bilden, so liefern dieselben wegen der willkürlichen Richtung von g beziehungsweise 6, 15, 15, 28 Relationen, von denen jedesmal eine aus den übrigen folgt; die Zahl der von einander unabhängigen Bedingungen ist demnach 60. Nichts hindert, die Anzahl p der verschiedenen Werthe von r so groß vorauszusetzen, daß diese linearen Gleichungen neben den beiden, durch welche die Werthe von $f(r)$ und $f'(r)$ mit den Größen a_1 und a_2 verknüpft sind, befriedigt werden können.

Die einzige Beschränkung, der man bei der Auswahl der Werthe von a_1 und a_2 unterworfen ist, rührt von den Stabilitätsbedingungen her, und besteht darin, daß s^2 positiv und von Null verschieden sein muß. Diese Bedingung ist bei der gegenwärtigen Untersuchung erfüllt, da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen in μ , nämlich $\sqrt{a_1}$, und umsomehr $s = \sigma$ als sehr beträchtlich vorausgesetzt wird, und die Größen a_1 und a_2 demgemäß bestimmt werden.

Wendet man die Gleichung 4. auf die Dispersion des Lichtes an, so kann man auf Grund der Erfahrung, daß den kleinern Wellenlängen die größern Brechungsindices entsprechen, das Vorzeichen der Constanten $\frac{a_1}{a_1}$ und $\frac{a_2}{a_1}$ bestimmen; in der That folgt aus der ersten der Gleichungen

$$\frac{1}{n^2} = \frac{a_1}{a_1} + (2\pi)^2 \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{n^2}{\lambda^2}, \quad 1 = \frac{a_1}{a_1} n^2 + (2\pi)^2 \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{n^4}{\lambda^2},$$

daß $\frac{a_2}{a_1}$ negativ, aus der andern, daß $\frac{a_1}{a_1}$ positiv sein muß. Die erstere zeigt außerdem, daß neben der mit wachsendem λ abnehmenden Wurzel noch eine zweite vorhanden ist, welche mit λ zugleich und zwar so wächst, daß ihr Verhältniß zu λ sich einer von Null verschiedenen festen Grenze nähert. In Folge dieser Zeichenbestimmung kann man zwei positive Größen n_0 und λ_0 so wählen, daß $\frac{a_1}{a_1} = \frac{2}{n_0^2}$, $(2\pi)^2 \frac{a_2}{a_1} = -\frac{2\lambda_0^2}{n_0^2}$ wird; dadurch nimmt die Gleichung 4. folgende Form an:

$$6. \quad \left(\frac{n_0}{n}\right)^4 - 2\left(\frac{n_0}{n}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 = 0.$$

Von den Wurzeln dieser Gleichung müssen drei verworfen werden, nämlich zwei wegen ihres Vorzeichens, die dritte aus dem doppelten Grunde, weil sie gegen die Voraussetzung mit λ zugleich wächst, und weil sie für den gebrochenen Strahl eine so kleine Wellenlänge liefern würde, daß die in 3. vorgenommene Vernachlässigung mindestens nicht als zulässig nachgewiesen werden kann.

Die einzige Wurzel, welche allen Voraussetzungen nachweisbar genügt, ist die folgende:

$$7. \quad n = \frac{n_0 \sqrt{2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda}\right)} + \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right)}},$$

wo alle Radikale positiv zu nehmen sind; dieselbe ist für $\lambda > \lambda_0$ reell, für $\lambda < \lambda_0$ complex.*)

Aus dem Früheren folgt, daß diese Formel ihre Gültigkeit verliert, sobald λ unter eine, von der Erfahrung festzustellende Grenze sinkt. Läßt man diese Einschränkung für einen Augenblick unberücksichtigt, so kann man zunächst die Größen n_0 und λ_0 von ihrer bisherigen Definition durch die Constanten der Molekulartheorie unabhängig machen, und durch rein physikalische Bedingungen bestimmen. Da nämlich, wie aus der Theorie der Lichtbrechung und Reflexion bekannt ist, Strahlen mit complexem Brechungsindex total reflektirt werden, so folgt, daß von μ nach m nur solche Strahlen übergehen können, deren Wellenlänge über der, von der Natur beider Medien abhängigen Grenze λ_0 liegt, während alle Strahlen von kleinerer Wellenlänge bei jedem Einfallswinkel total reflektirt werden. Es sind daher n_0 und λ_0 die Elemente des äußersten von μ nach m brechbaren Strahls.

Die Wellenlänge dieses charakteristischen Strahls ist im Allgemeinen sehr klein im Vergleich zur Wellenlänge der gewöhnlich sichtbaren Strahlen; nur bei der von Dale und Gladstone untersuchten Lösung von Phosphor in Schwefelkohlenstoff gehört sie einem der bis jetzt beobachteten Theile des Spektrums an, indem bei dieser Substanz $\lambda_0 = 0,112$ ist, während nach Esselbach die Wellenlänge von R in dem hier angewandten Maße 0,114 ist.

Da der Nenner von n sich um so weniger von 2 unterscheidet,

*) Setzt man $\lambda_0 = \lambda \sin \varphi$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, so nimmt die Gleichung 7. die Form $n \cos \frac{\varphi}{2} = \text{const. an}$, welche jedoch für die numerische Rechnung weniger geeignet ist, als die obige.

je größer λ im Vergleich zu λ_0 ist, so müssen alle Strahlen, deren Wellenlänge hinlänglich größer als λ_0 ist, nahezu in derselben Richtung gebrochen werden. Das nach obiger Formel gebildete Spektrum ist daher von zwei Richtungen begrenzt, die den Brechungsindices n_0 und $\frac{n_0}{\sqrt{2}}$ entsprechen; die erstere wird durch den charakteristischen Strahl gebildet, in der andern concentriren sich alle Strahlen von beträchtlicher Wellenlänge.

Die Constante n_0 bestimmt demgemäß bei gegebenem Einfallswinkel die beiden Grenzrichtungen des Spektrums, während λ_0 die Grenze der im Spektrum vorhandenen Strahlen angibt, und zugleich ihre Vertheilung in demselben bestimmt. Man muß daher die erstere als das Maß des Brechungsvermögens, die andere als das Maß des Dispersionsvermögens betrachten.

Um Mißverständnissen zu begegnen, wiederhole ich, daß diese Gesetze nur unter bestimmten Einschränkungen gelten, indem sie bei abnehmendem λ einmal außer Kraft treten werden, und überdies der Fall nicht ausgeschlossen ist, daß sie in der Wirklichkeit durch Erscheinungen modifizirt werden, von denen die gegenwärtige Untersuchung wegen der Bedingung der Superposition keine Rechenschaft zu geben vermag.

Daß sich obige Formel wirklich auf die Brechung der Lichtwellen anwenden läßt, ergibt sich aus folgender Tafel, in welcher verschiedene Grade des Dispersionsvermögens, bis zum stärksten aufwärts, vertreten sind; N ist der beobachtete, n der nach 7. berechnete Index; bei den Strahlen, deren Elemente zur Berechnung von n_0 und λ_0 benutzt worden sind, ist n nicht angegeben. Für die Wellenlängen der Strahlen B, C, D, E, F, G und H wurden, in $\frac{1}{10\,000}$ Par. Zoll ausgedrückt, die Zahlen

0,2541	0,2424	0,2175	0,1944	0,1791	0,1586	0,1457
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

angenommen; dieselben bilden das arithmetische Mittel aus den beiden, nur wenig von einander abweichenden Angaben Fraunhofer's, und müssen bei der Ungewißheit, welche von beiden die genauere ist, als die wahrscheinlichsten betrachtet werden. Da diese Zahlen nur bis auf vier Stellen bekannt, und in der letzten jedenfalls unsicher sind, so mußten auch alle Indices auf eine entsprechende Zahl von Stellen reduziert werden.

Die Beobachtungen von Baden-Powell und der Hrn. Dale und Gladstone finden sich in den Proceed. of the Roy. Soc., Novemberheft 1859; die übrigen Angaben sind dem Handbuche von Beer entnommen.

Äther (Dale und Gladstone).

$n_D : \sqrt{2} = 1,3482 \quad n_0 = 1,9068 \quad \lambda_0 = 0,04827.$							
	B	C	D	E	F	G	H
N	1,3545	1,3554	1,3566	1,3590	1,3606	1,3646	1,3683
n		1,3551	1,3568	1,3590	1,3610		1,3678
N-n		+ 3	- 2	0	- 4		+ 5

Spiköl (Baden-Powell).

$n_D : \sqrt{2} = 1,4607 \quad n_0 = 2,0658 \quad \lambda_0 = 0,06546.$							
N	1,4732	1,4746	1,4783	1,4829	1,4868	1,4944	1,5009
n		1,4745	1,4779	1,4825	1,4866		1,5018
N-n		+ 1	+ 4	+ 4	+ 2		- 4

Gelbes Flintglas von Guinand (Dutirou).

$n_D : \sqrt{2} = 1,7489 \quad n_0 = 2,4738 \quad \lambda_0 = 0,07673.$							
N	1,7697	1,7718	1,7777	1,7852	1,7924	1,8062	1,8186
n		1,7718	1,7778	1,7855	1,7927		1,8184
N-n		0	- 1	- 3	- 3		+ 2

Phenylhydrat (Dale und Gladstone).

$n_D : \sqrt{2} = 1,5220 \quad n_0 = 2,1525 \quad \lambda_0 = 0,07966.$							
N	1,5416	1,5433	1,5488	1,5564	1,5639	1,5763	1,5886
n		1,5436	1,5492	1,5566	1,5634		1,5880
N-n		- 3	- 4	- 2	+ 5		+ 6

Schwefelkohlenstoff (Dale und Gladstone).

$n_D : \sqrt{2} = 1,5854 \quad n_0 = 2,2422 \quad \lambda_0 = 0,09897.$							
N	1,6177	1,6209	1,6303	1,6434	1,6554	1,6799	1,7035
n		1,6212	1,6307	1,6437	1,6559		1,7028
N-n		- 3	- 4	- 3	- 5		+ 7

Lösung von Phosphor in Schwefelkohlenstoff (Dale und Gladstone).

$n_D : \sqrt{2} = 1,8812 \quad n_0 = 2,6604 \quad \lambda_0 = 0,1121.$							
N	1,9314	*	1,9527	1,9744	1,9941	2,0361	2,0746
n		1,9369	1,9523	1,9737	1,9942		2,0783
N-n			+ 4	+ 7	- 1		- 37

* ist nicht beobachtet.

Um mit Sicherheit beurtheilen zu können, ob die Werthe der Differenzen $N - n$ zum Schlusse auf eine Ungenauigkeit der Formel berechtigen, muß man die Grenzen bestimmen, innerhalb deren sich die Unterschiede zwischen den berechneten und den wahren Indices halten müssen, wenn die Formel als absolut genau vorausgesetzt wird, und die Beobachtungsfehler bestimmt angenommene Grenzen erreichen, aber nicht überschreiten können; daraus ergeben sich unmittelbar die Grenzen der, mit der Gültigkeit der Formel verträglichen Abweichungen der berechneten von den beobachteten Indices. Ich habe die etwas umständliche Rechnung für Schwefelkohlenstoff ausgeführt, unter der Voraussetzung, daß die Fehler, mit denen die beobachteten Indices und Wellenlängen behaftet sind, höchstens eine, bezüglich zwei Einheiten der letzten Stelle betragen. Dieser Substanz wurde deshalb der Vorzug gegeben, weil sie bei ihrer starken Dispersion und der Vollständigkeit der Beobachtungsreihe sich zu einem wirklichen Prüfungsmittel der Dispersionsformel eignet, und außerdem die bei ihr vorkommenden Differenzen $N - n$ nicht unbedeutend sind. Es hat sich ergeben, daß, wenn die Formel volle Genauigkeit besitzt, die Unterschiede zwischen den berechneten und den wahren Indices in Folge der bei den Beobachtungen als möglich vorausgesetzten Fehler, abgesehen vom Zeichen und in Einheiten der letzten Stelle, für die Strahlen *C*, *D*, *E*, *F*, *H* die Grenzen

$$2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 9$$

erreichen können; hätte man weitere Grenzen für die Beobachtungsfehler angenommen, so würden diese Zahlen größer ausgefallen sein. Addirt man hierzu die möglichen Abweichungen der beobachteten von den wahren Indices, so erhält man für die zulässigen Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Indices die Grenzen

$$3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 10.$$

Die absoluten Werte der wirklichen Differenzen sind der Tafel zufolge gleich

$$3 \ 4 \ 3 \ 5 \ 7,$$

und werden demnach vollständig durch die Beobachtungsfehler erklärt, selbst wenn man den Beobachtungen eine Genauigkeit zuschreibt, welche sie zuverlässig nicht besitzen.

Es schien überflüssig, diese Untersuchung für die übrigen Substanzen der Tafel zu wiederholen, da bei denselben die Differenzen durchweg kleiner, als beim Schwefelkohlenstoff sind; die starke Abweichung beim Index *H* der Lösung von Phosphor in Schwefelkohlenstoff läßt sich vielleicht durch die Schwierigkeit erklären, bei der durch

die starke Dispersion verursachten ungemeinen Lichtschwäche noch sichere Beobachtungen anzustellen.

Über die Dispersionsverhältnisse nicht isotroper Medien ist bis jetzt nichts genügendes festgestellt; es lag jedoch nahe, durch numerische Rechnung zu untersuchen, ob in solchen Fällen der Lichtbrechung, wo sich die Richtung der Strahlen nach dem gewöhnlichen Gesetze ändert, auch für die Dispersion das gewöhnliche Gesetz gelte. Die folgende Tafel zeigt, daß dies, soweit die Genauigkeit der Beobachtungen reicht, wirklich der Fall ist; außerdem ergibt sich aus den schönen Beobachtungen Esselbach's (Poggendorff's Annalen 98.) das wichtige Resultat, daß die Formel 7., wenigstens bei einer Substanz, auf alle zwischen B und dem Esselbach'schen Streifen R enthaltenen Wellenlängen anwendbar ist.

Bei den circularpolarisirenden Substanzen zeigt sich eine Unregelmäßigkeit, die sich allerdings auch beim Äther findet; dieselbe besteht in dem öftern Zeichenwechsel der Differenzen $N - n$. Wären bloß die zur Berechnung von n_0 und λ_0 benutzten Beobachtungen ungenau, alle übrigen dagegen in Übereinstimmung mit dem durch 7. ausgedrückten Gesetze, so würde in der Differenzenreihe höchstens ein einziger Zeichenwechsel vorkommen können.

Bei Lavendelöl H ist die Beobachtung als unsicher bezeichnet; die starke Abweichung bei D rührt, wie es scheint, davon her, daß an Stelle von D noch einmal C beobachtet worden ist.

Circularpolarisirende Mittel.

Lavendelöl (Baden-Powell).

$n_0 : \sqrt{2} = 1,4525 \quad n_0 = 2,0541 \quad \lambda_0 = 0,06335.$							
N	1,4641	1,4658	1,4660	1,4728	1,4760	1,4837	1,4930?
n		1,4653	1,4685	1,4727	1,4766		1,4900
$N - n$		+ 5	- 25	+ 1	- 6		+ 30

Terpentinöl (Fraunhofer).

$n_0 : \sqrt{2} = 1,4599 \quad n_0 = 2,0647 \quad \lambda_0 = 0,06035.$							
N	1,4705	1,4715	1,4744	1,4784	1,4817	1,4882	1,4989
n		1,4716	1,4745	1,4783	1,4818		1,4938
$N - n$		- 1	- 1	+ 1	- 1		+ 1

Einaxige Krystalle.

Ordentlicher Strahl im Bergkrystall, elliptisch pol. (Esselbach).

$$n_o : \sqrt{2} = 1,5348 \quad n_o = 2,1706 \quad \lambda_o = 0,04935 = 133,6 \text{ Milliontel-Millim.}$$

λ	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>
	687,4	656,4	688,6	526,0	484,5	428,7	392,9
<i>N</i>	1,5414	1,5424	1,5446	1,5746	1,5500	1,5546	1,5586
<i>n</i>	1,5422	1,5430	1,5450		1,5500	1,5543	1,5583
<i>N-n</i>	— 8	— 6	— 4		0	+ 3	+ 3

λ	<i>L</i>	<i>M</i>	<i>N</i>	<i>O</i>	<i>P</i>	<i>Q</i>	<i>R</i>
	379,1	365,7	349,8	336,0	329,0	323,2	309,1
<i>N</i>	1,5605	1,5621	1,5646	1,5674	1,5690	1,5702	1,5737
<i>n</i>	1,5601		1,5648	1,5675	1,5690	1,5704	1,5740
<i>N-n</i>	+ 4		— 2	— 1	0	— 2	— 3

 λ ist in Milliontel-Millimetern angegeben.

Hauptindices des Doppelspaths (Rudberg).

$$\omega. \quad n_o : \sqrt{2} = 1,6394 \quad n_o = 2,3185 \quad \lambda_o = 0,06458.$$

<i>N</i>	1,6531	1,6545	1,6585	1,6636	1,6680	1,6762	1,6833
<i>n</i>		1,6545	1,6583	1,6632	1,6677		1,6836
<i>N-n</i>		0	+ 2	+ 4	+ 3		— 3

$$z. \quad n_o : \sqrt{2} = 1,4774 \quad n_o = 2,0893 \quad \lambda_o = 0,04733.$$

<i>N</i>	1,4839	1,4845	1,4864	1,4887	1,4907	1,4945	1,4978
<i>n</i>		1,4845	1,4863	1,4886	1,4906		1,4978
<i>N-n</i>		0	+ 1	+ 1	+ 1		0

Hauptindices zweiaxiger Krystalle (Rudberg).

Arragonit (negativ).

$$\alpha. \quad n_o : \sqrt{2} = 1,6672 \quad n_o = 2,3578 \quad \lambda_o = 0,06344.$$

<i>N</i>	1,6806	1,6820	1,6859	1,6908	1,6952	1,7032	1,7101
<i>n</i>		1,6820	1,6857	1,6906	1,6950		1,7105
<i>N-n</i>		0	+ 2	+ 2	+ 2		— 4

$$\beta. \quad n_o : \sqrt{2} = 1,6632 \quad n_o = 2,3521 \quad \lambda_o = 0,06284.$$

<i>N</i>	1,6763	1,6778	1,6816	1,6863	1,6905	1,6984	1,7051
<i>n</i>		1,6776	1,6814	1,6860	1,6903		1,7055
<i>N-n</i>		+ 2	+ 2	+ 3	+ 2		— 4

$\gamma. \quad n_0 : \sqrt{2} = 1,5207 \quad n_0 = 2,1506 \quad \lambda_0 = 0,04815.$							
N	1,5275	1,5282	1,5301	1,5326	1,5348	1,5388	1,5423
n		1,5282	1,5301	1,5325	1,5347		1,5424
$N - n$		0	0	+ 1	+ 1		- 1

Topas (positiv).

$\alpha. \quad n_0 : \sqrt{2} = 1,6098 \quad n_0 = 2,2766 \quad \lambda_0 = 0,05058$							
N	1,6179	1,6188	1,6211	1,6241	1,6265	1,6312	1,6351
n		1,6187	1,6209	1,6238	1,6264		1,6354
$N - n$		+ 1	+ 2	+ 3	+ 1		- 3

$\beta. \quad n_0 : \sqrt{2} = 1,6025 \quad n_0 = 2,2662 \quad \lambda_0 = 0,05040.$							
N	1,6105	1,6114	1,6137	1,6167	1,6191	1,6237	1,6275
n		1,6113	1,6135	1,6163	1,6189		1,6278
$N - n$		+ 1	+ 2	+ 4	+ 2		- 3

$\gamma. \quad n_0 : \sqrt{2} = 1,6004 \quad n_0 = 2,2633 \quad \lambda_0 = 0,05039.$							
N	1,6084	1,6094	1,6116	1,6145	1,6170	1,6215	1,6254
n		1,6092	1,6114	1,6143	1,6168		1,6257
$N - n$		+ 2	+ 2	+ 2	+ 2		- 3

Nachtrag.

Aus meinen Untersuchungen über die Dispersion des Lichtes, von denen ein Auszug in der Sitzung vom 14. d. M. vorgelegt worden ist, hat sich ergeben, daß das Spektrum eines aus Strahlen von allen Wellenlängen gemischten Lichtes zwischen zwei Richtungen eingeschlossen ist, über welche hinaus keine Strahlen gebrochen werden; die eine von diesen Begrenzungen rührt davon her, daß alle Strahlen, deren Wellenlänge kleiner als eine bestimmte Strecke λ_0 ist, an der Oberfläche der brechenden Substanz total reflektirt werden, und deshalb im Spektrum fehlen müssen; in der andern Grenzrichtung concentriren sich alle Strahlen von beträchtlicher Wellenlänge. Die zu diesen Richtungen gehörigen Brechungsindices sind in meiner Abhandlung durch n_0 und $\frac{n_0}{\sqrt{2}}$ bezeichnet, und in den beigelegten Tafeln für jede Substanz angegeben. Es wurden dabei absichtlich alle Folgerungen unterlassen, welche sich

aus den Werthen dieser Indices auf die Ausdehnung der dunklen Gebiete des Spektrums ziehen lassen, und zwar bei den brechbarsten Strahlen aus dem wiederholt angegebenen Grunde, weil in diesen Theilen des Spektrums die von mir gegebene Dispersionsformel, unbeschadet der Richtigkeit der allgemeinen Theorie, ihre Gültigkeit verlieren kann, bei den Strahlen von der geringsten Brechbarkeit dagegen, weil keine Beobachtungen vorhanden sind, die eine Vergleichung mit der Theorie gestatten.

Der einzige Versuch, den Brechungsindex der äußersten nachweisbaren dunkeln Wärmestrahlen zu bestimmen, ist meines Wissens von Müller (Poggendorff's Annalen 105. p. 352) gemacht worden. Müller liefs ein, durch ein Crownglasprisma entworfenen Sonnenspektrum auf einen Schirm fallen, in einer Entfernung, bei welcher seine Breite 18^{mm} betrug. In diesem Spektrum bedeckte jede Strahlengattung eine, nach Eisenlohr's Vermuthung (Pogg. Ann. 109. pag. 240) 8^{mm}, jedenfalls aber nicht weniger als 2^{mm} breite Fläche. Mittelt der Thermosäule wurde nachgewiesen, daß die weniger brechbaren dunkeln Wärmestrahlen sich jenseits *B* über eine Fläche von ungefähr gleicher Breite, wie das leuchtende Spektrum erstreckten.

Aus dieser Beobachtung, welche zuerst von Franz (Pogg. Ann. 101.) gemacht worden ist, schließt Müller 1), daß in diesem Spektrum der Streifen *B* in der Mitte zwischen *H* und den äußersten dunkeln Wärmestrahlen *W* liege, und daß aus diesem Grunde 2) der Index von *B* das arithmetische Mittel aus den Indices von *H* und *W* sei. Da nach Fraunhofer für Crownglas $n_B = 1,526$, $n_H = 1,546$ ist, so findet Müller hieraus $n_W = 1,506$, während die Annäherungsformel Cauchy's $n_W = 1,5156$ liefert. Aus der meinigen ergibt sich $n_W = 1,5163$.

Hierbei ist nun zu bemerken, daß die von Müller angewandte Formel nur dann mit einiger Annäherung gültig sein würde, wenn die Indices von *H*, *B* und *W* nur um zu vernachlässigende Größen von einander verschieden wären; außerdem hat der Schluß, *B* liege in der Mitte zwischen *H* und *W*, keinen rechten Sinn, indem von den Entfernungen der Strecken, über welche die genannten Strahlengattungen sich im Spektrum verbreiten, doch nur auf Grund bestimmt anzugebender Conventionen gesprochen werden kann.

Dem gegenüber sucht Eisenlohr am angeführten Orte zu zeigen, daß die Versuche Müller's mit Rücksicht auf die Divergenz der Sonnenstrahlen eine genügende Erklärung finden, wenn man den kleinsten Brechungsindex für Crownglas zu 1,516 statt zu 1,506 annimmt. Eine bessere Bestätigung meiner Formel würde sich nicht denken lassen, wenn nicht Hr. Eisenlohr zur Begründung seiner Schlüsse genöthigt

gewesen wäre, bei der gänzlichen Abwesenheit aller erforderlichen Angaben über die Anordnung der Müller'schen Versuche zu Hypothesen über dieselbe seine Zuflucht zu nehmen.

Auf eine Vergleichung der Dispersionstheorie mit experimentellen Untersuchungen über die dunkeln Theile des Spektrums wird man wohl vorläufig verzichten müssen, da eine, auch nur angenäherte Bestimmung der Elemente derjenigen Strahlen, welche in diese Gebiete hinein gebrochen werden, mit zu bedeutenden Schwierigkeiten verbunden zu sein scheint.

Anmerkung.

Die Christoffel'sche Abhandlung „Über die Dispersion des Lichts“ sowie der Nachtrag dazu wurden von Weierstraß der Akademie am 14. und am 31. October 1861 mitgeteilt.

F.

VI.

Verallgemeinerung einiger Theoreme des Herrn Weierstrass.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 63, 1864, S. 255—272.)

1.

Durch Untersuchungen über die kleinen Schwingungen eines zuerst von Cauchy behandelten Systems materieller Punkte bin ich zur Verallgemeinerung einiger wichtigen Theoreme des Herrn Weierstrass gelangt, welche ich jenen Untersuchungen voranschicke, da sie auch unabhängig von denselben von algebraischem Interesse zu sein scheint.

Ich bezeichne durch

$$\varphi = \Sigma[gh]u_g v_h, \quad \psi = \Sigma(hg)u_g v_h, \\ g, h = 0, 1, \dots n$$

zwei bilineare Functionen der Variabeln $\begin{vmatrix} u & u_1 & \dots & u_n \\ v & v_1 & \dots & v_n \end{vmatrix}$, und durch Φ und Ψ die Werthe, welche sie annehmen, wenn jedem Paare von Variabeln conjugirte Werthe

$$u_g = x_g + iy_g, \quad v_g = x_g - iy_g$$

ertheilt werden.

Sind alsdann folgende Voraussetzungen erfüllt,

1) dass die Coefficienten $[gh]$ und $[hg]$, sowie (gh) und (hg) für alle Werthe von g und h zu einander conjugirt sind, und

2) dass Φ nur dann verschwinden kann, wenn die reellen Variabeln x und y sich alle zugleich auf Null reduciren, so finden folgende Lehrsätze statt:

I. Φ ist reell und von unveränderlichem Zeichen.

II. Die Determinante der bilinearen Function φ ist von Null verschieden.

III. Die Determinante $\mathcal{A}(s)$ der bilinearen Function $\psi - s\varphi$ verschwindet nur für reelle Werthe von s .

IV. Ist $\Delta_{ik}(t)$ irgend eine erste Unterdeterminante von $\Delta(t)$ so ist die Zerfällung von

$$\frac{\Delta_{ik}(t)}{\Delta(t)}$$

in Partialbrüche stets frei¹⁾ von allen Gliedern, deren Nenner in Bezug auf t den ersten Grad übersteigt.

Die beiden letzten Theoreme gehen in die von Herrn Weierstrass (Monatsberichte der Berliner Akademie vom 4. März 1858, pag. 213 u. f.) aufgestellten über, wenn man voraussetzt, dass in den Coefficienten $[gh]$ und (gh) die imaginären Theile fehlen, ohne an den übrigen Bedingungen etwas zu ändern. Sie lassen sich umgekehrt aus diesen herleiten, indem man dieselben auf die Determinante $E(s)$ der homogenen Function zweiten Grades $\Psi - s\Phi$ anwendet, und dann die, von jeder Voraussetzung über die Coefficienten $[gh]$ und (gh) unabhängige Identität $E(s) = [2^{n+1} \Delta(s)]^2$ benutzt.¹⁾

Im Folgenden ist ein anderer Weg eingeschlagen worden.

2.

Zunächst bemerkt man, dass wegen 1)

$$\Phi = \Sigma[gh](x_g + iy_g)(x_h - iy_h)$$

zu

$$\Sigma[hg](x_g - iy_g)(x_h + iy_h) = \Phi$$

conjugirt, also reell ist. Dasselbe gilt von Ψ .

Nun würde Φ als stetige Function wegen der zweiten Bedingung sein Zeichen nur in dem Augenblicke wechseln können, wo es selbst mit allen reellen Variablen x und y zugleich durch Null geht. Dass jedoch auch hierbei kein Zeichenwechsel von Φ eintreten kann, erhellt sofort, wenn man alle Variablen, einmal zugleich, dann auch eine nach der anderen bis Null abnehmen, und von dort zu bestimmten Werthen übergehen läßt. In beiden Fällen gelangt Φ als einwerthige Function zum nämlichen Endwerthe, während im zweiten Falle der Werth $\Phi = 0$, also auch jeder Zeichenwechsel von Φ umgangen worden ist.

1) Für den Fall, wo $\varphi = uv + u_1 v_1 \dots$ gesetzt wird, ist das Theorem III. bereits von Herrn Hermite aufgestellt worden (Comptes R. tom. 41, p. 181—183). Herr Hermite stützt seinen Beweis auf eine Transformation von $\Delta(s)$ und das von Herrn Borchardt für den Fall reeller Elemente (ik) allgemein nachgewiesene Theorem (dieses Journal Band 30 und Liouville's Journal 12). Unter den nämlichen Voraussetzungen ist der Satz von Herrn Clebsch (dieses Journal Band 57, pag. 327) bewiesen worden; in einer spätern Abhandlung hat Herr Clebsch den Satz für den allgemeineren Fall ausgesprochen, wo bei den oben gestellten Bedingungen die Coefficienten von φ beliebige reelle Werthe haben (dieses Journal Band 62, pag. 235).

Dies festgestellt, bezeichnen wir durch s und $u, u_1, \dots u_n$ Grössen, welche den von sämtlichen v freien Gleichungen

$$(1.) \quad \frac{1}{s} \frac{\partial \psi}{\partial v_h} - \frac{\partial \varphi}{\partial v_h} = 0, \quad h = 0, 1, \dots n$$

genügen.

Dann ist

$$(2.) \quad \frac{1}{s^{n+1}} \mathcal{A}(s) = 0$$

die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, daß man, bei von Null verschiedenem s , den Gleichungen (1.) genügen kann, ohne alle unbekannten Grössen $u, u_1, \dots u_n$ gleich Null zu setzen.

Sei also s irgend eine Grösse, welche der Gleichung (2.) genügt, und von den Grössen $u, u_1, \dots u_n$ mindestens eine von Null verschieden.

Zerlegt man alsdann jedes u in seinen reellen und imaginären Bestandtheil, so dass $u_p = x_p + i y_p$ wird, und bestimmt hieraus die conjugirten Werthe $x_p - i y_p = v_p$, so ergiebt sich aus (1.)

$$\frac{1}{s} \sum v_h \frac{\partial \psi}{\partial v_h} = \sum v_h \frac{\partial \varphi}{\partial v_h},$$

d. i.

$$\frac{1}{s} \Psi = \Phi.$$

Da aber Ψ und Φ beide reell sind, und letzteres, was auch s sein mag, von Null verschieden ist, so kann 1) s nicht imaginär sein, d. h. alle Wurzeln der Gleichung $\mathcal{A}(s) = 0$ sind reell, und 2) kann s nicht unendlich gross sein, d. h. die Determinante von φ ist von Null verschieden.

Zum Beweise des vierten Satzes genügt es, zu zeigen, daß jede m -fache Wurzel der Gleichung $\mathcal{A}(s) = 0$ zum Mindesten $(m-1)$ -fache Wurzel sämtlicher Gleichungen $\mathcal{A}_{ik}(s) = 0$ ist.

Zu diesem Zwecke bemerke man zunächst, daß die in 1) und 2) gestellten Bedingungen nicht aufhören erfüllt zu sein, wenn man in der Function ψ den Coefficienten (kk) um eine reelle Grösse ϱ , oder die beiden conjugirten Coefficienten (gh) und (hg) um die conjugirten Grössen $\varrho e^{a i}$ und $\varrho e^{-a i}$ vermehrt.

Bezeichnet man durch $\mathcal{A}_{\rho h}(t)$ die aus einer Aenderung des Elementes $(gh) - t[gh]$ entspringende Unterdeterminante von $\mathcal{A}(t)$, so erhält man an Stelle der Gleichung $\mathcal{A}(t) = 0$ im ersten Falle

$$(3.) \quad \mathcal{A}(t) + \varrho \mathcal{A}_{hk}(t) = 0,$$

im zweiten dagegen

$$(4.) \quad \Delta(t) + \varrho e^{\alpha t} \Delta_{\varrho, \alpha}(t) + \varrho e^{-\alpha t} \Delta_{\alpha, \varrho}(t) + \varrho^2 \frac{\partial^2 \Delta(t)}{\partial(g h) \partial(h g)} = 0.$$

Folglich sind alle Wurzeln dieser beiden Gleichungen reell. Wenn s eine m -fache Wurzel der Gleichung $\Delta(t) = 0$ ist, so muß demnach jede der beiden vorstehenden Gleichungen (3.) und (4.) m reelle Wurzeln besitzen, die sämmtlich für $\varrho = 0$ in s übergehen. Wenn diese m Wurzeln nicht alle für jedes ϱ gleich s sind, woraus offenbar der zu beweisende Satz schon folgen würde, so muss wenigstens eine von ihnen sich mit ϱ ändern.

Seit t eine solche Wurzel. Unter der Voraussetzung, dass der absolute Werth von ϱ hinlänglich klein ist, kann man t durch einen nach steigenden Potenzen von ϱ geordneten Ausdruck darstellen, und erhält, wenn man sich auf die beiden ersten Glieder dieser Entwicklung beschränkt,

$$t = s + a \varrho^\mu \dots$$

In dieser Gleichung ist a reell und von ϱ unabhängig, μ ist eine von Null verschiedene positive ganze Zahl.

Wäre μ negativ oder Null, so würde t bei abnehmendem ϱ nicht gegen die Grenze s convergiren; wäre μ eine positive, aber keine ganze Zahl, so würde man für t eine Reihe imaginärer Werthe erhalten können, indem man, was auf den Werth von a keinen Einfluss hat, ϱ negativ, und für ϱ^μ einen der complexen Werthe wählt, deren diese Potenz unter den angegebenen Voraussetzungen fähig ist.

Um hieraus den Beweis des vierten Satzes abzuleiten, wie zu jedem anderen Beweise des nämlichen Satzes, ist es nothwendig, zu bemerken, dass bei reellem t die Determinante

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} (00) - t[00] & (10) - t[10] & \dots \\ (01) - t[01] & (11) - t[11] & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

ebenfalls reell ist. Man erkennt dies sofort, wenn man das Zeichen der $\sqrt{-1}$ ändert, wodurch jede m^{te} Horizontalreihe in die m^{te} Verticalreihe verwandelt wird. Da dies gilt, so lange die in art. 1 für die Coefficienten der Functionen ψ und φ gestellten Bedingungen erfüllt sind, so ergiebt sich gleichzeitig die Realität des Ausdrucks, um den $\Delta(t)$ in der Gleichung (4.) vermehrt worden ist. Dividirt man denselben durch ϱ , und lässt hierauf ϱ verschwinden, so folgt, dass $e^{\alpha t} \Delta_{\varrho, \alpha}(t) + e^{-\alpha t} \Delta_{\alpha, \varrho}(t)$ für jedes reelle α und t reell, also $\Delta_{\varrho, \alpha}(t)$ zu $\Delta_{\alpha, \varrho}(t)$ conjugirt ist.

Multipliziert man endlich die Gleichung (4.) mit $\mathcal{A}(t)$, so kann man sie mittelst der bekannten Identität

$$\mathcal{A} \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial (gh) \partial (hg)} = \mathcal{A}_{gh} \mathcal{A}_{hg} - \mathcal{A}_{gg} \mathcal{A}_{hh}$$

in folgende Form bringen

$$(5.) \quad [\mathcal{A}(t) + \varrho e^{\alpha t} \mathcal{A}_{gh}(t)] [\mathcal{A}(t) + \varrho e^{-\alpha t} \mathcal{A}_{hg}(t)] = \varrho^2 \mathcal{A}_{gg}(t) \mathcal{A}_{hh}(t),$$

wo die beiden Factoren der linken Seite zu einander conjugirt sind.

Dies festgestellt, sei

$$\frac{\mathcal{A}(t)}{(t-s)^m} = c \quad \text{für } t = s.$$

Dividirt man die Gleichung (3.) in der Voraussetzung eines verschwindenden ϱ durch $a^{-\frac{1}{\mu}}(t-s)^m = \varrho(t-s)^{m-\frac{1}{\mu}}$, so folgt für $\varrho = 0$ oder $t = s$

$$c a^{\frac{1}{\mu}} + \lim. \frac{\mathcal{A}_{hk}(t)}{(t-s)^{m-\frac{1}{\mu}}} = 0.$$

Da $c a^{\frac{1}{\mu}}$ weder Null noch unendlich gross ist, so muss $m - \frac{1}{\mu}$ eine ganze Zahl, also μ selbst als positive ganze Zahl gleich 1 sein.

Daraus schliesst man, dass $\mathcal{A}_{hk}(t)$ mindestens $(m-1)$ -mal durch $t-s$ theilbar ist.

Dividirt man die Gleichung (5.) bei verschwindendem ϱ zweimal durch $(t-s)^m: a \varrho^{\mu-1} = \varrho(t-s)^{m-1}$, so folgt für $\varrho = 0$ oder $t = s$

$$\lim. \left[c a \varrho^{\mu-1} + e^{\alpha t} \frac{\mathcal{A}_{gh}(t)}{(t-s)^{m-1}} \right] \left[c a \varrho^{\mu-1} + e^{-\alpha t} \frac{\mathcal{A}_{hg}(t)}{(t-s)^{m-1}} \right] = \lim. \frac{\mathcal{A}_{gg}(t)}{(t-s)^{m-1}} \cdot \frac{\mathcal{A}_{hh}(t)}{(t-s)^{m-1}}.$$

Da die rechte Seite nicht unendlich gross ist, so gilt dasselbe von den beiden conjugirten Factoren zur Linken. Beachtet man noch, dass $\mu - 1$ nicht negativ sein kann, so folgt, dass $\mathcal{A}_{gh}(t)$ und $\mathcal{A}_{hg}(t)$ in jedem Falle durch $(t-s)^{m-1}$ theilbar sind, w. z. b. w.

Bezeichnet man daher die Wurzeln der Gleichung $\mathcal{A}(t) = 0$, so weit sie von einander verschieden sind, durch

$$s, s_1, \dots, s_p,$$

so folgt aus dem vierten Satze, dass man durch Zerfällung in Partialbrüche erhält

$$(6.) \quad \frac{\mathcal{A}_{hk}(t)}{\mathcal{A}(t)} = \sum_{\delta} \frac{\mathcal{A}_{hk}^{\delta}}{s_{\delta} - t},$$

wo die Summation sich über die verschiedenen Wurzeln s_{δ} erstreckt, und sämmtliche $\mathcal{A}$ von t unabhängig sind.

3.

Die in der Gleichung (6.) eingeführten Grössen A treten bei verschiedenen Untersuchungen auf, weshalb es gestattet sein mag, im Folgenden den Ursprung ihrer wesentlichsten Eigenschaften nachzuweisen.

Man bemerkt zunächst die identische Gleichung

$$(7.) \quad \sum_{g,h} [(gh) - s[gh]] A_{ih}(x) A_{gk}(y) \\ = \frac{(y-s) A(x) A_{ik}(y) + (s-x) A(y) A_{ik}(x)}{y-x},$$

deren Richtigkeit aus dem Umstande folgt, dass ihre beiden Seiten in Bezug auf s vom ersten Grade sind, und überdies für zwei Werthe von s , nämlich $s=x$ und $s=y$ übereinstimmen.

Dieselbe enthält in symbolischer Vereinigung alle Relationen zwischen den Coefficienten der Functionen φ und ψ und den Grössen A , welche in Bezug auf die letztern vom zweiten Grade sind. Um diese Relationen zu erhalten, darf man die Gleichung (7.) nur durch $A(x) A(y)$ dividiren, und auf beiden Seiten die Formel (6.) anwenden.

Zwischen den nämlichen Grössen bestehen ferner zwei Systeme von Gleichungen, welche nach den Grössen A linear sind. Diese Formelsysteme sind in den folgenden Gleichungen enthalten, welche den Ausgangspunkt der Untersuchungen des Herrn Weierstrass bilden. Aus der Definition der Determinanten $A(x)$ und $A_{ik}(x)$ ergibt sich

$$(8.) \quad \begin{cases} u_g = \sum_h \frac{A_{gh}(x)}{A(x)} \cdot \frac{\partial(\psi - x\varphi)}{\partial v_h}, \\ v_h = \sum_g \frac{A_{gh}(x)}{A(x)} \cdot \frac{\partial(\psi - x\varphi)}{\partial u_g}. \end{cases}$$

Wendet man hier die Formel (6.) an, so folgt

$$\begin{aligned} u_g &= \sum_{\delta} \frac{1}{s_{\delta} - x} \sum_h A_{gh}^{\delta} \frac{\partial(\psi - x\varphi)}{\partial v_h}, \\ v_h &= \sum_{\delta} \frac{1}{s_{\delta} - x} \sum_g A_{gh}^{\delta} \frac{\partial(\psi - x\varphi)}{\partial u_g}, \end{aligned}$$

und zwar gilt dies für jedes beliebige x . Lässt man daher x über alle Grenzen wachsen, oder mit einer bestimmten Wurzel, etwa mit s_{δ} zusammenfallen, so erhält man aus der ersten Gleichung

$$(9.) \quad \begin{cases} u_g = \sum_{\delta} \sum_h A_{gh}^{\delta} \frac{\partial \varphi}{\partial v_h}, \\ \sum_h A_{gh}^{\delta} \frac{\partial \psi}{\partial v_h} = s_{\delta} \sum_h A_{gh}^{\delta} \frac{\partial \varphi}{\partial v_h}, \end{cases}$$

und aus der anderen

$$(10.) \quad \begin{cases} v_\lambda = \sum_{\delta} \sum_{\rho} A_{\rho\lambda}^{\delta} \frac{\partial \varphi}{\partial u_{\rho}}, \\ \sum_{\rho} A_{\rho\lambda}^{\delta} \frac{\partial \psi}{\partial u_{\rho}} = s_{\delta} \sum_{\rho} A_{\rho\lambda}^{\delta} \frac{\partial \varphi}{\partial u_{\rho}}. \end{cases}$$

Vergleicht man in diesen Formeln die Coefficienten der willkürlichen Grössen u und v , so erhält man die vorhin erwähnten linearen Formelsysteme.

Endlich kann man die bekannten Ausdrücke für die aus den Grössen $A_{ik}(x)$ gebildeten Determinanten zur Darstellung von Relationen zwischen den Grössen A allein benutzen, was indessen der Kürze wegen übergangen werden kann.

Die vorstehenden Resultate finden ihre Anwendung in der Theorie der bilinearen Functionen und bei der Integration linearer Differentialgleichungen. Ich erlaube mir, in dieser Beziehung einstweilen auf die zu Eingange erwähnte Abhandlung des Herrn Weierstrass sowie auf meine folgende Arbeit über kleine Schwingungen zu verweisen.

4.

Durch das Vorangehende ist eine grosse Reihe von Fragen auf die Ermittlung der Bedingungen zurückgeführt, welche erfüllt sein müssen, damit eine bilineare Function

$$\varphi = \Sigma [gh] u_{\rho} v_{\lambda},$$

deren zusammengehörige Coefficienten $[gh]$, $[hg]$ conjugirt sind, und in welcher jedes Paar u_{ρ} , v_{λ} von Variabeln durch ein Paar conjugirter Werthe ersetzt ist, nur dann verschwinden könne, wenn diese Variabeln alle zugleich verschwinden

Setzt man den Coefficienten $[00]$ gleich Null voraus, so kann man φ für jeden Werth von u zum Verschwinden bringen, indem man alle übrigen Variabeln nebst ihren Conjugirten gleich Null setzt. Es ist also sicher, dass eine der gesuchten Bedingungen darin besteht, dass $[00]$ von Null verschieden sein muss. Ich füge hinzu, dass die übrigen sich aus dieser durch Wiederholung ergeben.

Setzt man

$$[00] \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \varphi_1,$$

so folgt $\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} = 0$; also ist φ_1 eine bilineare Function der

Ersetzt man aber in den linearen Functionen

$$\frac{\partial \varphi_g}{\partial u_g} = \sum_{\lambda} [gh]_g v_{\lambda}, \quad \frac{\partial \varphi_g}{\partial v_g} = \sum_{\lambda} [hg]_g u_{\lambda}$$

die Paare u_{λ}, v_{λ} durch die conjugirten Werthe $x_{\lambda} + iy_{\lambda}, x_{\lambda} - iy_{\lambda}$, so erlangen sie conjugirte Werthe $f_g + if'_g, f_g - if'_g$, wo f_g, f'_g lineare Functionen von $x_g, y_g, x_{g+1}, \dots, y_n$ mit reellen Coefficienten bedeuten. Mittelst der im art. 1 eingeführten Bezeichnung erhält man also aus der vorigen Gleichung

$$\Phi = \frac{1}{[00]} (f^2 + f'^2) + \frac{1}{[00][11]_1} (f_1^2 + f_1'^2) + \dots + \frac{1}{[00][11]_1 \dots [nn]_n} (f_n^2 + f_n'^2).$$

Durch diese Zerfällung der Function Φ ist bewiesen, dass die zweite Bedingung des art. 1. auch durch die folgende ersetzt werden kann,

dass die Grössen

$$[00], [11]_1, \dots, [nn]_n$$

von Null verschieden und positiv sein müssen, mit Ausnahme der ersten, die ein beliebiges Zeichen haben kann.

Es ist zu bemerken, daß die Anzahl dieser Bedingungen genau die nämliche ist, wie in dem einfacheren Falle, wo die Function φ weder in ihren Coefficienten, noch in den conjugirten Variabeln imaginäre Theile enthält.

5.

An die vorangehenden Untersuchungen anknüpfend, werde ich zunächst die dort gestellten Bedingungen von einer wesentlichen Einschränkung befreien, welche ohne Nachtheil für die Einfachheit der Beweise und die bequeme Einsicht in sämtliche Beweisgründe nicht hätte unterdrückt werden können.

Die erwähnten Bedingungen bestanden darin, 1) dass in jeder der beiden bilinearen Functionen φ, ψ die Coefficienten von $u_g v_{\lambda}, u_{\lambda} v_g$ stets zu einander conjugirt sind, und 2) dass φ bei conjugirten Werthen der Paare u_g, v_g nur mit diesen zugleich verschwinden kann. Daraus folgten, ausser zwei Sätzen, die hier nicht mehr in Betracht kommen, die beiden anderen, dass die Wurzeln der Gleichung $\Delta(t) = 0$ reell sind, und dass die ersten Unterdeterminanten von $\Delta(t)$ jeden Linearfactor dieser Function höchstens einmal weniger enthalten, als diese selbst ihn besitzt.

Die zweite von diesen Bedingungen lässt sich, ohne dass eines der vorstehenden Theoreme seine Gültigkeit verliert, dahin abändern, dass φ bei conjugirten Werthen der Paare u_g, v_g unveränderliches Zeichen besitzen muss.

Um die Richtigkeit dieser Behauptung einzusehen, bedarf es nur des Nachweises, dass bei diesen geänderten Bedingungen die Wurzeln der Gleichung $\mathcal{A}(t) = 0$ reell bleiben, indem hieraus der andere Satz folgt (pag. 127—129).

Um diesen Nachweis zu führen, denke man sich φ mittelst des zu Ende des vorigen art. angeführten Verfahrens in eine Summe von gleichbezeichneten Gliedern zerfällt. Wenn dann φ der oben erweiterten, aber nicht der ursprünglichen zweiten Bedingung genügt, so muss in jener Zerfällung eine Anzahl von Gliedern, vom letzten an gerechnet, fehlen. Dies festgestellt, kann man offenbar die beiden ursprünglichen Bedingungen befriedigen, indem man für jedes in φ fehlende Glied ein anderes von der durch die Zerfällung verlangten Form einsetzt, welches mit einem stetig abnehmenden Coefficienten versehen ist. Dann werden alle Wurzeln der Gleichung $\mathcal{A}(t) = 0$ reell, und dies bleibt bis zur Grenze bestehen, wo die neu eingeführten Glieder wieder verschwinden.

Hieran schliessen sich nun einige weitere Untersuchungen, welche die ausserordentliche Tragweite der vorstehenden Bedingungen in einer höchst bemerkenswerthen Weise hervortreten lassen.

Was diese Bedingungen für den gegenwärtigen Zweck vorzugsweise charakterisiert, besteht darin, dass durch sie zwei Sätze mit einander verknüpft sind, von denen offenbar unter geänderten Bedingungen jeder ohne den andern bestehen kann. Am meisten Interesse bietet in dieser Beziehung der zweite von obigen Sätzen dar, indem derselbe durch einfache Modificationen in den bilinearen Functionen φ, ψ auf unzählig viele Fälle ausgedehnt werden kann, in denen von den obigen Bedingungen keine mehr erfüllt ist.

6.

Ich bezeichne durch $z = x + iy$ eine complexe veränderliche Grösse und, indem x und y in der üblichen Weise als rechtwinklige Coordinaten in einer Ebene E dargestellt werden, jeden Punkt dieser Ebene durch den ihm entsprechenden Werth von z .

In dieser Ebene sei eine Anzahl von Punkten P gegeben, die keine Linie stetig erfüllen, und eine Linie L von messbarer Länge, die keinen dieser Punkte P enthält.

In den bilinearen Functionen φ und ψ ersetze ich sämtliche Coefficienten durch complexe Functionen von z , die ausserhalb der Punkte P in der ganzen Ebene E einwerthig, endlich und stetig sind, und an der ganzen Linie L entlang den folgenden Bedingungen genügen:

- 1) dass $[gh]$ und $[hg]$, sowie (gh) und (hg) an L entlang conjugirt sind;
- 2) dass φ , wenn jedes Paar u_p, v_p durch ein Paar von stets zu einander conjugirten Variablen ersetzt wird, an L entlang keines Zeichenwechsels fähig ist;
- 3) dass man an L entlang auf keinen Punkt trifft, in dem zwei, vorher von einander verschiedene Wurzeln der Gleichung $\mathcal{A}(t) = 0$ einander gleich werden.

Bezeichnet man nun durch Q diejenigen Punkte der Ebene E , in denen eine dieser Wurzeln unendlich gross oder einer sonst von ihr verschiedenen gleich wird, so folgt aus den vorstehenden Bedingungen der Satz,

dass in der ganzen Ebene E mit Ausnahme der Punkte Q die Unterdeterminanten $\mathcal{A}_{ik}(t)$ jeden Linearfactor von $\mathcal{A}(t)$ höchstens einmal weniger enthalten, als diese Function selbst ihn besitzt.

Beim Beweise dieses Satzes habe ich die genauere Erörterung mehrerer Punkte nicht umgehen zu dürfen geglaubt. Zunächst schicke ich folgende Bemerkung über die Vertheilung der Punkte Q in der Ebene E voraus.

Setzt man $\mathcal{A}(t)$ seiner Zerfällung in Linearfactoren gleich, und bezeichnet durch K den Factor der höchsten Potenz von $-t$ im Ausdrucke von $\mathcal{A}(t)$, so folgt, dass einer dieser Linearfactoren, also eine Wurzel der Gleichung $\mathcal{A}(t) = 0$, nur dann unendlich werden kann, wenn entweder $\mathcal{A}(t)$ für jedes endliche t unendlich wird, oder, falls dies endlich bleibt, wenn K verschwindet. Das erstere findet nur in Punkten P statt; die Punkte P' , in denen die ausserhalb der Punkte P einwerthige, endliche und stetige Function K verschwindet, können keine messbare Linie stetig erfüllen, weil K nicht in der ganzen Ebene gleich Null ist.

Dasselbe gilt aus gleichen Gründen von den Punkten P'' , in denen zwei, sonst von einander verschiedene Wurzeln der Gleichung $\mathcal{A}(t) = 0$ einander gleich werden. In der That ist das aus sämmtlichen Differenzen dieser Wurzeln gebildete Produkt in Bezug auf dieselben symmetrisch, also einwerthig, und da es nur mit einer dieser Wurzeln zugleich unendlich oder unstetig werden kann, ausserhalb der Punkte P, P' endlich und stetig. Da es wegen 3) an L entlang von Null verschieden ist, so können die Punkte P'' , in denen es verschwindet, keine Linie von messbarer Länge stetig erfüllen.

Daraus folgt, dass die Punkte Q in der Ebene E so vertheilt sind, dass sie für sich allein keinen Theil derselben völlig begrenzen.

Dies festgestellt, sei in irgend einem Punkte der Linie L

$$\mathcal{A}(t) = K(s - t)^m (s_1 - t)^{m_1} \dots (s_p - t)^{m_p},$$

und jede der Grössen $s, s_1, \dots, s_p$ von jeder andern verschieden. Dann sind wegen 3) die Exponenten $m, m_1, \dots, m_p$ der verschiedenen Linearfactoren an L entlang unveränderlich, und die Grössen s auf derselben Strecke reell. Ausserdem liefert das Weierstrasssche Theorem auf dieser Linie für $\mathcal{A}_{ik}(t)$ einen Ausdruck

$$\mathcal{A}_{ik}(t) = (s - t)^{m-1} (s_1 - t)^{m_1-1} \dots (s_p - t)^{m_p-1} \delta_{ik}(t),$$

wo $\delta_{ik}(t)$ eine rationale ganze Function von t ist.

Es handelt sich nun darum, zu beweisen, dass bei gehörigen Bestimmungen über die den Grössen s ausserhalb L beizulegende Bedeutung diese beiden Zerfällungen ausserhalb der Punkte Q in der ganzen Ebene E gültig sind.

Die Grössen $s, s_1, \dots, s_p$ sind vorläufig nur durch die Factorenzerfällung von $\mathcal{A}(t)$, also an L entlang definirt. Man kann sich dieselben aber auch noch auf eine zweite Art, nämlich dadurch entstanden denken, dass der vorher ausserhalb L befindliche Punkt s durch stetige Ortsänderung in diese Linie eintritt, wobei dann die Wurzeln der Gleichung $\mathcal{A}(t) = 0$ stetig in die Grössen $s, s_1, \dots, s_p$ übergehen.

Aus diesem Grunde kann man daher auch rückwärts die an L entlang durch die obige Factorenzerfällung definirten Functionen s mittelst der Differentialgleichung $\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x} \sqrt{-1}$ von dieser Linie aus zu benachbarten Flächentheilen stetig fortsetzen. Fügt man, um hierbei jede Unbestimmtheit auszuschliessen, die Bedingung hinzu, dass die Fortsetzung dieser Functionen von L aus nach gegebenen Theilen von E stets gleichzeitig an denselben Flächentheilen entlang erfolgen soll, so fällt jede von ihnen an jeder Stelle mit einer dort vorhandenen Wurzel der Gleichung $\mathcal{A}(t) = 0$ zusammen, da diese Fortsetzung nach einem bekannten Satze nur auf eine Weise möglich ist, also zu denselben Functionen zurückführen muss, aus denen man sich, auf dem vorhin beschriebenen Wege nach L zurückkehrend, die dort gegebenen Functionen s entstanden denken kann. Bei dieser stetigen Fortsetzung der Functionen s ist kein Theil der Ebene E unerreichbar, da die Punkte Q , welche allein bei derselben umgangen werden müssen, keinen Theil dieser Ebene von den übrigen trennen.

Bei der gleichzeitigen Fortsetzung aller s verwandeln sich die rechten Seiten obiger Gleichungen, die ich durch $D(t), D_{ik}(t)$ bezeichnen will, in complexe Functionen von s , die in jedem Augenblicke ausserhalb der Punkte Q einwerthig, endlich und stetig sind. Da die Differenzen $\mathcal{A}(t) - D(t), \mathcal{A}_{ik}(t) - D_{ik}(t)$ an der Linie L entlang ver-

schwinden, so können sie demnach ausserhalb der Punkte Q auch in keinem anderen Theile der Ebene von Null verschieden sein. Damit ist der obige Satz bewiesen.

Wenn in einem Punkte Q zwei vorher verschiedene Wurzeln s und s_1 einander gleich werden, so wird dort $\mathcal{A}(t)$ den Factor $s - t$ im Allgemeinen zweimal öfter enthalten als $\mathcal{A}_{ik}(t)$, nämlich stets und auch nur dann, wenn dort $\delta_{ik}(t)$ nicht ohne Rest durch $s - t$ theilbar wird.

Der obige Satz beschränkt sich offenbar nicht auf den Fall, wo die Functionen $[gh]$, (gh) bloss von einer einzigen Variablen s abhängen.

Es seien $z, z_1, z_2, \dots$ complexe Variable, und ihnen entsprechend $L, L_1, L_2, \dots$ ununterbrochen zusammenhängende Werthenreihen, von denen jede bei der geometrischen Darstellung der zugehörigen Variablen durch eine Linie von messbarer Länge repräsentirt wird.

Sind alsdann alle $[gh]$, (gh) einwerthige Functionen von $z, z_1, z_2, \dots$, welche den oben gestellten Bedingungen genügen, solange jede Variable z_i der entsprechenden Werthenreihe L_i angehört, und deren Unstetigkeitsstellen P durch keine dieser Werthenreihen gehen und auch keinen Theil des Grössengebietes vollständig begrenzen, aus welchem die Variablen $z, z_1, z_2, \dots$ ihre Werthe entnehmen; dann gilt der obige Satz im ganzen Umfange dieses Gebietes, mit Ausnahme derjenigen Stellen Q , an denen entlang eine der Functionen $s, s_1, \dots, s_p$ aufhört, endlich oder von jeder anderen verschieden zu sein.

Der Beweis dieses Satzes, in welchem die Einwerthigkeit der Functionen $[gh]$, (gh) auch durch Bedingungen erzwungen sein kann, ergibt sich durch wiederholte Anwendung des vorigen; man lässt nämlich in der Voraussetzung, dass jede Variable z_i in der entsprechenden Werthenreihe L_i enthalten ist, zunächst nur s aus L heraustreten; dann weist man s ausserhalb L einen festen Werth an, und lässt nun auch z_1 aus L_1 herausrücken, u. s. w. Dann hört der Satz nach der oben angewandten Schlussweise in keinem Augenblicke auf, gültig zu sein, so lange man in keine der durch Q bezeichneten Stellen eintritt.

7.

Der hiermit begründete Satz lässt sich nun ohne Weiteres auf solche Fälle ausdehnen, wo die erste von den oben gestellten Bedingungen in gegebener Weise verletzt ist.

Wenn nämlich die Coefficienten der bilinearen Functionen φ', ψ' dieser ersten Bedingung nirgendwo oder an keiner nachweisbaren Strecke entlang Genüge leisten, so führe man statt φ', ψ' zwei neue bilineare Functionen φ, ψ ein, deren Coefficienten man als einwerthige

Functionen von z so wählt, dass sie für $z = 0$ mit den Coefficienten jener zusammenfallen, und an einer Linie L entlang die verlangte Eigenschaft annehmen. Wenn alsdann φ und $\mathcal{A}(t)$ auf einem messbaren Stücke dieser Linie auch den übrigen Bedingungen genügen, und im Punkte $z = 0$ keine ausserhalb desselben von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\mathcal{A}(t) = 0$ zusammenfallen, auch keine derselben dort unendlich wird, so ist die Gültigkeit des Satzes auch für diesen Punkt, d. h. für die Determinante von $\psi' - t\varphi'$ und ihre Unterdeterminanten bewiesen.

Am Einfachsten erzwingt man die erste Bedingung durch Einführung linearer Functionen von z . Haben in den Functionen

$$\varphi' = \Sigma [gh]' u_\lambda, \quad \psi' = \Sigma (gh)' u_\lambda$$

die Coefficienten $[gh]'$, $(gh)'$ beliebige Werthe, und bezeichnet man durch $[gh]''$, $(gh)''$ ihre Conjugirten, so ertheile man in den statt jener zu betrachtenden Functionen φ , ψ den Coefficienten die Werthe

$$[gh] = \frac{[gh]' + [hg]''}{2} + \frac{[gh]' - [hg]''}{2} (1 - z),$$

$$(gh) = \frac{(gh)' + (hg)''}{2} + \frac{(gh)' - (hg)''}{2} (1 - z);$$

dann wird offenbar für $z = 0$ $[gh] = [gh]'$, $(gh) = (gh)'$, dagegen an der ganzen Geraden $x = 1$ entlang $[gh]$ zu $[hg]$, (gh) zu (hg) conjugirt.

Im gegenwärtigen Falle liegen die durch P bezeichneten Punkte im Unendlichen, die Punkte P' , in denen K verschwindet, so wie die Punkte P'' , in denen sonst verschiedene Wurzeln der Gleichung $\mathcal{A}(t) = 0$ zusammenfallen, sind nur in endlicher Zahl vorhanden, da K und $\mathcal{A}(t)$ in Bezug auf z algebraisch sind.

Wenn daher die zweite Bedingung auf irgend einer messbaren Strecke der Geraden $x = 1$ erfüllt ist, und der Werth $z = 0$ keinen Punkt P' oder P'' bestimmt, so muss jeder Linearfactor der Determinante von $\psi' - t\varphi'$ in ihren ersten Unterdeterminanten höchstens einmal weniger vorkommen, als in ihr selbst.

8.

Im Vorangehenden ist gezeigt, wie man der ersten von den obigen Bedingungen genügen kann, wenn sie nicht bereits erfüllt ist.

Die sich hieran schliessende Untersuchung, ob auch die zweite Bedingung erfüllt ist, erledigt sich durch das am Schlusse des ersten Theiles dieser Arbeit angeführte Verfahren.

Es bleibt nur noch übrig, ein brauchbares Hilfsmittel anzugeben, welches unter Voraussetzung der beiden ersten Bedingungen diejenigen

für die Existenz und die Anzahl vielfacher Wurzeln der Gleichung $\Delta(t) = 0$ liefert. Dasselbe ist in der folgenden Umkehrung des zweiten Weierstrassschen Theorems enthalten.

Wenn unter Voraussetzung der beiden ersten Bedingungen s eine Wurzel der Gleichung $\Delta(t) = 0$, und $(t-s)^{m-1}$ die höchste Potenz von $t-s$ ist, durch welche die Unterdeterminanten

$$\Delta_{00}(t), \Delta_{11}(t), \dots, \Delta_{nn}(t)$$

alle theilbar sind, so ist $\Delta(t)$ durch $(t-s)^m$, aber durch keine höhere Potenz von $t-s$ theilbar.

Ist p der Exponent der höchsten Potenz von $t-s$, durch welche $\Delta(t)$ ohne Rest theilbar ist, so ist jede Unterdeterminante $\Delta_{ik}(t)$ $(p-1)$ -mal durch $t-s$ theilbar; also kann p nicht grösser als m sein. Dass es auch nicht kleiner als m sein kann, ergibt sich durch folgende Betrachtung.

Sind ϱ und α beliebige reelle Zahlen, so hat jede Gleichung (pag. 128)

$$\Delta(t) + \varrho e^{\alpha t} \Delta_{ph}(t) + \varrho e^{-\alpha t} \Delta_{hp}(t) + \varrho^2 \frac{\partial^2 \Delta(t)}{\partial (gh) \partial (hg)} = 0$$

p reelle Wurzeln, die mit abnehmendem ϱ stetig in s übergehen, wenn sie nicht schon unabhängig von ϱ gleich s sind. Im letzteren Falle würde $\Delta_{ph}(t)$ durch $(t-s)^p$ theilbar sein.

Ist dagegen eine jener p Wurzeln von ϱ abhängig, und für ein verschwindendes ϱ bis auf Grössen höherer Ordnung gleich $s + a\varrho^\mu + \dots = t$, so erhält man die Gleichung (pag. 129, wo m durch p zu ersetzen ist)

$$\begin{aligned} \lim \left[c a \varrho^{\mu-1} + e^{\alpha t} \frac{\Delta_{ph}(t)}{(t-s)^{p-1}} \right] \left[c a \varrho^{\mu-1} + e^{-\alpha t} \frac{\Delta_{hp}(t)}{(t-s)^{p-1}} \right] \\ = \lim \frac{\Delta_{pp}(t)}{(t-s)^{p-1}} \cdot \frac{\Delta_{hh}(t)}{(t-s)^{p-1}}, \end{aligned}$$

wo c den Werth von $\frac{\Delta(t)}{(t-s)^p}$ für $t=s$ bedeutet, und das Zeichen $\lim$ sich auf die Abnahme von ϱ oder $t-s$ bezieht.

Nimmt man nun an, es sei $p-1 < m-1$, so wird die rechte Seite, also auch jeder der beiden conjugirten Factoren zur Linken gleich Null. In der hieraus folgenden Gleichung

$$\lim \left[c a \varrho^{\mu-1} + e^{\alpha t} \frac{\Delta_{ph}(t)}{(t-s)^{p-1}} \right] = 0$$

ist der erste Summand für jeden Werth von α und ϱ reell, da μ eine ganze Zahl ist. Da ferner $\frac{\Delta_{ph}(t)}{(t-s)^{p-1}}$ für $\varrho=0$ oder $t=s$ von α ganz unabhängig wird, so würde man, wenn der Grenzwert A dieses Quo-

tienten von Null verschieden wäre, den Winkel α so wählen können, dass das Product Ae^{at} imaginär wird, was mit dem Verschwinden der Summe $ca\rho^{m-1} + Ae^{at}$ unvereinbar ist. Da hiernach $\frac{\Delta_{g,h}(t)}{(t-s)^{p-1}}$ auch unter der gegenwärtigen Voraussetzung für $t=s$ verschwindet, so ist $\Delta_{g,h}(t)$, sobald $p < m$ ist, in allen Fällen durch $(t-s)^p$ theilbar. Dann aber ist auch die Derivirte von $\Delta(t)$ durch $(t-s)^p$, also $\Delta(t)$ selbst, weil es für $t=s$ verschwindet, durch $(t-s)^{p+1}$ theilbar, gegen die Voraussetzung. Folglich kann auch nicht $p < m$ sein, w. z. b. w.

Wenn $\Delta(t)$ durch die m^{te} , aber durch keine höhere Potenz von $t-s$ theilbar ist, so ist umgekehrt $(t-s)^{m-1}$ die höchste Potenz, durch welche sämtliche $\Delta_{g,g}(t)$ ohne Rest aufgehen. In der That bildet die Annahme des Gegentheils einen Widerspruch mit obigem Satze.

Da hiernach das Bestehen des Satzes mit einer Verletzung der ihm zu Grunde gelegten Bedingungen unverträglich ist, so sind diese zu seiner Gültigkeit nicht bloss ausreichend, sondern auch nothwendig. Dagegen sind sie nicht stets von einander unabhängig.

Ist nämlich in obigem Satze $m-1 > 1$, so ist die Bedingung, dass s eine Wurzel der Gleichung $\Delta(t) = 0$ sein soll, von selbst erfüllt.

Wenn die bilinearen Functionen φ, ψ den beiden ersten Bedingungen genügen, so ist dies offenbar auch mit den bilinearen Functionen φ_g, ψ_g der Fall, die man aus jenen erhält, indem man $u_g = 0, v_g = 0$ setzt. Da aber die Determinante von $\psi_g - t\varphi_g$ nichts Anderes als $\Delta_{g,g}(t)$ ist, so gelten für die Beziehungen zwischen dieser und ihren eigenen Unterdeterminanten dieselben Sätze, wie für die Beziehung zwischen $\Delta(t)$ und $\Delta_{g,g}(t)$ selbst.

Ist $\Delta_{g,g}(t)$ für jedes g durch $(t-s)^{m-1}$ theilbar, so muss hiernach in der identischen Gleichung

$$\Delta_{g,g}(t)\Delta_{h,h}(t) - \Delta_{g,h}(t)\Delta_{h,g}(t) = \Delta(t) \frac{\partial^2 \Delta(t)}{\partial(gg) \partial(hh)}$$

die rechte Seite, und mit ihr das zweite Glied der linken für jedes g und h mindestens $(m-2)$ -mal durch $t-s$ theilbar sein. Da aber $\Delta_{g,h}(t)$ und $\Delta_{h,g}(t)$ als conjugirte Grössen den reellen Factor $t-s$ gleich oft besitzen müssen, so enthält jede von ihnen diesen Factor mindestens $\left[\frac{m-1}{2}\right]$ -mal, wenn man so die grösste in $\frac{m-1}{2}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet. Aus dem linearen Ausdrücke von $\Delta(t)$ durch die Unterdeterminanten einer beliebigen Reihe folgt also, dass auch $\Delta(t)$ selbst den Factor $t-s$ mindestens $\left[\frac{m-1}{2}\right]$ -mal, also ihn jedenfalls besitzt, sobald $m-1 > 1$ ist.

Durch diese Sätze ist die Frage, ob und wieviel Linearfactoren von $\Delta(t)$ einander gleich sind, auf die Ermittlung derjenigen gemeinsamen Factoren der Unterdeterminanten $\Delta_{00}(t)$, $\Delta_{11}(t)$, $\dots$ $\Delta_{nn}(t)$ zurückgeführt, mit denen $\Delta(t)$ zugleich verschwindet.

Es lässt sich mittelst derselben auch umgekehrt beurtheilen, wie man zu den Bedingungen gelangen kann, welche erfüllt sein müssen, wenn die Anzahl der von einander verschiedenen Linearfactoren, und von jedem derselben der Exponent gegeben ist.

Um zu diesen Bedingungen zu gelangen, bedarf es nur einer Wiederholung der obigen Sätze.

Damit z. B. $\Delta(t)$ einen Linearfactor m -mal enthalte, muss jedes $\Delta_{gg}(t)$ ihn $(m-1)$ -mal besitzen; da aber der Satz auch für $\Delta_{gg}(t)$ gilt, so muss jede zweite Unterdeterminante $\frac{\partial^2 \Delta(t)}{\partial(gg) \partial(hh)}$ ihn $(m-2)$ -mal enthalten, u. s. w.

Umgekehrt, wenn alle Unterdeterminanten

$$\frac{\partial^{m-1} \Delta(t)}{\partial(g_1 g_1) \partial(g_2 g_2) \dots \partial(g_{m-1} g_{m-1})}$$

einen einzigen Linearfactor mit einander gemein haben, mit welchem zugleich alle zunächst vorangehenden Unterdeterminanten

$$\frac{\partial^{m-2} \Delta(t)}{\partial(g_1 g_1) \dots \partial(g_{m-2} g_{m-2})}$$

verschwinden, so ist $\Delta(t)$ durch ihn m -mal und nicht öfter theilbar.

Es wäre überflüssig, die hieraus für allgemeinere Fälle durch Zusammensetzung folgenden Regeln auszuführen; ebenso können Angaben über gelegentliche Erleichterungen bei der wirklichen Aufstellung der besprochenen Bedingungen übergangen werden, da sie durch das obige Theorem in Verbindung mit demjenigen, dessen Umkehrung es ist, offen dargelegt sind.

Zürich, 1864.

VII.

Ueber die kleinen Schwingungen eines periodisch eingerichteten Systems materieller Punkte.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 63, 1864, S. 273—288.)

Die vorliegende Abhandlung enthält die vollständige Lösung des bekannten Problems, die unendlich kleinen Schwingungen eines Systems räumlich getrennter materieller Punkte zu bestimmen, zwischen denen anziehende und abstossende Kräfte wirken, und welche in periodisch wiederkehrenden Gruppen im Raume vertheilt sind.

Cauchy, welcher mit diesem Problem der analytischen Optik eine neue Grundlage zu geben gedachte, legte demselben eine grosse Bedeutung bei, wie aus den zahlreichen Abhandlungen hervorgeht, in denen er sich mit diesem Problem beschäftigt. Dieselben finden sich, soweit sie mir bekannt geworden sind, in den Comptes rendus vom 9^{ten} bis zum 30^{sten} Bande und im 22^{sten} Bande der Memoiren der Pariser Akademie; die ersteren sind zum Theil in den Exercices wiederholt.

Der nächste Weg, welcher sich zur Lösung des vorliegenden Problems darbietet, besteht in der Ermittlung der Gesetze, nach denen die periodischen Bewegungen des Systems in ebenen Wellen erfolgen. Sind diese bekannt, so liefert der Fouriersche Satz unmittelbar die allgemeinen Formeln für die Bewegung, welche auf einen beliebigen Anfangszustand folgt.

Aber diese Lösung kann nicht als vollendet angesehen werden; im art. III. der folgenden Abhandlung wird nachgewiesen, dass die vielfachen Integrale, auf welche man durch den Fourierschen Satz geführt wird, Elemente enthalten, welche der Lösung vollkommen fremd sind, und welche daher durch eine Reduction jener Integrale ausgeschieden werden müssen.

Durch eine genauere Untersuchung der algebraischen Functionen, welche in diese Integrale eingehen, ist mir die verlangte Reduction gelungen, zunächst für die einfacheren Ausdrücke, welche Cauchy am Schlusse des §. 2. seiner Abhandlung über die Farbenzerstreuung giebt, dann auch für die Lösung des allgemeinen Problems.

In der vorliegenden Abhandlung ist der umgekehrte Weg eingeschlagen worden. Nachdem im art. III. nachgewiesen worden ist, welche Reductionen sich bei der Anwendung des Fourierschen Satzes als nothwendig herausstellen, wird die Aufgabe so gestellt und behandelt, dass man von Anfang an die Gewissheit hat, die Lösung in einer Form zu erhalten, welche keiner weitem Reduction mehr bedürftig ist.

Es hat sich auf diesem Wege das merkwürdige Resultat ergeben, dass die Bewegung des zu untersuchenden Systems, auch unter den allgemeinsten Voraussetzungen, stets nur von einer einzigen Klasse analytischer Functionen einer veränderlichen Grösse t abhängt, deren reelle Werthe die seit der anfänglichen Gleichgewichtsstörung verflossene Zeit bestimmen. Diese Functionen habe ich durch $T_{\lambda\lambda'\lambda''}^{hj}$ bezeichnet, und ihren Ausdruck durch ein dreifaches Integral mit endlicher Begrenzung im art. IX. Formel 18 angegeben.

I.

Obleich das Problem, mit welchem die vorliegende Abhandlung sich beschäftigt, allgemein bekannt ist, lässt sich doch eine ausführliche Darlegung desselben nicht füglich umgehen.

Ist Π ein System materieller Punkte, so wird dasselbe vollkommen homogen genannt, wenn es folgenden Bedingungen genügt:

- 1) Alle Punkte des Systems besitzen dieselbe Masse.
- 2) Sind a, b, c irgend welche Punkte des Systems, und zieht man aus c eine Gerade cd von gleicher Länge und Richtung wie ab , so ist d ebenfalls ein Punkt des Systems.

Fügt man zu diesen Bedingungen das Grundprincip der atomistischen Theorie,

- 3) dass die Entfernung zweier materieller Punkte, wie klein sie im Uebrigen auch sein mag, doch niemals unter jeder Grenze liegt,

so ist das System Π nothwendig ein reticulares, d. h. die materiellen Punkte dieses Systems befinden sich in den Durchschnittspunkten dreier Schaaren von Ebenen, welche den Raum in congruente Parallelepipeda zerlegen¹⁾; lässt man den besondern Fall, wo eine oder zwei Kanten dieser Parallelepipede unendlich gross sind, unberücksichtigt, so sind also die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z der verschiedenen Punkte $m_{i,r'}$ des Systems Π durch lineare Gleichungen

1) Man vergleiche Dirichlets Abhandlung über die positiven ternären quadr. Formen, dieses Journal Band 40.

$$\begin{aligned}
 x &= \alpha + al + a'l' + a''l'', \\
 m_{l'l''} \cdot y &= \beta + bl + b'l' + b''l'', \\
 z &= \gamma + cl + c'l' + c''l''
 \end{aligned}$$

gegeben, in denen l, l', l'' jedes ganzzahligen Werthes fähig, und die übrigen Grössen rechter Seite unveränderlich sind.

Diese Definition lässt sich, wie Cauchy bemerkt¹⁾, auf homogene Mittel, welche aus chemisch differenten Atomen zusammengesetzt sind, nur anwenden, wenn man sich die Massenpunkte $m_{l'l''}$ durch Atomen-gruppen ersetzt denkt, welche um jede Ecke der vorhin erwähnten Parallelepipede in gleicher Weise angeordnet sind.

Wir fügen hiernach zum homogenen System Π noch N andere, $\Pi_1, \Pi_2, \dots \Pi_N$, die so geordnet sind, dass die Coordinaten des zu Π_i gehörigen Punktes $m_{l'l''}^i$ mit den obigen durch die Gleichungen

$$m_{l'l''}^i \quad x_i - \alpha_i = x - \alpha, \quad y_i - \beta_i = y - \beta, \quad z_i - \gamma_i = z - \gamma$$

verbunden sind. Zu jeder Werthengruppe (l, l', l'') gehört dann eine Gruppe materieller Punkte $m_{l'l''}, m_{l'l''}^1, \dots m_{l'l''}^N$, die in ihren physikalischen Eigenschaften übereinstimmen oder von einander verschieden sein können. Diese Gruppen wiederholen sich periodisch auf dieselbe Weise, wie die Punkte des Systems Π ; ihre Gesamtheit kann also ebenfalls als ein homogenes System P angesehen werden.

Es sind nun die superponirbaren kleinen Schwingungen eines solchen periodisch eingerichteten Systems P , mit denen die gegenwärtige Arbeit sich beschäftigt. Und zwar fügen wir zu den obigen Voraussetzungen über die Einrichtung des Systems P noch die folgenden, welche die in ihm wirkenden Kräfte betreffen.

Wir setzen voraus, dass zwischen den einzelnen materiellen Punkten von P Attractionen (Anziehungen und Abstossungen) wirken, durch welche sie, bei der oben beschriebenen Einrichtung des Systems P , im stabilen relativen Gleichgewichte erhalten werden.

Es seien ferner $m_{l'l''}^i$ und $m_{l'+n, l''+n}^k$ zwei beliebige Punkte von P , deren Massen und Coordinaten beziehungsweise m^i, x_i, y_i, z_i und m^k, x'_k, y'_k, z'_k sind. Dann wirkt an m^i in Folge der gegenseitigen Attraction beider Punkte in ihrer Verbindungslinie eine Kraft, die bloss von ihrer Entfernung (ik) abhängt, und durch

$$\frac{\partial [ik]}{\partial (ik)}$$

1) Comptes rendus Tome 9, pag. 558.

bezeichnet werden soll. Die Componenten dieser Kraft werden also ausgedrückt durch

$$\frac{\partial[ik]}{\partial x'_k}, \quad \frac{\partial[ik]}{\partial y'_k}, \quad \frac{\partial[ik]}{\partial z'_k}.$$

Ueber die Massen $m, m', \dots m^N$, so wie über die Attractions-gesetze, welche durch das Zeichen $\frac{1}{m^i m^k} \frac{\partial[ik]}{\partial(i k)}$ bei verschiedenen Werthen der Indices i und k dargestellt werden, lassen wir die allgemeinsten Voraussetzungen bestehen; wir setzen also weder zwischen zwei von jenen $N + 1$ Massen, noch zwischen zwei von den im Allgemeinen denkbaren $\frac{1}{2}(N + 1)(N + 2)$ Attractionsgesetzen die Gleichheit voraus.

Da die Differenzen $x'_k - x_i, y'_k - y_i, z'_k - z_i$, von denen die erste nach der oben eingeführten Bezeichnung $= \alpha_k - \alpha_i + a n + a' n' + a'' n''$ ist, nur noch von den ganzen Zahlen n, n', n'' abhängen, welche für den angezogenen Punkt $m^i_{i' r' r''}$ die relative Lage des anziehenden Punktes $m^k_{i + n, i' + n', i'' + n''}$ bestimmen, so erhält man die Gleichgewichtsbedingungen für jeden Punkt $m^i_{i' r' r''}$ von Π_i , wenn man in den Gleichungen

$$(1.) \quad 0 = \sum_{nn'} \sum_k \frac{\partial[ik]}{\partial x'_k}, \quad 0 = \sum_{nn'} \sum_k \frac{\partial[ik]}{\partial y'_k}, \quad 0 = \sum_{nn'} \sum_k \frac{\partial[ik]}{\partial z'_k}$$

die erste Summation über alle ganzzahligen Werthe von n, n', n'' , die zweite über die Werthe $k = 0, 1, \dots N$ erstreckt, mit Weglassung des einzigen Gliedes ($n = n' = n'' = 0, k = i$).

Ertheilt man hierauf dem Index i der Reihe nach die Werthe $0, 1, \dots N$, so ergeben sich die vollständigen Bedingungen für das Gleichgewicht des Systems P .

II.

Da das relative Gleichgewicht von P der Voraussetzung gemäss stabil ist, so kann man seinen Punkten so kleine relative Ortsänderungen und Geschwindigkeiten ertheilen, dass dieselben in der nachfolgenden Bewegung unaufhörlich innerhalb beliebig enge gewählter Grenzen beharren.

Man kann also bewirken, dass jede relative Ortsänderung fortwährend unendlich klein bleibt. Dann lassen sich die beschleunigenden Kräfte in jedem Augenblicke durch die Ortsänderungen linear ausdrücken. Folglich sind die Bewegungen in unendlich kleinen relativen Ortsänderungen superponirbar.

Bezeichnet man zur Zeit t die zu den Axen parallelen Verschiebungen

$$(2.) \quad \begin{cases} \text{des Punktes } m_{l'l''}^i \text{ durch } \xi_{ll'r'}^i = \xi_i, \eta_{ll'r'}^i = \eta_i, \xi_{ll'r''}^i = \xi_i, \\ \text{des Punktes } m_{i+n, l'+n', l''+n''}^k \text{ durch } \xi_k, \eta_k, \xi_k, \end{cases}$$

so erhält man aus den Gleichungen (1.) die am Punkte $m_{l'l''}^i$ zur Zeit t wirkenden Componenten, wenn man auf der rechten Seite überall und für jedes k $x'_k - x_i, y'_k - y_i, z'_k - z_i$ durch $x'_k - x_i + \xi'_k - \xi_i, y'_k - y_i + \eta'_k - \eta_i, z'_k - z_i + \xi'_k - \xi_i$ ersetzt, also x'_k, y'_k, z'_k bezüglich um $\xi'_k - \xi_i, \eta'_k - \eta_i, \xi'_k - \xi_i$ wachsen lässt.

Daraus ergeben sich die Gleichungen für die superponirbaren Bewegungen des Systems P in folgender Gestalt:

$$(3.) \quad \begin{cases} m^i \frac{\partial^2 \xi_{ll'r'}^i}{\partial t^2} = \sum_{nn''} \sum_k \left[\frac{\partial^2 [ik]}{\partial x_k' \partial x_k'} (\xi'_k - \xi_i) + \frac{\partial^2 [ik]}{\partial x_k' \partial y_k'} (\eta'_k - \eta_i) + \frac{\partial^2 [ik]}{\partial x_k' \partial z_k'} (\xi'_k - \xi_i) \right], \\ m^i \frac{\partial^2 \eta_{ll'r'}^i}{\partial t^2} = \sum_{nn''} \sum_k \left[\frac{\partial^2 [ik]}{\partial x_k' \partial y_k'} (\xi'_k - \xi_i) + \frac{\partial^2 [ik]}{\partial y_k' \partial y_k'} (\eta'_k - \eta_i) + \frac{\partial^2 [ik]}{\partial y_k' \partial z_k'} (\xi'_k - \xi_i) \right], \\ m^i \frac{\partial^2 \xi_{ll'r''}^i}{\partial t^2} = \sum_{nn''} \sum_k \left[\frac{\partial^2 [ik]}{\partial x_k' \partial z_k'} (\xi'_k - \xi_i) + \frac{\partial^2 [ik]}{\partial y_k' \partial z_k'} (\eta'_k - \eta_i) + \frac{\partial^2 [ik]}{\partial z_k' \partial z_k'} (\xi'_k - \xi_i) \right]. \end{cases}$$

Dieselben müssen für alle ganzzahligen Werthe von l, l', l'' und für $i = 0, 1, \dots, N$ bestehen. Die Bedingung, dass bei den Summationen das Glied ($n = n' = n'' = 0, k = i$) weggelassen werden soll, braucht jetzt nicht mehr berücksichtigt zu werden, da bei diesen Werthen der Summationsindices die Factoren $\xi'_k - \xi_i$ u. s. w. sich auf Null reduciren.

III.

Seit den Untersuchungen Cauchys über die reticularen Systeme pflegt man den Anfangszustand eines solchen Systems durch stetige Functionen der Coordinaten auszudrücken, welche nicht bloss den materiellen Punkten des Systems, sondern auch den sie umgebenden massenfreien Punkten Anfangsverschiebungen und Geschwindigkeiten anweisen.

Indem man hierauf die Differentialgleichungen der Bewegung auf alle Punkte des Raumes ausdehnt, bestimmt man mittelst des Fourierschen Satzes eine Bewegung des continuirlichen Raumes, an welcher die in ihn eingetauchten materiellen Punkte ihrem Orte gemäss theilnehmen.

Bei diesem Verfahren wird die Bewegung des materiellen Punktsystems abhängig gemacht, nicht bloss von seinem eigenen Anfangszustande, was für jeden einzelnen Punkt desselben in irgend einem Umfange der Fall sein muss, sondern auch noch vom Anfangszustande des massenfreien Raumes, was in Wirklichkeit nicht der Fall sein kann.

Von diesen, der Lösung nothwendig fremden Elementen kann dieselbe nur durch die Reduction der vielfachen Integrale befreit werden, welche durch den Fourierschen Satz eingeführt worden sind.

Um diesen Uebelstand zu vermeiden, geben wir den Anfangszustand des Systems P unmittelbar durch die Verschiebungen und Geschwindigkeiten seiner eigenen Punkte. Sei

$$(4.) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \text{für } t = 0, & \xi_{i'l''}^i = \xi_i = V_{i'l''}^{3i}, & \frac{\partial \xi_i}{\partial t} = G_{i'l''}^{3i}, \\ & \eta_{i'l''}^i = \eta_i = V_{i'l''}^{3i+1}, & \frac{\partial \eta_i}{\partial t} = G_{i'l''}^{3i+1}, \\ & \zeta_{i'l''}^i = \zeta_i = V_{i'l''}^{3i+2}, & \frac{\partial \zeta_i}{\partial t} = G_{i'l''}^{3i+2}. \end{array} \right.$$

Dann lässt sich das zu lösende Problem wie folgt aussprechen:

Es sollen, für alle ganzzahligen Werthe von l, l', l'' und für $i = 0, 1, \dots N$

$$\xi_{i'l''}^i, \quad \eta_{i'l''}^i, \quad \zeta_{i'l''}^i$$

als Functionen der Zeit t und der Anfangswerthe V und G den Gleichungen (3.) und (4.) gemäss bestimmt werden.

IV.

Unsere nächste Aufgabe besteht darin, zu ermitteln, in welcher Weise die gesuchten Functionen von den Anfangswerthen abhängen.

Zu diesem Zwecke lassen wir an Stelle des durch die Gleichung (4.) dargestellten Anfangszustandes einen andern treten, in welchem nur der Punkt

$$m_{\lambda+l, \lambda'+l', \lambda''+l''}^k$$

in seinem Gleichgewichte gestört worden ist, und auch diesem Punkte nur unendlich kleine Verschiebungen und Geschwindigkeiten $\partial V, \partial V', \partial V''$ und $\partial G, \partial G', \partial G''$ ertheilt worden sind. Aus dieser Gleichgewichtstörung entspringt eine Bewegung des Systems P , in welchem wir die Verschiebungen des Punktes

$$m_{i'l''}^i$$

zur Zeit t durch X, Y, Z bezeichnen wollen.

Wir wollen zweitens voraussetzen, dass man zur Zeit $t = 0$, ohne das Gleichgewicht der übrigen Punkte des Systems zu stören,

die Verschiebungen ∂V , $\partial V'$, $\partial V''$ und die Geschwindigkeiten ∂G , $\partial G'$, $\partial G''$ dem Punkte

$$m_{\lambda\lambda''}^k$$

ertheilt habe. Bezeichnet man alsdann in der hieraus erfolgenden Bewegung des Systems P die Verschiebungen des Punktes

$$m_{000}^i$$

zur Zeit t durch $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, so muss wegen der Einrichtung des Systems P

$$X = \mathfrak{X}, \quad Y = \mathfrak{Y}, \quad Z = \mathfrak{Z}$$

sein. In der That werden die im zweiten Falle gemachten Voraussetzungen mit den auf den ersten Fall bezüglichen völlig identisch, wenn man das System P ohne Drehung so lange verschiebt, bis der Punkt $m_{\lambda\lambda''}^k$ nach $m_{\lambda+i, \lambda'+r, \lambda''+r''}^k$ rückt, wobei dann jeder Punkt $m_{\lambda\lambda''}^i$ nach $m_{\lambda+i, \lambda'+r, \lambda''+r''}^i$, und insbesondere m_{000}^i nach $m_{i r r''}^i$ geschoben wird.

Für die Grössen X , $\mathfrak{X}$, Y , ... lassen sich aber leicht bestimmte Ausdrücke finden. Superponirt man nämlich jeden der beiden Anfangszustände, aus denen sie entspringen, mit dem durch die Gleichungen (4.) bestimmten, so werden *im ersten Falle* die Anfangswerthe $(V^{3k}, G^{3k}, V^{3k+1}, \dots)_{\lambda+i, \lambda'+r, \lambda''+r''}$ um ∂V , ∂G , $\partial V'$, ..., und in Folge dessen die Verschiebungen $(\xi, \eta, \zeta)_{i r r''}$ um X , Y , Z vermehrt; *im zweiten Falle*, wo die Aenderungen ∂V , ∂G , $\partial V'$, ... den Anfangswerthen $(V^{3k}, G^{3k}, V^{3k+1}, \dots)_{\lambda\lambda''}$ ertheilt werden, ändern sich $(\xi, \eta, \zeta)_{000}$ um $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$.

Drückt man demnach die Verschiebungen X , $\mathfrak{X}$, Y , ... durch die Differentiale der Grössen $\xi_{i r r''}^i$, ξ_{000}^i , $\eta_{i r r''}^i$, ... nach den geänderten Anfangswerthen aus, so ergiebt sich aus ihrer Gleichheit z. B.

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial \xi_{i r r''}^i}{\partial V_{\lambda+i, \lambda'+r, \lambda''+r''}^{3k}} \cdot \partial V + \frac{\partial \xi_{i r r''}^i}{\partial G_{\lambda+i, \lambda'+r, \lambda''+r''}^{3k}} \cdot \partial G + \frac{\partial \xi_{i r r''}^i}{\partial V_{\lambda+i, \lambda'+r, \lambda''+r''}^{3k+1}} \cdot \partial V' + \dots \\ = \mathfrak{X} &= \frac{\partial \xi_{000}^i}{\partial V_{\lambda\lambda''}^{3k}} \cdot \partial V + \frac{\partial \xi_{000}^i}{\partial G_{\lambda\lambda''}^{3k}} \cdot \partial G + \frac{\partial \xi_{000}^i}{\partial V_{\lambda\lambda''}^{3k+1}} \cdot \partial V' + \dots, \end{aligned}$$

und allgemein, wenn man einen der Buchstaben ξ , η , ζ durch (ξ, η, ζ) , und einen der Buchstaben V , G durch (V, G) bezeichnet

$$(5.) \quad \frac{\partial (\xi, \eta, \zeta)_{i r r''}^i}{\partial (V, G)_{\lambda+i, \lambda'+r, \lambda''+r''}^{3k}} = \frac{\partial (\xi, \eta, \zeta)_{000}^i}{\partial (V, G)_{\lambda\lambda''}^{3k}},$$

für $i = 0, 1, \dots N, j = 0, 1, \dots 3N + 2$, und alle ganzzahligen Werthe von $\lambda, \lambda', \lambda'', l, l', l''$.

Wir setzen von jetzt an

$$(6.) \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi_{000}^i}{\partial V_{\lambda \lambda' \lambda''}^j} = R_{\lambda \lambda' \lambda''}^{3i, j}, & \frac{\partial \eta_{000}^i}{\partial V_{\lambda \lambda' \lambda''}^j} = R_{\lambda \lambda' \lambda''}^{3i+1, j}, & \frac{\partial \xi_{000}^i}{\partial V_{\lambda \lambda' \lambda''}^j} = R_{\lambda \lambda' \lambda''}^{3i+2, j}, \\ \frac{\partial \xi_{000}^i}{\partial G_{\lambda \lambda' \lambda''}^j} = S_{\lambda \lambda' \lambda''}^{3i, j}, & \frac{\partial \eta_{000}^i}{\partial G_{\lambda \lambda' \lambda''}^j} = S_{\lambda \lambda' \lambda''}^{3i+1, j}, & \frac{\partial \xi_{000}^i}{\partial G_{\lambda \lambda' \lambda''}^j} = S_{\lambda \lambda' \lambda''}^{3i+2, j}, \end{cases}$$

und werden im folgenden art. zeigen, wie sich die Bestimmung der Functionen ξ, η, ζ vollständig auf die Ermittlung der Functionen R und S zurückführen lässt.

V.

Zunächst ergibt sich aus den für $t = 0$ stattfindenden Gleichungen

$$\xi_{000}^i = V_{000}^{3i}, \quad \frac{\partial \xi_{000}^i}{\partial t} = G_{000}^{3i}, \quad \eta_{000}^i = V_{000}^{3i+1}, \text{ u. s. w. mit Hülfe der Gleichungen (6.),}$$

dass für $t = 0$, mit einziger Ausnahme von

$$R_{000}^{j, j} \quad \text{und} \quad \frac{\partial S_{000}^{j, j}}{\partial t} \quad (j = 0, 1, \dots 3N + 2),$$

welche gleich 1 werden, alle übrigen Functionen $R, S, \frac{\partial R}{\partial t}, \frac{\partial S}{\partial t}$ verschwinden.

Ferner erhält man aus den Gleichungen (3.), indem man sie nach einem Anfangswerthe differentiirt, mit Hülfe der Gleichungen (5.) Differentialgleichungen, denen die Functionen R und S genügen müssen.

Beachtet man, dass nach (5.) und (6.) auf Grund der in art. II eingeführten Bezeichnung

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)_k}{\partial(V, G)_{\lambda+l, \lambda'+r, \lambda''+r'}}^j &= \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)_{i+n, r'+n', r''+n''}^k}{\partial(V, G)_{\lambda+l, \lambda'+r, \lambda''+r'}^j} = \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)_{000}^k}{\partial(V, G)_{\lambda-n, \lambda'-n', \lambda''-n''}^j} \\ &= (P^{3k, j}, P^{3k+1, j}, P^{3k+2, j})_{\lambda-n, \lambda'-n', \lambda''-n''}, \\ \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)_i}{\partial(V, G)_{\lambda+l, \lambda'+r, \lambda''+r'}^j} &= (P^{3i, j}, P^{3i+1, j}, P^{3i+2, j})_{\lambda \lambda' \lambda''} \end{aligned}$$

ist, wo P durch R oder S zu ersetzen ist, jenachdem man nach V oder G differentiirt, so erkennt man sofort, dass man, um die Gleichungen (3.) nach $(V, G)_{\lambda+l, \lambda'+r, \lambda''+r'}^j$ zu differentiiren, nur nöthig hat, dort überall

$$\xi_i, \eta_i, \zeta_i \quad \text{durch} \quad P_{\lambda \lambda' \lambda''}^{3i, j}, P_{\lambda \lambda' \lambda''}^{3i+1, j}, P_{\lambda \lambda' \lambda''}^{3i+2, j}$$

und die Differenzen

$$\xi'_k - \xi_i, \quad \eta'_k - \eta_i, \quad \zeta'_k - \zeta_i$$

durch

$$P_{\lambda-n, \lambda'-n', \lambda''-n''}^{3k, j} - P_{\lambda \lambda' \lambda''}^{3i, j} = \mathfrak{P}^{3k, 3i}, \quad P_{\lambda-n, \lambda'-n', \lambda''-n''}^{3k+1, j} - P_{\lambda \lambda' \lambda''}^{3i+1, j} = \mathfrak{P}^{3k+1, 3i+1},$$

$$P_{\lambda-n, \lambda'-n', \lambda''-n''}^{3k+2, j} - P_{\lambda \lambda' \lambda''}^{3i+2, j} = \mathfrak{P}^{3k+2, 3i+2}$$

zu ersetzen.

Behält man diese Bezeichnung zur Abkürzung bei, so ergibt sich also

$$(7.) \quad \begin{cases} m^i \frac{\partial^3 P_{\lambda \lambda' \lambda''}^{3i, j}}{\partial t^3} = \sum_{n, n', n''} \sum_k \left[\frac{\partial^3 [ik]}{\partial x_k^3} \mathfrak{P}^{3k, 3i} + \frac{\partial^3 [ik]}{\partial x_k^2 \partial y_k} \mathfrak{P}^{3k+1, 3i+1} + \frac{\partial^3 [ik]}{\partial x_k \partial z_k} \mathfrak{P}^{3k+2, 3i+2} \right], \\ m^i \frac{\partial^3 P_{\lambda \lambda' \lambda''}^{3i+1, j}}{\partial t^3} = \sum_{n, n', n''} \sum_k \left[\frac{\partial^3 [ik]}{\partial x_k^2 \partial y_k} \mathfrak{P}^{3k, 3i} + \frac{\partial^3 [ik]}{\partial y_k^2} \mathfrak{P}^{3k+1, 3i+1} + \frac{\partial^3 [ik]}{\partial y_k \partial z_k} \mathfrak{P}^{3k+2, 3i+2} \right], \\ m^i \frac{\partial^3 P_{\lambda \lambda' \lambda''}^{3i+2, j}}{\partial t^3} = \sum_{n, n', n''} \sum_k \left[\frac{\partial^3 [ik]}{\partial x_k \partial z_k} \mathfrak{P}^{3k, 3i} + \frac{\partial^3 [ik]}{\partial y_k \partial z_k} \mathfrak{P}^{3k+1, 3i+1} + \frac{\partial^3 [ik]}{\partial z_k^2} \mathfrak{P}^{3k+2, 3i+2} \right]. \end{cases}$$

Fügt man zu diesen Gleichungen die Bedingung, dass

für $t = 0$ und $j = 0, 1, \dots, 3N+2$

$$(8.) \quad P_{000}^{j, j} = \mathfrak{A}^j, \quad \frac{\partial P_{000}^{j, j}}{\partial t} = \mathfrak{B}^j$$

werde, und alle übrigen Functionen P und $\frac{\partial P}{\partial t}$ verschwinden,

so wird offenbar

I. $P = R$, wenn man alle $\mathfrak{A}^j = 1$, alle $\mathfrak{B}^j = 0$ setzt;

II. $P = S$, wenn man alle $\mathfrak{A}^j = 0$, alle $\mathfrak{B}^j = 1$ setzt,

gleiche Indices bei P , R und S vorausgesetzt.

Diese Bedingungen zeigen, was auch für sich klar ist, dass die Functionen R und S von den Anfangswerthen V und G unabhängig sind; also sind (5.) und (6.) die Verschiebungen ξ , η und ζ lineare Functionen derselben. Da diese Functionen verschwinden, wenn man alle Anfangswerthe auf Null reducirt, so erhält man aus den Gleichungen (5.) und (6.)

$$(9.) \quad \begin{cases} \xi_{i, r, r'} = \sum_{\lambda \lambda' \lambda''} \sum_j [R_{\lambda \lambda' \lambda''}^{3i, j} V_{\lambda+i, \lambda'+r, \lambda''+r'}^j + S_{\lambda \lambda' \lambda''}^{3i, j} G_{\lambda+i, \lambda'+r, \lambda''+r'}^j], \\ \eta_{i, r, r'} = \sum_{\lambda \lambda' \lambda''} \sum_j [R_{\lambda \lambda' \lambda''}^{3i+1, j} V_{\lambda+i, \lambda'+r, \lambda''+r'}^j + S_{\lambda \lambda' \lambda''}^{3i+1, j} G_{\lambda+i, \lambda'+r, \lambda''+r'}^j], \\ \zeta_{i, r, r'} = \sum_{\lambda \lambda' \lambda''} \sum_j [R_{\lambda \lambda' \lambda''}^{3i+2, j} V_{\lambda+i, \lambda'+r, \lambda''+r'}^j + S_{\lambda \lambda' \lambda''}^{3i+2, j} G_{\lambda+i, \lambda'+r, \lambda''+r'}^j], \end{cases}$$

wo von den beiden Summationen sich die erste über alle ganzzahligen Werthe von $\lambda, \lambda', \lambda''$, und die zweite sich über die Werthe $j = 0, 1, 2, \dots 3N + 2$ erstreckt.

VI.

Man kann eine Particularlösung der Gleichungen (7.) finden, indem man jede Function $P_{rrr'}$ zur Exponentialgrösse $e^{(u+u'+u'')V^{-1}}$ proportional setzt, wobei u, u', u'' Constanten bedeuten, welche willkürlich bleiben. Durch Superposition solcher Particularlösungen muss man hierauf den Anfangsbedingungen (8.) Genüge leisten.

In Folge der besondern Beschaffenheit dieser Anfangsbedingungen ist es leicht, im Voraus das Resultat der eben bezeichneten Superposition zu erkennen. Es sei Ω eine Function der Variablen t, u, u', u'' , welche ebenso wie ihre erste Derivirte $\frac{\partial \Omega}{\partial t}$ für $t = 0$ von u, u', u'' unabhängig wird. Entwickelt man diese beiden Functionen für alle zwischen $-\pi$ und π enthaltenen Werthe von u, u', u'' nach Exponentialgrößen $e^{(\lambda u + \lambda' u' + \lambda'' u'')V^{-1}}$, so verschwinden für $t = 0$ alle Coefficienten in diesen Entwicklungen bis auf diejenigen, welche der Voraussetzung $\lambda = \lambda' = \lambda'' = 0$ entsprechen. Dies ist genau die von den Functionen $P_{\lambda\lambda\lambda''}$ verlangte Eigenschaft. Wir setzen demnach

$$(10.) \quad P_{\lambda\lambda\lambda''}^{h,j} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \Omega^{h,j} e^{(\lambda u + \lambda' u' + \lambda'' u'')V^{-1}} \partial u \partial u' \partial u'',$$

wo jede Integration zwischen den Grenzen $-\pi$ und π auszuführen ist.

Dann verlangen die Anfangsbedingungen (8.), dass man für $t = 0$ habe

$$(11.) \quad \Omega^{jj} = \mathfrak{A}^j, \quad \frac{\partial \Omega^{jj}}{\partial t} = \mathfrak{B}^j, \quad \Omega^{hj} = 0, \quad \frac{\partial \Omega^{hj}}{\partial t} = 0,$$

wenn h von j verschieden ist.

Ferner ergibt sich aus (10.)

$$P_{\lambda-\pi, \lambda'-\pi, \lambda''-\pi}^{h,j} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \Omega^{h,j} e^{(\lambda u + \dots)V^{-1}} \cdot e^{-(\pi u + \dots)V^{-1}} \partial u \partial u' \partial u''.$$

Wir setzen diese Ausdrücke in die Gleichungen (7.) ein, und bedienen uns folgender abkürzender Bezeichnung:

$$e^{-(\pi u + \pi' u' + \pi'' u'')V^{-1}} = \omega,$$

(ferner in der ersten Gleichung

$$\begin{aligned} \sum_{n,n'} \sum_{k=0}^N \frac{\partial^2[ik]}{\partial x'_k{}^2} - \sum_{n,n'} \frac{\partial^2[ii]}{\partial x'_i{}^2} \cdot \omega &= (3i, 3i), & - \sum_{n,n'} \frac{\partial^2[ik]}{\partial x'_k{}^2} \cdot \omega &= (3i, 3k), \\ \sum \sum \frac{\partial^2[ik]}{\partial x'_k \partial y'_k} - \sum \frac{\partial^2[ii]}{\partial x'_i \partial y'_i} \cdot \omega &= (3i, 3i+1), & - \sum \frac{\partial^2[ik]}{\partial x'_k \partial y'_k} \cdot \omega &= (3i, 3k+1), \\ \sum \sum \frac{\partial^2[ik]}{\partial x'_k \partial z'_k} - \sum \frac{\partial^2[ii]}{\partial x'_i \partial z'_i} \cdot \omega &= (3i, 3i+2), & - \sum \frac{\partial^2[ik]}{\partial x'_k \partial z'_k} \cdot \omega &= (3i, 3k+2), \end{aligned}$$

in der zweiten

$$(12.) \quad \begin{aligned} \sum \sum \frac{\partial^2[ik]}{\partial x'_k \partial y'_k} - \sum \frac{\partial^2[ii]}{\partial x'_i \partial y'_i} \cdot \omega &= (3i+1, 3i), & - \sum \frac{\partial^2[ik]}{\partial x'_k \partial y'_k} \cdot \omega &= (3i+1, 3k), \\ \sum \sum \frac{\partial^2[ik]}{\partial y'_k{}^2} - \sum \frac{\partial^2[ii]}{\partial y'_i{}^2} \cdot \omega &= (3i+1, 3i+1), & - \sum \frac{\partial^2[ik]}{\partial y'_k{}^2} \cdot \omega &= (3i+1, 3k+1), \\ \sum \sum \frac{\partial^2[ik]}{\partial y'_k \partial z'_k} - \sum \frac{\partial^2[ii]}{\partial y'_i \partial z'_i} \cdot \omega &= (3i+1, 3i+2), & - \sum \frac{\partial^2[ik]}{\partial y'_k \partial z'_k} \cdot \omega &= (3i+1, 3k+2), \end{aligned}$$

und in der dritten

$$\begin{aligned} \sum \sum \frac{\partial^2[ik]}{\partial x'_k \partial z'_k} - \sum \frac{\partial^2[ii]}{\partial x'_i \partial z'_i} \cdot \omega &= (3i+2, 3i), & - \sum \frac{\partial^2[ik]}{\partial x'_k \partial z'_k} \cdot \omega &= (3i+2, 3k), \\ \sum \sum \frac{\partial^2[ik]}{\partial y'_k \partial z'_k} - \sum \frac{\partial^2[ii]}{\partial y'_i \partial z'_i} \cdot \omega &= (3i+2, 3i+1), & - \sum \frac{\partial^2[ik]}{\partial y'_k \partial z'_k} \cdot \omega &= (3i+2, 3k+1), \\ \sum \sum \frac{\partial^2[ik]}{\partial z'_k{}^2} - \sum \frac{\partial^2[ii]}{\partial z'_i{}^2} \cdot \omega &= (3i+2, 3i+2), & - \sum \frac{\partial^2[ik]}{\partial z'_k{}^2} \cdot \omega &= (3i+2, 3k+2), \end{aligned}$$

wo die Gleichungen der zweiten Verticalreihe k und i als von einander verschieden voraussetzen.

Unterscheidet man in den Gleichungen (7.) die beiden Fälle, wo $k=i$ oder k von i verschieden ist, so erkennt man, dass dieselben sich mit Hilfe der vorstehenden Bezeichnungen in die folgenden verwandeln, in denen

$$\frac{1}{(2\pi)^3} e^{(\lambda u + \lambda' u' + \lambda'' u'') V - 1} \partial u \partial u' \partial u'' = \partial E_{\lambda \lambda' \lambda''}$$

gesetzt ist:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial E_{\lambda \lambda' \lambda''} \left[m^i \frac{\partial^2 \Omega^{3i,j}}{\partial t^2} + \sum_k ((3i, 3k) \Omega^{3k,j} + (3i, 3k+1) \Omega^{3k+1,j} + (3i, 3k+2) \Omega^{3k+2,j}) \right], \\ 0 &= \partial E_{\lambda' \lambda'' \lambda} \left[m^i \frac{\partial^2 \Omega^{3i+1,j}}{\partial t^2} + \sum_k ((3i+1, 3k) \Omega^{3k,j} + (3i+1, 3k+1) \Omega^{3k+1,j} + (3i+1, 3k+2) \Omega^{3k+2,j}) \right], \\ 0 &= \partial E_{\lambda \lambda'' \lambda'} \left[m^i \frac{\partial^2 \Omega^{3i+2,j}}{\partial t^2} + \sum_k ((3i+2, 3k) \Omega^{3k,j} + (3i+2, 3k+1) \Omega^{3k+1,j} + (3i+2, 3k+2) \Omega^{3k+2,j}) \right], \end{aligned}$$

wo k bei der Summation die Werthe $0, 1, \dots, N$ durchläuft.

Diese Gleichungen müssen für alle ganzzahligen Werthe von $\lambda, \lambda', \lambda''$ bestehen. Da aber die in den eckigen Klammern stehenden Functionen von $\lambda, \lambda', \lambda''$ unabhängig sind, so ergibt sich aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, dass sie gleich Null sein müssen für alle zwischen $-\pi$ und π liegenden Werthe von u, u', u'' , d. h. für alle Werthe, welche diese Variablen während der Integration durchlaufen.

Jede der vorstehenden Gleichungen liefert also eine Differentialgleichung zwischen den einzelnen Functionen Ω . Setzt man der Symmetrie wegen in der ersten $m^i = \mu_{3i}$, in der zweiten $m^i = \mu_{3i+1}$, in der dritten $m^i = \mu_{3i+2}$, so dass man für $i = 0, 1, \dots N$ hat

$$(13.) \quad \mu_{3i} = \mu_{3i+1} = \mu_{3i+2} = m^i,$$

so treten diese Gleichungen sämmtlich in die nämliche Form; man erhält für

$$h, j = 0, 1, \dots 3N + 2$$

$$(14.) \quad \mu_h \frac{\partial^2 \Omega^{hj}}{\partial t^2} + \sum_{g=0}^{g=3N+2} (hg) \Omega^{gj} = 0.$$

Auf diese Weise ist das ursprüngliche Problem auf die Integration des vorstehenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Rücksicht auf die in (11.) gestellten Anfangsbedingungen zurückgeführt. Zu dieser Integration sind indessen einige Vorbereitungen erforderlich.

VII.

Vor allem ist es notwendig, gewisse Eigenschaften der Coefficienten (hg) festzustellen.

Zunächst ergibt sich aus ihrer Entstehung, dass sie nicht bloss von der Zeit t unabhängig sind, sondern auch von der Stelle, welche der Punkt $m_{i,i',i''}^i$ im System Π_i oder P einnimmt.

Eine zweite Eigenschaft ergibt sich unmittelbar aus den Gleichungen (12.). Sie ist in der Gleichung

$$(3i + \chi, 3k + \varrho) = (3i + \varrho, 3k + \chi)$$

enthalten, wenn ϱ und χ nach Belieben aus den Zahlen 0, 1, 2 ausgewählt werden.

Die dritte Eigenschaft, deren Kenntniss nothwendig ist, besteht darin, dass die beiden Grössen (gh) und (hg) , welche im Allgemeinen complexe Werthe haben, stets zu einander conjugirt sind.

Zum Beweise dieser Behauptung werden wir in den Ausdrücken der verschiedenen Grössen (gh) die Vorzeichen der Indices n, n', n'' ändern, was auf den Werth dieser Ausdrücke offenbar keinen Einfluss hat.

Dann erkennt man zunächst leicht, dass die Grössen $(3i + \chi, 3i + \varrho)$ sämtlich reell sind. Da ausserdem $(3i + \chi, 3i + \varrho) = (3i + \varrho, 3i + \chi)$ ist, so wird in diesem Falle der obigen Behauptung nicht widersprochen.

Wir wollen nun unter der Voraussetzung, dass k von i verschieden ist, die beiden Factoren untersuchen, welche im Ausdrucke von $(3i + \chi, 3k + \varrho)$ unter dem Summenzeichen stehen.

Da man nach art. I. und II.

$$x'_k - x_i = \alpha_k - \alpha_i + an + a'n' + a''n'', \quad x'_i - x_k = \alpha_i - \alpha_k + an + \dots$$

hat, und ähnliche Gleichungen für die anderen Coordinatendifferenzen gelten, so folgt, dass $x'_k - x_i, y'_k - y_i, z'_k - z_i$ durch Aenderung des Vorzeichens von n, n', n'' in $-(x'_i - x_k), -(y'_i - y_k), -(z'_i - z_k)$ verwandelt werden. Gleichzeitig gehen also die Ausdrücke

$$\frac{\partial^2[ik]}{\partial x_k'^2}, \quad \frac{\partial^2[ik]}{\partial y_k' \partial x_k'} \text{ u. s. w. über in } \frac{\partial^2[k i]}{\partial x_i'^2}, \quad \frac{\partial^2[k i]}{\partial y_i' \partial x_i'} \text{ u. s. w.}$$

Hieraus folgt, dass in den Gleichungen (12.) der Zeichenwechsel der Indices n, n', n'' nur zur Folge hat, dass auf der linken Seite 1) die Zahlen i und k vertauscht werden, und 2) in der Exponentialgrösse $\omega = e^{-(n + \dots)\sqrt{-1}}$ die $\sqrt{-1}$ das entgegengesetzte Zeichen erhält. Dadurch wird aber die Grösse $(3i + \chi, 3k + \varrho)$ ohne Aenderung ihres Werthes in die Conjugirte von $(3k + \chi, 3i + \varrho) = (3k + \varrho, 3i + \chi)$ verwandelt, w. z. b. w.

Man kann endlich noch eine vierte Eigenschaft dieser Grössen (gh) bemerken; dieselben sind nämlich in Bezug auf jede der drei Variablen u, u', u'' periodisch, mit der Periode 2π . Daraus zieht man leicht den Schluss, dass die durch die Gleichungen (11.) und (14.) bestimmten Functionen $\mathcal{Q}$ die nämliche Periodicität darbieten müssen.

VIII.

Setzt man

$$\psi^j = \sum_{g,h} (hg) \mathcal{Q}^{g,j} H^h, \quad \varphi^j = \sum_g \mu_g \mathcal{Q}^{g,j} H^g,$$

so kann man die Gleichungen (14.) in folgende Form bringen:

$$(15.) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial H^h} \right) + \frac{\partial \psi^j}{\partial H^h} = 0, \quad h = 0, 1, \dots, 3N + 2.$$

Da diese Gleichungen linear, und ihre Coefficienten constant sind, so hängt ihre Integration, wie bekannt, nur von der Untersuchung der Determinante der bilinearen Function

$$\psi^j - x \varphi^j$$

und ihrer Unterdeterminanten ab.

Vergleicht man aber die Ausdrücke der Functionen ψ^j und φ^j mit denjenigen, welche in der Abhandlung über die Verallgemeinerung einiger Theoreme des Herrn *Weierstrass* (p. 125) durch ψ und φ bezeichnet wurden, so erkennt man sofort, dass die dort gemachten Voraussetzungen im gegenwärtigen Falle erfüllt sind.

Setzt man nämlich $[hh] = \mu_h$ und, so lange g von h verschieden ist, $[gh] = 0$, so wird

$$\varphi^j = \sum [hg] \Omega^{gj} H^h,$$

und es sind nun (gh) und (hg) , sowie $[gh]$ und $[hg]$ zu einander conjugirt, wie dort verlangt wurde. Setzt man ferner $\Omega^{hj} = x_h + iy_h$, $H^h = x_h - iy_h$, so wird $\varphi^j = \sum \mu_h (x_h^2 + y_h^2)$. Dies kann, da sämmtliche μ als Massen materieller Punkte positiv sind, nur verschwinden, wenn alle reellen Variablen x und y sich zugleich auf Null reduciren.

Bezeichnet man daher durch

$$\mathcal{A}(x) = \begin{vmatrix} (00) - \mu x & (01) & \dots \\ (10) & (11) - \mu x & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

die Determinante von $\psi^j - x\varphi^j$, und durch $\mathcal{A}_{ik}(x)$ die aus einer Aenderung des Elementes (ik) entspringende Unterdeterminante von $\mathcal{A}(x)$, so folgt

I. dass alle Wurzeln der Gleichung $\mathcal{A}(x) = 0$ reell sind.

Bezeichnet man die von einander verschiedenen Wurzeln dieser Gleichung $3N + 3^{\text{ten}}$ Grades durch

$$s^2, s_1^2, \dots, s_p^2,$$

so folgt weiter,

II. dass man durch Zerfällung in Partialbrüche

$$\frac{\mathcal{A}_{ik}(x)}{\mathcal{A}(x)} = \sum_s \frac{A_{ik}^s}{s_j^2 - x}$$

erhält, wo die Factoren A von x unabhängig sind, und die Summation sich über die verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\mathcal{A}(x) = 0$ erstreckt.

Endlich zieht man aus den Gleichungen (9.) der angeführten Abhandlung für den vorliegenden Fall die folgenden:

$$(III.) \quad \begin{cases} \Omega^{gj} = \sum_s \sum_h A_{gh}^s \frac{\partial \varphi^j}{\partial H^h}, \\ \sum_h A_{gh}^s \frac{\partial \psi^j}{\partial H^h} - s_j^2 \sum_h A_{gh}^s \frac{\partial \varphi^j}{\partial H^h}, \end{cases}$$

welche bei jeder Bedeutung der Grössen Ω^{0j} , Ω^{1j} , ... stattfinden.

Setzt man also

$$(16.) \quad \sum_h A_{gh}^\delta \frac{\partial \varphi^j}{\partial H^h} = \sum_h \mu_h A_{gh}^\delta \Omega^{hj} = \Omega^{gj\delta},$$

so folgt aus den Gleichungen (III.)

$$(17.) \quad \begin{cases} \Omega^{gj} = \sum_\delta \Omega^{gj\delta}, \\ \sum_h A_{gh}^\delta \frac{\partial \psi^j}{\partial H^h} = s_\delta^2 \Omega^{gj\delta}. \end{cases}$$

Dies festgestellt, multipliciren wir die Gleichung (15.) mit A_{gh}^δ , und addiren hierauf die aus ihr für $h = 0, 1, \dots, 3N+2$ entspringenden Gleichungen zu einander; dann folgt

$$\frac{\partial^2 \Omega^{gh\delta}}{\partial t^2} + s_\delta^2 \Omega^{gj\delta} = 0.$$

Da man aus (16.) und (11.) für $t = 0$

$$\Omega^{gj\delta} = \mu_j A_{gj}^\delta \mathfrak{A}^j, \quad \frac{\partial \Omega^{gj\delta}}{\partial t} = \mu_j A_{gj}^\delta \mathfrak{B}^j$$

erhält, so ist also für ein beliebiges t

$$\Omega^{gj\delta} = \mu_j A_{gj}^\delta \left[\mathfrak{A}^j \cos s_\delta t + \mathfrak{B}^j \frac{\sin s_\delta t}{s_\delta} \right],$$

mithin, wegen der Gleichung (17.)

$$\Omega^{gj} = \mu_j \sum_\delta A_{gj}^\delta \left[\mathfrak{A}^j \cos s_\delta t + \mathfrak{B}^j \frac{\sin s_\delta t}{s_\delta} \right].$$

IX.

Aus dem eben gefundenen Ausdrücke der Functionen Ω ergibt sich mit Rücksicht auf die Gleichung (10.), dass man, wenn

$$(18.) \quad \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_g \int A_{gh}^\delta \frac{\sin s_\delta t}{s_\delta} e^{(2u + \lambda' u' + \lambda'' u'' \sqrt{-1})} \partial u \partial u' \partial u'' = T_{\lambda \lambda' \lambda''}^{hj}$$

$$-\pi < u, u', u'' < \pi$$

gesetzt wird,

$$P_{\lambda \lambda' \lambda''}^{hj} = \mu_j \left[\mathfrak{A}^j \frac{\partial T_{\lambda \lambda' \lambda''}^{hj}}{\partial t} + \mathfrak{B}^j T_{\lambda \lambda' \lambda''}^{hj} \right]$$

erhält. Da ferner (art. V, I. und II.) P gleich R oder S ist, je nachdem man für jedes j $\mathfrak{A}^j = 1$, $\mathfrak{B}^j = 0$ oder $\mathfrak{A}^j = 0$, $\mathfrak{B}^j = 1$ setzt, so folgt:

$$R_{\lambda \lambda' \lambda''}^{hj} = \mu_j \frac{\partial T_{\lambda \lambda' \lambda''}^{hj}}{\partial t}, \quad S_{\lambda \lambda' \lambda''}^{hj} = \mu_j T_{\lambda \lambda' \lambda''}^{hj}.$$

Durch Einsetzung dieser Ausdrücke erhält man aus den Gleichungen (9.)

die Lösung des vorgelegten Problems. Sei zur besseren Uebersicht für $\varrho = 0, 1, 2$

$$(19.) \quad \begin{cases} \sum_{\lambda \lambda' \lambda''} \sum_{j=0}^{j=3N+2} \mu_j V_{\lambda+\lambda, \lambda'+\lambda', \lambda''+\lambda''}^j T_{\lambda \lambda' \lambda''}^{3i+\varrho, j} = \mathfrak{B}_{i \lambda' \lambda''}^{i, \varrho}, \\ \sum_{\lambda \lambda' \lambda''} \sum_{j=0}^{j=3N+2} \mu_j G_{\lambda+\lambda, \lambda'+\lambda', \lambda''+\lambda''}^j T_{\lambda \lambda' \lambda''}^{3i+\varrho, j} = \mathfrak{G}_{i \lambda' \lambda''}^{i, \varrho}, \end{cases}$$

so folgt:

$$(20.) \quad \begin{cases} \xi_{i \lambda' \lambda''}^i = \mathfrak{G}_{i \lambda' \lambda''}^{i, 0} + \frac{\partial \mathfrak{B}_{i \lambda' \lambda''}^{i, 0}}{\partial t}, \\ \eta_{i \lambda' \lambda''}^i = \mathfrak{G}_{i \lambda' \lambda''}^{i, 1} + \frac{\partial \mathfrak{B}_{i \lambda' \lambda''}^{i, 1}}{\partial t}, \\ \zeta_{i \lambda' \lambda''}^i = \mathfrak{G}_{i \lambda' \lambda''}^{i, 2} + \frac{\partial \mathfrak{B}_{i \lambda' \lambda''}^{i, 2}}{\partial t}. \end{cases}$$

Die Einfachheit dieser Formeln lässt nichts zu wünschen übrig. Es scheint indessen schwer zu sein, aus ihnen unmittelbar eine Vorstellung von der durch sie dargestellten Bewegung zu gewinnen. Dagegen bieten sie für angenäherte Bestimmungen eine völlig zuverlässige Grundlage dar, bei welcher es nicht, wie bei der directen Behandlung der ursprünglichen Differentialgleichungen, zu befürchten ist, dass durch wiederholte Vernachlässigungen schliesslich alles verwischt wird, was den Charakter des ursprünglichen Problems ausmacht.

VIII.

Ueber die Bestimmung der Gestalt einer krummen Oberfläche durch lokale Messungen auf derselben.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 64, 1865, S. 193—209.)

Die bisherigen Untersuchungen über die Gestalt der Erde gehen sämtlich von der durch hydrostatische Gründe nahegelegten Voraussetzung aus, dass dieselbe bis auf geringe und nur zufällige Abweichungen ein Sphäroid ist, welches seine Drehungsaxe mit der Erde gemein hat. Dieses Sphäroid, welches man zum Unterschiede von der wirklichen die wahre Oberfläche der Erde nennt, wird dadurch bestimmt, dass die auf der ersten wirklich ausgeführten Gradmessungen durch möglichst wenig beträchtliche Abänderungen der Beobachtungsergebnisse mit den auf der letztern ihnen entsprechenden in genaue Uebereinstimmung gebracht werden.

Das in Rede stehende Problem lässt sich indessen auch noch von einem zweiten Gesichtspunkte aus behandeln, welcher von jeder willkürlichen, wenn auch noch so annehmbaren Voraussetzung über die zu ermittelnde Gestalt der Erde unabhängig ist, und aus diesem Grunde zur Entscheidung über die Zulässigkeit einer solchen Voraussetzung führen könnte.

Es versteht sich von selbst, dass auch bei dieser Untersuchung das Studium spezieller Terrains von der Bestimmung der Erdoberfläche im Allgemeinen getrennt werden muss. Aus diesem Grunde wird es keine willkürliche Voraussetzung in sich schliessen, wenn man als die zu bestimmende Gestalt der Erde, mit Berücksichtigung unserer vorläufigen Kenntniss von ihrer allgemeinen Wölbung, diejenige allenthalben gewölbte und stetig gekrümmte Oberfläche E bezeichnet, welche mit der wirklichen Erdoberfläche nach Beseitigung ihrer lokalen Hebungen und Senkungen vollständig zusammenfällt. Es muss hinzugefügt werden, dass die in der letzten Bedingung liegende Unbestimmtheit wegen der relativen Geringfügigkeit der zu beseitigenden Unebenheiten als tatsächlich gar nicht vorhanden betrachtet werden kann.

Zur Orientierung über die Lage eines Punktes m auf der Oberfläche E sind die an die tägliche Bewegung der Himmelskugel geknüpften sphärischen Coordinaten desselben im vorliegenden Falle nicht geeignet, weil sie von der Beschaffenheit der Fläche E in der Nähe des Punktes m unabhängig sind, also auch für sich allein keinen Rückschluss auf dieselbe gestatten. Ich bediene mich aus diesem Grunde zur Bestimmung der Lage von m auf E der sphärischen Coordinaten eines Punktes, den ich das wahre Zenith der Fläche E im Punkte m nenne, und verstehe hierunter denjenigen Punkt m der unendlich entfernten Himmelskugel, in welchem diese von der in m auf der zugänglichen Seite von E errichteten Normale geschnitten wird.

Dies festgestellt, erhält man aus den folgenden Untersuchungen für den vorliegenden Fall den Satz:

Wenn die Oberfläche E eines sich nicht ins Unendliche erstreckenden Körpers allenthalben gewölbt und stetig gebogen ist, ferner in keinem Punkte derselben ein Hauptkrümmungshalbmesser unendlich gross oder unstetig ist, endlich für jedes wahre Zenith, unabhängig davon, welcher Punkt der Fläche ihm entsprechen mag, die Summe der in letzterem stattfindenden Hauptkrümmungshalbmesser gegeben ist, so ist die Fläche selbst und ihre Lage in der Himmelskugel völlig bestimmt, bis auf einen beliebigen mit ihr verbundenen Punkt, über dessen Ort im absoluten Raume noch verfügt werden kann.

In Folge dieses Satzes kann die Gestalt der Fläche E mit jeder beliebigen Genauigkeit bestimmt werden, wenn man im Stande ist, für eine genügende Anzahl von Punkten derselben, über deren gegenseitige Lage keine anderweitigen Angaben erforderlich sind, 1) die sphärischen Coordinaten ihres wahren Zeniths, und 2) die Summe der in ihnen stattfindenden Hauptkrümmungshalbmesser zu ermitteln.

In der That kann man unter dieser Voraussetzung die Summe der beiden Hauptkrümmungshalbmesser als Function der Coordinaten des wahren Zeniths darstellen, wobei man nur darauf Rücksicht zu nehmen hat, dass der bei der Interpolation zu Grunde gelegte Ausdruck in keinem Zenith unendlich oder unstetig wird, und einer im art. VIII näher zu bezeichnenden Bedingung genügt. Durch den numerischen Verlauf dieser Function und die übrigen Bedingungen des Satzes ist aber die Fläche E völlig bestimmt.

Es muss hier unerörtert bleiben, in wie weit sich diese Resultate zur wirklichen Ausführung eignen. Die Grundlage zu derselben ist in dem Satze zu suchen, dass ein stetig gekrümmtes, hinlänglich kleines Stück jeder beliebigen Oberfläche als einer Fläche zweiten Grades an-

gehörig betrachtet werden kann. Die letztere muss für jedes passend gewählte Stück T der zur Untersuchung vorgelegten Fläche durch Messungen von derselben Art bestimmt werden, wie man sie bisher zur Bestimmung des ganzen Erdsphäroids ausgeführt hat, und liefert dann für die Punkte des genauesten Anschlusses an T das wahre Zenith und die Summe der beiden Hauptkrümmungshalbmesser.

I.

Dem vorliegenden Zwecke gemäss beschränken wir die nachfolgenden Untersuchungen auf den Fall, wo die vorgelegte Fläche E sich weder ins Unendliche erstreckt, noch auf ihrer zugänglichen Seite in verschiedenen Punkten gleichgerichtete Normalen hat, noch in Zusammenhang, Biegung oder Krümmung irgendwo eine Unstetigkeit darbietet. Zur Vereinfachung schliessen wir überdies den Fall aus, wo ein Hauptkrümmungshalbmesser auf E unendlich gross wird; es mag indessen beiläufig bemerkt werden, dass sämtliche Resultate gültig bleiben, wenn dieser Fall in einer begrenzten Anzahl von Punkten eintritt, sobald nur nicht das Product aus einem Hauptkrümmungshalbmesser und jeder Potenz der Entfernung von einem dieser Punkte, deren Exponent kleiner als 1 ist, in demselben unendlich wird (art. Vb. und VI).

Die nächste Folgerung, welche wir aus diesen Einschränkungen ziehen, besteht darin, dass nicht bloss zu jedem Punkte m der Fläche E ein einziger Punkt m als wahres Zenith, sondern auch umgekehrt zu jedem wahren Zenith nur ein einziger Punkt der Fläche E gehört.

Dies festgestellt, sei C der Nordpol der Himmelskugel, A der Durchschnitt des ersten Meridians mit dem durch C bestimmten Aequator, B der von A aus auf letzterem um einen Quadranten östlich entfernte Punkt. In dem hierdurch gegebenen Coordinatensystem soll die nach Osten wachsende Länge von m durch φ , seine nach Norden wachsende Breite durch θ bezeichnet werden.

Zur Bestimmung der Lage des entsprechenden Punktes m im Raume bediene ich mich rechtwinkliger Coordinaten x, y, z , welche in den durch die unendlich entfernten Punkte A, B, C bestimmten Richtungen wachsen. Ueber ihren Anfangspunkt, der vorläufig nicht in Betracht kommt, kann erst später (art. VIII) verfügt werden.

Nach dem, was oben festgestellt wurde, sind die rechtwinkligen Coordinaten von m durch die Länge und Breite von m vollständig bestimmt. Da ausserdem wegen des ununterbrochenen Zusammenhanges und der stetigen Biegung von E beide Punkte zugleich ihren Ort nach der Stetigkeit ändern, endlich nach der Voraussetzung kein Punkt m im

Unendlichen liegt, so sind x , y und z einwerthige, endliche und stetige Functionen der Variablen θ und φ , und letztere von einander unabhängig.

Da aber φ und θ nicht bloss die Lage von m , sondern auch die Richtung der Tangentialebene von E in diesem Punkte bestimmen, so sind sie rückwärts von den verschwindenden Aenderungen abhängig, welche x , y und z durch eine unendlich kleine Ortsänderung des Punktes m auf E erleiden. Aus diesem Grunde erlangen x , y und z , wenn sie als Functionen von φ und θ dargestellt werden, bestimmte Eigenschaften, welche die Grundlage unserer Untersuchung bilden.

II.

Es seien ∂x , ∂y , ∂z die Zunahmen, welche die Coordinaten von m beim Uebergange zu einem auf E unendlich benachbarten Punkte m_1 erlangen. Projicirt man das Linienelement mm_1 auf die Normale mm , und bezeichnet die Winkel zwischen dieser und den Richtungen der wachsenden Coordinaten durch (mA) , (mB) , (mC) , so folgt:

$$\partial x \cos (mA) + \partial y \cos (mB) + \partial z \cos (mC) = 0;$$

hier ist, weil φ und θ die Länge und Breite von m sind,

$$\cos (mA) = \cos \varphi \cos \theta, \quad \cos (mB) = \sin \varphi \cos \theta, \quad \cos (mC) = \sin \theta.$$

An Stelle von θ führe ich eine neue veränderliche Grösse ϱ mittelst der Gleichungen

$$(1.) \quad \cos \theta = \frac{1}{C_\varrho}, \quad \sin \theta = \frac{S_\varrho}{C_\varrho}$$

ein, wo C und S den hyperbolischen Cosinus und Sinus bedeuten, also

$$(2.) \quad C_\varrho = \frac{e^\varrho + e^{-\varrho}}{2}, \quad S_\varrho = \frac{e^\varrho - e^{-\varrho}}{2}$$

ist. Damit also θ seine Werthe von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ der Reihe nach erlange, muss ϱ die reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen.

Daraus folgt

$$(3.) \quad \cos (mA) = \frac{\cos \varphi}{C}, \quad \cos (mB) = \frac{\sin \varphi}{C}, \quad \cos (mC) = \frac{S}{C},$$

wenn zur Abkürzung C und S statt C_ϱ und S_ϱ gesetzt wird, also weiter

$$\partial z = -\frac{\cos \varphi}{S} \partial x - \frac{\sin \varphi}{S} \partial y,$$

endlich

$$(4.) \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -\frac{1}{S} \left(\cos \varphi \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \sin \varphi \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -\frac{1}{S} \left(\cos \varphi \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \sin \varphi \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right). \end{cases}$$

Da aber die Variablen φ und ρ von einander unabhängig sind, also jede Aenderung der einen die andere und ihr Differential un geändert lässt, so muss man gleiche Resultate erhalten, wenn man von den vorstehenden Gleichungen die erste nach φ , die zweite nach ρ differentiirt. Multiplicirt man vorher mit S , und subtrahirt nach dem Differentiiren die erste von der zweiten, so folgt

$$(5.) \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -\frac{1}{C} \left(\sin \varphi \frac{\partial x}{\partial \rho} - \cos \varphi \frac{\partial y}{\partial \rho} \right).$$

Zu diesen Gleichungen kommen noch andere, welche sich aus der Untersuchung über die Krümmung von E ergeben.

III.

Um bei der Bestimmung der Krümmungshalbmesser von E jede Unsicherheit in Bezug auf die Bedeutung der Zeichen auszuschliessen, zählen wir auf jeder Normale m Abscissen R , welche im Fusspunkte m Null sind, und in der Richtung nach dem Zenith m hin abnehmen, also auf der unzugänglichen Seite von E positiv werden.

Bezeichnet man nun durch u, v, w die rechtwinkligen Coordinaten eines der auf m liegenden Krümmungsmittelpunkte von E , und durch R seine auf dieser Normale gezählte Abscisse, also abgesehen vom Zeichen den ihm entsprechenden Krümmungshalbmesser, so ist für jedes Vorzeichen von R

$$\frac{x-u}{R} = \cos(mA), \quad \frac{y-v}{R} = \cos(mB), \quad \frac{z-w}{R} = \cos(mC).$$

Ertheilt man aber den Grössen φ und ρ verschwindende Aenderungen $\partial \varphi$ und $\partial \rho$, welche so gewählt sind, dass m an dem zu R gehörigen Krümmungskreise entlang rückt, so bleiben u, v, w und R ungeändert, und es folgt

$$\partial x = R \partial \cos(mA), \quad \partial y = R \partial \cos(mB), \quad \partial z = R \partial \cos(mC).$$

Von diesen drei Gleichungen, ebenso wie von den vorigen, folgt jedesmal eine aus den beiden andern. Führt man rechts die in (3.) gegebenen Werthe ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \left(R \frac{\sin \varphi}{C} + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) \partial \varphi + \left(R \frac{S \cos \varphi}{C^2} + \frac{\partial x}{\partial \rho} \right) \partial \rho &= 0, \\ - \left(R \frac{\cos \varphi}{C} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) \partial \varphi + \left(R \frac{S \sin \varphi}{C^2} + \frac{\partial y}{\partial \rho} \right) \partial \rho &= 0, \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} \partial \varphi + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{R}{C^2} \right) \partial \rho &= 0. \end{aligned}$$

Von diesen Gleichungen dienen zwei zur Bestimmung von R und dem zugehörigen Werthe von $\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}$. Eliminirt man den letztern, auf

dessen Bestimmung es hier nicht ankommt, so erhält man ohne Mühe aus den beiden ersten Gleichungen mit Rücksicht auf (4.) die folgende

$$R^2 - RC^2 \left[\frac{\partial z}{\partial \varphi} - \frac{1}{C} \left(\sin \varphi \frac{\partial x}{\partial \varphi} - \cos \varphi \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) \right] + \frac{C^2}{S} \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0.$$

Bezeichnet man daher die beiden Hauptkrümmungshalbmesser von E im Punkte m durch R_1 und R_2 , indem man diese Grössen negativ oder positiv nimmt, jenachdem der zugehörige Krümmungsmittelpunkt auf der zugänglichen oder der entgegengesetzten Seite von E liegt, so folgt:

$$(6.) \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{1}{C} \left(\sin \varphi \frac{\partial x}{\partial \varphi} - \cos \varphi \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{R_1 + R_2}{C^2},$$

$$(7.) \quad R_1 R_2 = \frac{C^2}{S} \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right).$$

IV.

Durch Auflösung der Gleichungen (4.), (5.) und (6.) erhält man

$$(8.) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\frac{\partial z}{\partial \varphi} S \cos \varphi - \frac{\partial z}{\partial \varphi} C \sin \varphi, \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial z}{\partial \varphi} C \sin \varphi - \frac{\partial z}{\partial \varphi} S \cos \varphi - \frac{R_1 + R_2}{C} \sin \varphi, \end{cases}$$

$$(9.) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial z}{\partial \varphi} S \sin \varphi + \frac{\partial z}{\partial \varphi} C \cos \varphi, \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial z}{\partial \varphi} C \cos \varphi - \frac{\partial z}{\partial \varphi} S \sin \varphi + \frac{R_1 + R_2}{C} \cos \varphi, \end{cases}$$

und wenn man diese Werthe in (7.) einsetzt, oder auf anderem Wege,

$$(10.) \quad R_1 R_2 - (R_1 + R_2) C^2 \frac{\partial z}{\partial \varphi} + \left(C^2 \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(C^2 \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2 = 0.$$

Bezeichnet man durch i die $\sqrt{-1}$, und setzt zur Abkürzung

$$x + iy = \Omega,$$

so lassen sich die Gleichungen (8.) und (9.) in die beiden folgenden zusammenziehen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} &= e^{i\varphi} \left(-S \frac{\partial z}{\partial \varphi} + i C \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right), \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} &= e^{i\varphi} \left(-i C \frac{\partial z}{\partial \varphi} - S \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) + i e^{i\varphi} \frac{R_1 + R_2}{C}. \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzung der beiden hieraus für $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi^2}$ folgenden Ausdrücke erhält man, als Bedingung dafür, dass die Gleichungen (8.) und (9.) die vollständigen Differentiale von x und y liefern, die Gleichung

$$(I.) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{R_1 + R_2}{C} \right).$$

Sodann erhält man

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \varphi^2} = -S e^{\varphi} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} \right) + i \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(e^{\varphi} \frac{R_1 + R_2}{C} \right),$$

oder wegen der vorigen Gleichung

$$= -\frac{S}{C} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(e^{\varphi} \frac{R_1 + R_2}{C} \right) + i \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(e^{\varphi} \frac{R_1 + R_2}{C} \right).$$

Durch Trennung des Reellen vom Imaginären ergibt sich endlich

$$(II.) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} = -\frac{S}{C} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{R_1 + R_2}{C} \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{R_1 + R_2}{C} \right),$$

$$(III.) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} = -\frac{S}{C} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{R_1 + R_2}{C} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{R_1 + R_2}{C} \right).$$

V.

Die im vorigen art. gefundenen Differentialgleichungen gewähren das Mittel zur Lösung der Eingangs gestellten Aufgabe, die Fläche E mit Rücksicht auf die übrigen von ihr verlangten Eigenschaften unter der Voraussetzung zu bestimmen, dass an ihr entlang für jede Richtung der Normale, unabhängig von der Lage ihres Fusspunktes, die Summe der beiden Hauptkrümmungshalbmesser, d. h. letztere als Function jener gegeben ist.

Unsere nächste Aufgabe besteht nun darin, aus den von der Fläche E verlangten Eigenschaften für die Functionen x , y und z diejenigen Grenz- und Stetigkeitsbedingungen abzuleiten, welche zu ihrer völligen Bestimmung durch die Differentialgleichungen (I.), (II.) und (III.) erforderlich sind.

Zu diesem Zwecke betrachte ich φ und φ als rechtwinklige Coordinaten in einer Ebene, wobei dann zu beachten ist, dass, weil φ die östliche Länge des wahren Zeniths bedeutet, von dieser Ebene nur der durch die Ungleichheit $0 < \varphi < 2\pi$ begrenzte Streifen in Betracht kommt.

a. Zunächst ist die schon früher gemachte Bemerkung zu wiederholen, dass in Folge jener Bedingungen x , y und z allenthalben einwerthige, endliche und stetige Functionen von φ und φ sind.

b. Da ferner R_1 und R_2 der Voraussetzung gemäss nirgendwo unendlich werden, so folgt aus der oben gefundenen Gleichung (10.),

$$\left(C^2 \frac{\partial z}{\partial \varphi} - \frac{R_1 + R_2}{2} \right)^2 + \left(C^2 \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2 = \left(\frac{R_1 - R_2}{2} \right)^2,$$

dass $C^2 \frac{\partial z}{\partial \varphi}$ und $C^2 \frac{\partial z}{\partial \varphi}$ nirgendwo, auch für $\varphi = \pm \infty$ nicht, über alle Grenzen wachsen. In der That erkennt man leicht, dass $C^2 \frac{\partial z}{\partial \varphi}$ numerisch nie grösser als die halbe Differenz der beiden Hauptkrümmungshalb-

messer wird, und in Folge dessen $C^2 \frac{\partial z}{\partial \varphi}$ stets zwischen den Grenzen R_1 und R_2 eingeschlossen bleibt.

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (8.) und (9.) folgt hieraus, dass die ersten Derivirten von x , y und z in keinem Punkte unendlich werden, und wenn der numerische Werth von φ über alle Grenzen wächst, so stark abnehmen, dass die Producte

$$C^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right), \quad C \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)$$

sämmtlich unterhalb endlicher Grenzen beharren.

c. Hieran schliesst sich der Satz, dass es in der Ebene der φ , φ keine Linie giebt, auf deren beiden Seiten eine der ersten Derivirten von x , y , z verschiedene Werthe hat.

Zunächst sind x , y und z wegen ihrer Stetigkeit auf beiden Seiten einer beliebigen Linie die nämlichen Functionen ihres Bogens σ , also auch ihre Derivirten $\frac{\partial x}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial y}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial z}{\partial \sigma}$ auf beiden Seiten dieselben.

Errichtet man ferner im Anfange des Bogenelementes $\partial \sigma$ über ihm die Normale ∂n so, dass ∂n und $\partial \varphi$ denselben Winkel wie $\partial \sigma$ und $\partial \varphi$ einschliessen, so ist

$$\frac{\partial z}{\partial \sigma} = \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} + \frac{\partial z}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial z}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial n},$$

welche Gleichungen auch für x und y gelten. Folglich erhält man aus den Gleichungen des art. IV., indem man Ω durch seinen Werth ersetzt:

$$\frac{\partial(x + iy)}{\partial \sigma} = e^{i\varphi} \left(-S \frac{\partial z}{\partial \sigma} + iC \frac{\partial z}{\partial n} + i \frac{R_1 + R_2}{C} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \right).$$

Diese Gleichung zeigt wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $R_1 + R_2$, dass auch $\frac{\partial z}{\partial n}$ beim Durchgange durch $\partial \sigma$ keine Unstetigkeit erleidet.

Da hiernach die ersten Derivirten von z sich beim Durchgange durch $\partial \sigma$ nach der Stetigkeit ändern, so gilt dasselbe wegen (8.) und (9.) auch von den ersten Derivirten der beiden andern Coordinaten x und y .

d. Da die Lage des ersten Meridians auf der Himmelskugel nach Belieben gewählt werden kann, und durch eine Aenderung derselben φ nur um eine constante Grösse, sein Differential gar nicht geändert wird, so folgt aus dem Vorangehenden, dass x , y und z nebst ihren ersten Derivirten beim Durchgange durch denselben stetig bleiben.

Daraus folgt für die Ebene φ , φ , dass jede dieser Functionen für denselben Werth von φ auf beiden Begrenzungslinien $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$ denselben Werth erlangt.

e. Den Polen der Himmelskugel entsprechen zwei Punkte der

Fläche E , in denen die Länge φ jeden beliebigen Werth hat, ohne dass ihre rechtwinkligen Coordinaten unbestimmt werden. Folglich werden letztere von φ unabhängig, wenn φ unendlich grosse Werthe erlangt.

Diese Sätze enthalten für die hier zu lösende Aufgabe alles, was zur völligen Bestimmung der Functionen x , y und z ausser den Differentialgleichungen I., II. und III. an Grenz- und Stetigkeitsbedingungen erforderlich ist, soweit diese Functionen nicht von der bis jetzt verfügbar gebliebenen Lage des Coordinatenursprungs abhängen.

VI.

Zur Bestimmung der Functionen x , y und z suchen wir die Lösung der folgenden Aufgabe, aus welcher sich jene durch Particularisirung ergibt.

Es sei u eine Function von r und f , welche für alle reellen Werthe von r und von $f = 0$ bis $f = 2\pi$ den folgenden Bedingungen genügt.

1. u und seine ersten Derivirten sind überall einwerthig, endlich, und ersteres in keinem Punkte, letztere an keiner Linie entlang unstetig.

2. u genügt der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial f^2} = F(r, f).$$

3. Für den nämlichen Werth von r erhalten u und $\frac{\partial u}{\partial f}$ an der Grenze $f = 0$ dieselben Werthe, wie an der andern Grenze $f = 2\pi$.

4. Für unendliche Werthe von r verschwindet $r \frac{\partial u}{\partial r}$, u selbst wird von f unabhängig.

5. Die Summe der beiden für $r = +\infty$ und $r = -\infty$ eintretenden Werthe von u ist gegeben.

Die zu lösende Aufgabe besteht darin, 1) die Function u zu bestimmen und 2) die Beschränkungen anzugeben, denen die gegebene Function $F(r, f)$ vermöge der u auferlegten Bedingungen unterworfen ist.

Die erste Frage erledigt sich durch die Bestimmung desjenigen Werthes u , den die Function u in einem beliebig gewählten Punkte $r = \varrho$, $f = \varphi$ erlangt. Um denselben zu finden, multiplicire ich die Gleichung (2.) mit dem Factor

$$\omega = \frac{1}{4\pi} \lg (C(r - \varrho) - \cos(f - \varphi))$$

und dem Elemente $\partial r \partial f$ einer um den Punkt ϱ , φ herumführenden Fläche T , deren innerer Rand ein um diesen Punkt mit dem Halbmesser c beschriebener Kreis K ist, und deren nachher zu bestimmen-

der äusseren Rand S heissen soll. Beide Ränder sollen sich innerhalb des hier allein zu betrachtenden Streifens $0 < f < 2\pi$ halten.

Man erhält diesen Factor ω , indem man mittelst des von Herrn Riemann (Inauguraldiss. S. 13–14) angegebenen Factors $\frac{1}{4\pi} \lg((r-\varphi)^2 + (f-\varphi)^2)$ zunächst den gesuchten Werth u durch Begrenzungswerthe von u und seinen ersten Derivirten ausdrückt, und dann diese letztern nach dem von mir in meiner Inauguraldiss. S. 38 angewandten Verfahren mit Hülfe von Bedingungsungleichungen eliminirt, welche sich mittelst desselben Factors ergeben, wenn man seinen Unstetigkeitspunkt φ , φ aus dem Streifen $0 < \varphi < 2\pi$ hinaus verlegt, also φ durch einen ausserhalb dieser Grenzen liegenden Werth φ_1 ersetzt. Mit Rücksicht auf die Bedingung (3.) findet man leicht, dass für $\varphi_1 - \varphi$ alle Vielfachen der ganzen Breite jenes Streifens genommen werden müssen, und gelangt nun durch Verbindung dieser Multiplicatoren zu dem nach f periodischen Factor ω .

Durch Integration über die Fläche T erhält man

$$\int \omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial f^2} \right) r \, df = \int F(r, f) \omega \, r \, df.$$

Da auf T überall $\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial f^2} = 0$ ist, so lässt sich die linke Seite in die Form

$$\int \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\omega \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial f} \left(\omega \frac{\partial u}{\partial f} - u \frac{\partial \omega}{\partial f} \right) \right] r \, df$$

bringen, und es hat hiernach der Factor ω die Eigenschaft, die Integration ohne vorläufige Kenntniss der Function u zu ermöglichen, d. h. die Elimination aller zwischen den Rändern von T stattfindenden Werthe dieser Function zu bewirken. Dass dieser Factor ausserdem die Eigenschaft besitzt, bei gehöriger Erweiterung der Fläche T , auch alle übrigen unbekannten Werthe, bis auf den gesuchten Werth u , zu eliminiren, also diesen zu bestimmen, wird sich aus dem Folgenden ergeben.

Sind $c \partial \sigma$ und ∂S die stets positiven Bogenelemente von K und S , und bedeutet ∂n das erste Element der über ∂S aus T hinaus errichteten Normale, so ist nach einem bekannten Satze, sobald P und Q zwei auf T überall einwerthige und endliche Functionen sind, welche höchstens in einzelnen Punkten, aber an keiner Linie entlang, unstetig werden,

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial P}{\partial r} r \, df &= \int P \frac{\partial r}{\partial n} \partial S - \int P \frac{\partial r}{\partial c} c \partial \sigma, \\ \int \frac{\partial Q}{\partial f} r \, df &= \int Q \frac{\partial f}{\partial n} \partial S - \int Q \frac{\partial f}{\partial c} c \partial \sigma. \end{aligned}$$

Die linke Seite obiger Gleichung geht hiernach über in

$$\int \left(\omega \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \omega}{\partial n} \right) \partial S - \int \left(\omega \frac{\partial u}{\partial c} - u \frac{\partial \omega}{\partial c} \right) c \partial \sigma.$$

Der Werth des über K erstreckten Integrals ergibt sich für verschwindende Werthe von c wie folgt. Statt der im Bogenelemente $c \partial \sigma$ stattfindenden Coordinaten r, f führe ich den Winkel σ mittelst der Gleichungen $f - \varphi = c \cos \sigma, r - \rho = c \sin \sigma$ ein; dann wird dort

$$\omega = \frac{1}{4\pi} \lg \left(\frac{1}{2} c^2 - \frac{1}{24} c^4 \cos 2\sigma \dots \right),$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial c} = \frac{1}{2\pi} \frac{c - \frac{1}{6} c^3 \cos 2\sigma \dots}{c^2 - \frac{1}{12} c^4 \cos 2\sigma \dots},$$

woraus für ein verschwindendes c $\lim c\omega = 0, \lim c \frac{\partial \omega}{\partial c} = \frac{1}{2\pi}$ folgt. Da gleichzeitig $\frac{\partial u}{\partial c}$ nicht unendlich gross wird, u dagegen ohne Unstetigkeit in den festen Werth u übergeht, so folgt

$$\lim - \int \left(\omega \frac{\partial u}{\partial c} - u \frac{\partial \omega}{\partial c} \right) c \partial \sigma = u.$$

In der hieraus folgenden Gleichung

$$(11.) \quad u = \int \left(u \frac{\partial \omega}{\partial n} - \omega \frac{\partial u}{\partial n} \right) \partial S + \int F(r, f) \omega \partial r \partial f$$

ist das erste Integral zur Rechten über den ganzen Umfang der Curve S , das andere über die von ihr eingeschlossene Fläche zu erstrecken, und die Summe beider von der Gestalt der Curve S unabhängig, so lange sie den Punkt ρ, φ einschliesst.

Dies festgestellt, ersetze ich S durch ein den Punkt ρ, φ einschliessendes Rechteck $mno p$, dessen Seiten mn, no, op, pm der Reihe nach durch die Gleichungen $r = -g, f = 2\pi, r = h, f = 0$ gegeben sind. Dann zerfällt das über S erstreckte Integral in vier Theile, die ich $(mn), (no), (po), (mp)$ nennen will. Es wird aber

$$(mp) + (no) = \int_{-g}^h \left(-u \frac{\partial \omega}{\partial f} + \omega \frac{\partial u}{\partial f} \right)_{f=0} \partial r + \int_{-g}^h \left(u \frac{\partial \omega}{\partial f} - \omega \frac{\partial u}{\partial f} \right)_{f=2\pi} \partial r,$$

also diese Summe gleich Null, weil die entsprechenden Elemente beider Integrale sich wegen der auch durch ω und $\frac{\partial \omega}{\partial f}$ erfüllten Bedingung (3.) gegenseitig aufheben. Sodann erhält man

$$(po) = \int_0^{2\pi} \left(u \frac{\partial \omega}{\partial r} - \omega \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=h} \cdot \partial f,$$

$$(mn) = \int_0^{2\pi} \left(-u \frac{\partial \omega}{\partial r} + \omega \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=g} \cdot \partial f,$$

oder

$$(po) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{u}{4\pi} \cdot \frac{S(h-\varrho)}{C(h-\varrho) - \cos(f-\varphi)} - \frac{\omega}{h} \cdot r \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=h} \cdot \partial f,$$

$$(mo) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{u}{4\pi} \cdot \frac{S(g+\varrho)}{C(g+\varrho) - \cos(f-\varphi)} - \frac{\omega}{g} \cdot r \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=g} \cdot \partial f.$$

Lässt man nun g und h über alle Grenzen wachsen, so verschwindet in beiden Integralen der Subtrahend wegen der Bedingung (4.), da $\frac{\omega}{h}$ und $\frac{\omega}{g}$, wie leicht zu sehen ist, beide gegen die Grenze $\frac{1}{4\pi}$ convergiren. Ferner haben die Factoren von $\frac{u}{4\pi}$ die Einheit zur Grenze, während u in beiden Fällen von f unabhängig wird.

Ist also u' der für $r = +\infty$, u_1 der für $r = -\infty$ eintretende feste Werth von u , so wird, wenn g und h über alle Grenzen wachsen,

$$\lim ((po) + (mn)) = \frac{u' + u_1}{2}.$$

Durch die nämliche Erweiterung des Rechtecks $mno p$ geht also die für u gefundene Gleichung in die folgende über

$$(IV.) \quad u = \frac{u' + u_1}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} F(r, f) \omega r \partial f,$$

welche den gesuchten Werth u durch bekannte Grössen ausdrückt, also die Lösung der ersten Aufgabe enthält.

Die vorstehende Gleichung muss für $\varrho = +\infty$, $u = u'$, für $\varrho = -\infty$, $u = u_1$, also in beiden Fällen $u' - u_1$ durch ein Integral ausgedrückt liefern. Zu dem nämlichen Resultate gelangt man bequemer, und ohne der Lösung der zweiten Aufgabe vorzugreifen, indem man die Gleichung (2.) mit $-\frac{1}{4\pi} r \partial r \partial f$ multiplicirt, und dann zwischen denselben Grenzen, wie in IV. integrirt. Man findet sofort

$$(V.) \quad \frac{u' - u_1}{2} = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} F(r, f) r \partial r \partial f.$$

VII.

Wir gehen jetzt zur zweiten Frage über, ob die Function F bis auf die in IV. und V. hervortretenden Convergenzbedingungen vollkommen willkürlich gegeben werden kann, oder ob die der Function u auferlegten Bedingungen noch weitere Beschränkungen in der Wahl von F nach sich ziehen.

Beschränkungen dieser Art, falls sie überhaupt existiren, müssen in Gleichungen bestehen, welche keinen Aufschluss über die Function u mehr enthalten, also aus (2.) durch Elimination sämtlicher Werthe von u gefunden werden.

Um diese Elimination zu bewirken, multiplicire ich die Gleichung (2.) mit einem geeigneten Factor Ω und mit $\partial r \partial f$, und integriere dann über alle Werthe von r und f . Damit hierdurch zunächst alle innerhalb der Begrenzung stattfindenden Werthe von u eliminirt werden, muss Ω nebst seinen ersten Derivirten zwischen den Grenzen einwerthig, endlich und bis auf einzelne Punkte auch stetig bleiben, und der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial f^2} = 0$ genügen, weil jede mit den übrigen Bedingungen verträgliche Verletzung einer derselben eine Theilung des Integrationsgebietes nöthig macht, und zu einer Gleichung zwischen den an der Theilungsstelle stattfindenden Werthen von u führt. Damit ferner die an den Grenzen $f = 0$, $f = 2\pi$ stattfindenden Werthe von u sich wegheben, müssen auch Ω und $\frac{\partial \Omega}{\partial f}$ für das nämliche r an beiden Grenzen dieselben Werthe erlangen.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so wird

$$\int \Omega F(r, f) \partial r \partial f = \int_0^{2\pi} \left[\Omega \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right]_{-\infty}^{\infty} \cdot df.$$

Ausserdem ergibt sich aber aus denselben, etwa indem man die Gleichung (IV.) auf Ω anwendet, dass Ω , ausserhalb etwa vorhandener Unstetigkeitspunkte, in seinem ganzen Verlaufe durch einen nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen von f fortschreitenden Ausdruck dargestellt werden kann, von dem es in jenen Punkten nur um messbare Grössen abweicht, und man erhält dann aus der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \Omega = & A + A_1 e^{\tau} \cos(f - a_1) + A_2 e^{2\tau} \cos(2f - a_2) \dots \\ & + B_1 e^{-\tau} \cos(f - b_1) + B_2 e^{-2\tau} \cos(2f - b_2) \dots \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck zeigt sofort, dass die noch rückständige Elimination der für $\tau = \pm \infty$ eintretenden Werthe von $\frac{\partial u}{\partial r}$ und u , wenn man

sich jeder neuen Bedingung über die dort verschwindenden, von f abhängigen Theile von u enthält, nur dann gelingt, wenn der Ausdruck für Ω auf sein erstes Glied A reducirt wird.

Für $\Omega = 1$ fällt die rechte Seite völlig weg, und es ergibt sich als einzige, der Funktion F aufzuerlegende Bedingung die Gleichung

$$(VI.) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} F(\tau, f) \partial \tau \partial f = 0.$$

Da dieses Resultat von der Geschwindigkeit, mit welcher $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ im Unendlichen verschwindet, unabhängig ist, so gilt es auch für die bei der Bestimmung von x, y, z für F zu wählenden Functionen.

VIII.

Seien jetzt o' und o_1 diejenigen beiden Punkte der Oberfläche E , deren wahre Zenithe der Nord- und Südpol der Himmelskugel sind. Den bisher verfügbar gebliebenen Anfangspunkt der Coordinaten x, y, z verlegen wir in die Mitte zwischen o' und o_1 , so dass, wenn die Coordinaten dieser Punkte beziehungsweise x', y', z' und x_1, y_1, z_1 sind,

$$x' + x_1 = 0, \quad y' + y_1 = 0, \quad z' + z_1 = 0$$

wird.

Bezeichnet man daher die Werthe, welche R_1, R_2, S und C für $\varphi = \tau, \varphi = f$ annehmen, durch $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{S}$ und $\mathfrak{C}$, so folgt aus IV. mit Rücksicht auf die durch die Gleichungen (I.), (II.), (III.) jedesmal gegebene Bedeutung von F , wenn wie oben

$$\omega = \frac{1}{4\pi} \lg (C(\tau - \varphi) - \cos(f - \varphi))$$

gesetzt wird,

$$x = \int \left[-\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{C}} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\cos f \frac{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2}{\mathfrak{C}} \right) - \frac{\partial}{\partial f} \left(\sin f \frac{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2}{\mathfrak{C}} \right) \right] \omega \partial \tau \partial f,$$

$$y = \int \left[-\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{C}} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\sin f \frac{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2}{\mathfrak{C}} \right) + \frac{\partial}{\partial f} \left(\cos f \frac{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2}{\mathfrak{C}} \right) \right] \omega \partial \tau \partial f,$$

$$z = \int \frac{1}{\mathfrak{C}} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2}{\mathfrak{C}} \right) \omega \partial \tau \partial f,$$

wo, wie auch in den folgenden Formeln, nach τ von $-\infty$ bis ∞ , nach f zwischen den Grenzen 0 und 2π zu integrieren ist.

Ersetzt man hier ω durch $-\frac{\tau}{4\pi}$, so erhält man nach V., weil $\frac{x' - x_1}{2} = x'$ ist, die Coordinaten desjenigen Punktes o' , der sein wahres Zenith im Nordpol der Himmelskugel hat. Wegen der Stetigkeit

von $R_1 + R_2$ fallen die Glieder mit den nach f genommenen Derivirten weg, und es folgt:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{R_1 + R_2}{r} \right) r \cos f \partial r \partial f, \\ y' &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{R_1 + R_2}{r} \right) r \sin f \partial r \partial f, \\ s' &= \frac{1}{4\pi} \int - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{R_1 + R_2}{r} \right) r \partial r \partial f. \end{aligned}$$

Ersetzt man endlich ω durch die Einheit, so erhält man mit Rücksicht auf VI. die den rechten Seiten von I., II. und III. aufzuerlegenden Bedingungen, welche sich auf die folgenden reduciren:

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{R_1 + R_2}{r} \right) \cos f \partial r \partial f &= 0, \\ \int \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{R_1 + R_2}{r} \right) \sin f \partial r \partial f &= 0, \\ \int \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{R_1 + R_2}{r} \right) \partial r \partial f &= 0. \end{aligned}$$

Da $R_1 + R_2$ als Function von φ und φ gegeben oder durch Interpolation dargestellt werden muss, so enthalten die vorstehenden Gleichungen eine bei der Wahl dieser Function massgebende Bedingung, ohne deren Berücksichtigung die übrigen Bedingungen des Problems untereinander in Widerspruch gebracht werden.

Die sämmtlichen auf $R_1 + R_2$ bezüglichen Bedingungen lassen sich dahin zusammenfassen, dass diese Function nirgendwo unendlich oder unstetig werden darf, und dass in ihrer Entwicklung nach Kugelfunctionen der $\cos(mA)$, $\cos(mB)$, $\cos(mC)$ das zweite, nach diesen Cosinus lineare und homogene Glied fehlen muss. In der That führen die vorstehenden Gleichungen unmittelbar auf diese letzte Bedingung, wenn man die Derivirte von $\frac{R_1 + R_2}{r}$ durch theilweise Integration wegschafft, und dann an Stelle von r das Complement der Breite θ einführt.

IX.

Für ein abgeplattetes Sphäroid S , dessen Umdrehungsaxe zur s -Axe parallel ist, hat man

$$R_1 + R_2 = - \frac{a}{\sin \theta \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\cos \theta^2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta}} \right),$$

wenn die Wurzel positiv genommen wird, und a den Halbmesser des Aequators, ε die Excentricität der Meridianellipse bedeutet, also die Abplattung $\alpha = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ ist.

Umgekehrt kann nach den obigen Resultaten eine Fläche E , welche der vorstehenden Gleichung gemäss verläuft, nur dann von dem Sphäroid S verschieden sein, wenn sie entweder auf ihrer zugänglichen Seite in verschiedenen Punkten gleichgerichtete Normalen hat, oder sich ins Unendliche erstreckt, oder Stetigkeitsunterbrechungen in Zusammenhang, Biegung oder Krümmung darbietet, wobei jedoch von der Frage, ob bei obiger Gleichung auch jeder von diesen Fällen möglich sei, Abstand genommen ist. Sind aber alle diese Fälle ausgeschlossen, so fällt die Fläche E entweder mit S zusammen, oder sie kann mit S durch eine Verschiebung ohne Drehung zur völligen Deckung gebracht werden.

Wenn daher die obige Gleichung bei passender Wahl von a und ε in einer genügenden Zahl von Punkten der Erdoberfläche erfüllt würde, so wäre dies allein schon hinreichend, um die Identität der letztern mit dem Sphäroid S sicher zu stellen.

Abgesehen von den Schwierigkeiten, welche die hier geforderte genaue Bestimmung des wahren Zeniths und der entsprechenden Hauptkrümmungshalbmesser darbietet, gewähren die obigen Resultate den Vortheil, eine stufenweise und nur durch die notwendige Unvollkommenheit der Messungen begrenzte Annäherung an die Wirklichkeit zu gestatten, indem die geschlossenen Ausdrücke für die Coordinaten x, y, z die Werthe der Function $R_1 + R_2$ nur linear enthalten, also für jedes Glied, welches zur genaueren und vollständigeren Darstellung dieser Function in ihren Ausdruck neu aufgenommen werden muss, ein von den bereits vorhandenen Ausdrücken für die Coordinaten unabhängiges Correctionsglied zu denselben liefern.

Zürich, 10. December 1864.

IX.

Ueber die Dispersion des Lichtes.

(Annalen der Physik und Chemie, Bd. 124, 1865, S. 53—60.)

In den *Comptes Rendus* vom 13. Juni 1864 S. 1111 hat Hr. Mascart neue Bestimmungen über die Länge der Lichtwellen und die Brechungsindices der entsprechenden ordentlichen Strahlen im Doppelspath veröffentlicht, welche sich in ungefähr gleicher Ausdehnung, wie die Beobachtungen Esselbach's (diese Ann. Bd. 98, S. 513) über das gewöhnlich sichtbare und das ultraviolette Spectrum verbreiten. Bei der grossen Genauigkeit dieser Angaben schien es mir wünschenswerth, dieselben zu einer nochmaligen Prüfung der Dispersionsformel zu benutzen, welche ich aus Cauchy's Theorie abgeleitet habe (diese Ann. Bd. 117, S. 27 s. o. S. 113).

Leider mußte auch bei dieser Gelegenheit auf die Vortheile verzichtet werden, welche sich darbieten, wenn man die Rechnung direct an die vollständigen Originalbeobachtungen anknüpfen kann. Denn wenn auch jedes Prüfungsverfahren zu einer Bestätigung der zu prüfenden Formel führen kann, sobald nur jede einzelne Abweichung von den Beobachtungen, welche es verlangt, klein genug ist, so ist doch nur die Ausgleichung der vollständigen Originalbeobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate im Stande, die Entscheidung über die Richtigkeit der Formel zu liefern, ohne sie von jeder einzelnen Abweichung, also von der zufälligen Vertheilung der Beobachtungsfehler, abhängig zu machen.

Die Prüfung durch die Originalbeobachtungen würde sich nach folgenden Grundsätzen zu richten haben. Da im vorliegenden Falle sämtliche Beobachtungen in Winkelmessungen bestehen, also von gleicher Art sind, so berechne man aus ihnen nach den bekannten Regeln die Präcision einer einzigen Beobachtung vom Gewichte 1 von zwei verschiedenen Gesichtspunkten aus, zuerst, indem man die der unmittelbaren Messung unterworfenen Winkel als von einander unab-

hängig betrachtet, was sie bei der Beobachtung auch wirklich sind, und zum zweiten Male, indem man sie in die von der Dispersionsformel verlangte Abhängigkeit von einander versetzt. Bezeichnet man alsdann die Präcision im ersten Falle durch h , im andern durch H , so liefert der Quotient $\frac{H}{h}$ die verlangte Entscheidung in folgender Weise.

Nach dem Grundprincip der Methode der kleinsten Quadrate muß sorgfältigen und vollständigen Beobachtungen ein möglichst großes Zutrauen eingeräumt werden. Folglich verdient von beiden Ausgleichungen diejenige den Vorzug, welche den Originalbeobachtungen die größere Präcision zuschreibt. Wenn daher $\frac{H}{h} > 1$ ist, so verdient die zweite Ausgleichung den Vorzug vor der ersten, d. h. die Annahme, daß die Formel völlig genau sey, ist wahrscheinlicher als die Annahme des Gegentheils. Findet sich $\frac{H}{h} < 1$, so ist man zum umgekehrten Schlusse genöthigt. Es versteht sich von selbst, wie diese Betrachtung sich modificirt, wenn man statt der Größen H und h ihre wahrscheinlichen Gränzen einführt.

Im gegenwärtigen Falle lagen nicht die Resultate der unmittelbaren Messungen selbst, sondern nur die aus ihnen berechneten wahrscheinlichsten Werthe der Indices und Wellenlängen vor; über die wahrscheinlichen Fehler der letztern ist nichts mitgetheilt. Es mußte hiernach von der Methode der kleinsten Quadrate gänzlich Abstand genommen werden, da selbst in dem Falle, wo man die Indices und Wellenlängen wie unmittelbar gemessene Größen behandeln wollte, schon aus Gründen der Homogenität die ihnen beizulegenden Gewichte, oder die zu letztern umgekehrt proportionalen wahrscheinlichen Fehler bekannt seyn müßten.

Ich habe daher ein anderes Ausgleichungsverfahren angewandt, welches sich durch die Bequemlichkeit der numerischen Rechnung empfiehlt, und durch die Kleinheit der von ihm verlangten Abweichungen die Ueberzeugung gewährt, daß die Anwendung der obigen Grundsätze wegen der Güte der Beobachtungen und der Genauigkeit der Formel gerechtfertigt, und überdies ohne beschwerliche Rechnungen durchzuführen seyn würde. Dasselbe besteht in folgendem.

Es seyen $n_1, \lambda_1; n_2, \lambda_2; \dots$ die aus Beobachtungen bestimmten Werthe der Elemente einer Reihe von Strahlen, wobei n den Brechungsindex, λ die entsprechende Wellenlänge bedeutet.

Zu jedem dieser Elemente füge ich eine nach folgenden Bedingungen gewählte Correction:

A. Die corrigirten Elemente

$$N = n + \Delta n, \quad A = \lambda + \Delta \lambda$$

genügen in aller Strenge der Dispersionsformel

$$\left(\frac{N_0}{N}\right)^4 - 2\left(\frac{N_0}{N}\right)^2 + \left(\frac{A_0}{A}\right)^2 = 0. \quad (1)$$

B. Die Summe der Quadrate aller logarithmischen Correctionen

$$V = \left[\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \lambda}{\lambda}\right)^2 \right]$$

wird durch passende Wahl der mit Rücksicht auf A noch verfügbaren Correctionen und der Constanten N_0, A_0 zu einem Minimum.

Ich setze nun voraus, daß man sich vorläufig angenäherte Werthe n_0, λ_0 von N_0, A_0 verschafft habe, was erfahrungsgemäß durch directe Berechnung derselben aus den Elementen zweier Strahlen (s. u. Form. 9) erreicht wird, und setze

$$\frac{N_i - n_i}{n_i} = x_i; \quad \frac{A_i - \lambda_i}{\lambda_i} = y_i \quad \text{für } i = 0, 1, 2, \dots; \quad (2)$$

dann kann man mit Bestimmtheit darauf zählen, daß alle gesuchten Correctionen sich auf höhere Decimalstellen werfen, mithin die Quadrate und Producte aller x und y wegen ihrer Kleinheit außer Betracht fallen.

Schafft man nun aus (1) mittelst der Gleichung (2) alle corrigirten Elemente weg, und setzt von hier ab

$$\frac{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_i}\right)^2}{2\left(\frac{n_0}{n_i}\right)^2 \left[\left(\frac{n_0}{n_i}\right)^2 - 1\right]} = r_i, \quad \frac{2 - \left(\frac{n_0}{n_i}\right)^2}{2\left[\left(\frac{n_0}{n_i}\right)^2 - 1\right]} = t_i, \quad (3)$$

so erhält man nach Beseitigung aller nicht linearen Theile die für alle Strahlen gültige Gleichung

$$\frac{r-t}{2} + x_0 - x + r(y_0 - y) = 0, \quad (4)$$

während V in

$$V = [x^2 + y^2]$$

übergeht, wo jedoch das Glied $x_0^2 + y_0^2$ fehlt.

Bezeichnet man daher durch $\mu_1, \mu_2, \dots$ vorläufig unbestimmte Factoren, so erhält man als Minimumbedingungen zu den Gleichungen (4) noch die folgenden

$$x = \mu, \quad y = r\mu \quad \text{für jeden Strahl,}$$

ferner

$$[\mu] = 0, [r\mu] = 0,$$

welche letztern sich auch in die Form

$$[x] = 0, [y] = 0 \quad (5)$$

setzen lassen.

Aus den beiden ersten und aus (4) ergibt sich

$$x = \frac{\frac{1}{2}(r-t) + x_0 + ry_0}{1+r^2}, \quad y = rx. \quad (6)$$

Setzt man daher

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{1+r^2}\right] &= A, & \left[\frac{r}{1+r^2}\right] &= B, & \left[\frac{rr}{1+r^2}\right] &= C \\ \left[\frac{t}{1+r^2}\right] &= \beta, & \left[\frac{rt}{1+r^2}\right] &= \gamma \end{aligned} \quad (7)$$

so folgt aus (5)

$$Ax_0 + By_0 + \frac{1}{2}(B - \beta) = 0$$

$$Bx_0 + Cy_0 + \frac{1}{2}(C - \gamma) = 0,$$

also schliesslich

$$x_0 = \frac{B(C - \gamma) - C(B - \beta)}{2(AC - B^2)}, \quad y_0 = \frac{B(B - \beta) - A(C - \gamma)}{2(AC - B^2)}. \quad (8)$$

Aus (3) zieht man noch die Gleichung

$$r - t = \frac{\left(\frac{n_0}{n}\right)^4 - 2\left(\frac{n_0}{n}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2}{2\left(\frac{n_0}{n}\right)^2 \left[\left(\frac{n_0}{n}\right)^2 - 1\right]},$$

welche zu einer für die numerische Rechnung wichtigen Folgerung führt. Da nämlich alle Elementenpaare n, λ der Gleichung (1) annähernd genügen, so ist hier der Zähler sehr klein, während der Nenner in den bisher beobachteten Theilen des Spectrums stets über 3 bleibt. Folglich ist r, t von t, r , also auch jedes Glied von B und C nur sehr wenig vom entsprechenden Gliede von β und γ verschieden, was beim Aufschlagen der Tafeln sehr zu Statten kommt. Sodann aber ergibt sich hieraus, dass in den Zählern von x_0 und y_0 aus den Minuenden und Subtrahenden die ersten Ziffern sich grossentheils wegheben, und ausser den durch die Ungenauigkeit der Tafeln beeinträchtigten Endziffern nur wenige zuverlässige Stellen übrig bleiben. Diefs hat zur Folge, dass man, obgleich alle x und y höchstens auf zwei Stellen genau zu berechnen sind, bei der Berechnung von $r, t, B, \beta, C, \gamma$ siebenstellige Tafeln mit aller Sorgfalt anzuwenden hat.

Die Constanten n_0, λ_0 werden am zweckmässigsten aus den Elementen $n_1, \lambda_1; n_2, \lambda_2$ zweier Strahlen nach den Formeln

$$n_0^2 = 2n_1^2 n_2^2 \frac{\frac{n_2^2}{\lambda_2^2} - \frac{n_1^2}{\lambda_1^2}}{\frac{n_2^4}{\lambda_2^2} - \frac{n_1^4}{\lambda_1^2}}, \quad \lambda_0^2 = \frac{2n_0^2(n_2^2 - n_1^2)}{\frac{n_2^4}{\lambda_2^2} - \frac{n_1^4}{\lambda_1^2}} \quad (9)$$

berechnet, wobei jedoch die beiden Strahlen nicht zu nahe bei einander gewählt werden dürfen. Vernachlässigt man diese Vorsichtsmafsregel, so bleiben, namentlich bei schwach dispergirenden Substanzen in den drei Differenzen, aus denen n_0^2 und λ_0^2 sich zusammensetzen, so wenig fehlerfreie Decimalstellen übrig, dafs besonders die Bestimmung λ_0^2 höchst unsicher wird.

Ich würde dieses Umstandes nicht erwähnen, wenn er nicht bei der üblichen Prüfung der von Cauchy selbst gegebenen Formel durch die fortlaufende Proportion

$$n_2 - n_1 : \frac{1}{\lambda_2^2} - \frac{1}{\lambda_1^2} = \dots$$

gänzlich übersehen würde, und gerade bei schwach dispergirenden Substanzen, auf welche diese Formel sich anwenden läfst, am meisten berücksichtigt werden mufs.

Die folgende Tafel enthält die Resultate meiner Rechnung. Zur Vergleichung habe ich noch die Indices nach Rudberg und die Wellenlängen nach Esselbach hinzugefügt, bemerke aber in Betreff der letztern, dafs Hr. Mascart durch $M, N, \dots$ bis S nicht die nämlichen Streifen wie Esselbach bezeichnet zu haben scheint.

Zu den Streifen A, S, T hat Hr. Mascart nur die Indices bestimmt. Ich habe die zugehörigen Wellenlängen, die sich unter A finden, nach meiner Formel berechnet. Die entsprechenden Werthe, welche man unter den Wellenlängen nach Esselbach findet, hat Hr. Helmholtz (Berl. Monatsber. 1855, S. 760) angegeben. Die Berechnung von Wellenlängen aus den zugehörigen Indices ist sehr mifslich, namentlich wenn jene sehr grofs sind, da in diesem Falle in der Wirklichkeit, also auch nach jeder der Wirklichkeit sich anschliessenden Formel unmerkliche Aenderungen der Indices schon beträchtliche Aenderungen der Wellenlängen nach sich ziehen. Nimmt man als Fehlergränze des Index von A nur fünf Einheiten der letzten Stelle, so wird die Fehlergränze der zugehörigen Wellenlänge nach der Formel $= 0,0184$.

Die Constanten N_0 und A_0 sind bis in die letzte Stelle genau, wovon ich mich durch eine zweite Ausgleichung mit Zugrundelegung der durch die erste corrigirten Constanten n_0, λ_0 überzeugt habe. Sie stimmen mit den Werthen

$$n_0 = 2,3185 \text{ und } \lambda_0 = 0,1748 \frac{1}{1000} \text{ mm} = 0,06548 \frac{1}{10000} \text{ Par. Zoll},$$

welche ich in meiner ersten Arbeit aus den Rudberg'schen Indices *B*, *G* abgeleitet habe, sehr nahe überein.

Die Correctionen der Indices sind unbedeutend, im Ultravioletten sogar auffallend gering, während sie im gewöhnlichen Spectrum die Abweichungen der Rudberg'schen Indices von denen des Hrn. Mascart durchgängig übersteigen.

Die Correctionen der Wellenlängen sind sämmtlich so klein, daß die ausgeglichenen Wellenlängen mit den beobachteten völlig identisch werden, wenn man sie auf gleiche Stellenzahl reducirt. Diese Erscheinung erklärt sich der Hauptsache nach dadurch, daß im wirklichen, wie in dem nach der Formel (1) entworfenen Spectrum die Wellenlängen sich von einem Strahl zum andern weit stärker ändern, als die Indices. Da hiernach kleine Aenderungen der Wellenlängen auf die Indices keinen merklichen Einfluß haben, so würde man, um die Correctionen der Indices auf Kosten der Wellenlängen hinabzudrücken, letztere unverhältnißmäßig großen Aenderungen unterwerfen müssen, was durch obige und ähnliche Minimumsbedingungen verhütet wird.

Indices					Wellenlängen in $\frac{1}{1000}$ mm						
$N_0 = 2,318832, \frac{N_0}{\sqrt{2}} = 1,63966.$					$A_0 = 0,1746670.$						
Dunkle Str.	Rudberg ν	$10^4(\nu - n)$	Mascart n	$10^4(N - n)$	Aus- geglichen N	$10^4 x$	Dunkle Streifen und Wellen- längen nach Esaelbach	Mascart λ	$10^5(A - \lambda)$	Aus- geglichen A	10^6
A	1,65308	+ 1,2	1,6501 3	+ 3,5	1,6533 1	+ 2,1	A 0,7617	0,68667	+ 0,25	0,7815	+ 3,6
B	1,6529 6	+ 0,6	1,6529 6	+ 2,0	1,6546 6	+ 1,2	B 0,6874	0,68667	+ 0,15	0,68667 25	+ 2,3
C	1,65152	+ 0,4	1,6544 6	- 0,3	1,6584 3	- 0,2	C 0,6564	0,65607	- 0,02	0,65607 15	- 0,4
D	1,65850	+ 0,6	1,6584 6	- 1,8	1,6633 6	- 1,1	D 0,5886	0,5888	- 0,17	0,58879 98	- 3,0
E	1,66360	+ 0,9	1,6635 4	- 1,0	1,6643 6	- 0,6	E 0,5260	0,52678	- 0,10	0,52677 83	- 2,0
b	1,6644 6	- 0,3	1,6644 6	- 1,7	1,6677 6	- 1,0	F 0,4845	0,51555	- 0,18	0,51654 90	- 3,6
F	1,66802	- 0,0	1,6679 3	- 1,5	1,6760 5	- 0,9	G 0,4287	0,48596	- 0,12	0,48595 82	- 4,1
G	1,67617	0,0	1,6762 0	- 0,9	1,6832 1	- 0,5	H 0,3929	0,43075	- 0,05	0,43074 82	- 3,1
H	1,68330		1,6833 0	- 0,4	1,6870 2	- 0,2	L 0,3791	0,39672	- 0,07	0,39671 88	- 1,3
L			1,6870 6	- 0,3	1,6896 1	- 0,2	M 0,3657	0,38190	- 0,06	0,38189 95	- 2,0
M			1,6896 6	- 0,3	1,6943 8	- 0,05	N 0,3498	0,37288	+ 0,02	0,37287 93	- 1,4
N			1,6944 1	+ 1,1	1,6995 6	+ 0,6	O 0,3360	0,35802	+ 0,18	0,35801 95	+ 0,4
O			1,6995 5	+ 1,0	1,7028 7	+ 0,6	P 0,3290	0,34401	+ 0,17	0,34401 02	+ 5,5
P			1,7027 6	+ 0,7	1,7062 3	+ 0,4	Q 0,3232	0,33602	+ 0,13	0,33602 18	+ 5,2
Q			1,7061 3	+ 0,7	1,7116 2		R 0,3091	0,32856		0,32856 17	+ 4,2
R			1,7115 5					0,31775		0,31775 13	
S			1,7158 0							0,3103	
T			1,7193 9							0,3043	

X.

Zur Theorie der einwerthigen Potentiale.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 64, 1865, S. 321—368.)

Die Eigenschaften der Potentiale von Massen, welche körperliche Räume oder Oberflächen stetig erfüllen, sind seit den Untersuchungen von Gauss und Green und den Entdeckungen Dirichlets so vollständig festgestellt, dass eine auf diese speciellen Functionen beschränkte Untersuchung fast ausschliesslich auf die Reproduction bekannter Resultate angewiesen sein würde.

Die eben bezeichneten Potentiale sind aber weder die einzigen, welche in der Lehre von den nach dem Newtonschen Gesetze wirkenden Anziehungskräften in Betracht zu ziehen sind, noch von ausschliesslicher Bedeutung für die Anwendungen. Vielmehr müssen zu ihnen, wie aus der Theorie des Magnetismus und der linearen elektrischen Ströme bekannt ist, noch andere gefügt werden, bei denen die Anziehung von einzelnen Punkten oder den kleinsten Theilen einer Linie aus wirkt, und von denen namentlich die auf den letzten Fall bezüglichen, in hinlänglicher Allgemeinheit aufgefasst, jenen an Wichtigkeit kaum nachstehen dürften.

Man erkennt indessen sehr leicht, wenn man nur den Unterschied zwischen dem Potential eines schweren Massenpunktes und demjenigen eines magnetischen Elementes beachtet, dass die Eintheilung der Potentiale nach fingirten Massenvertheilungen keinen Ueberblick über den Umfang dieser Functionengattung gewähren kann, ganz abgesehen von den Schwierigkeiten, welche sich darbieten, wenn man die charakteristischen Eigenschaften solcher Potentiale an ihren, durch die vorausgesetzte Massenvertheilung bedingten Ausdrücken selbst aufsucht.

Um diese Fragen zu erledigen, bin ich daher in der folgenden Arbeit nicht von gegebenen Ausdrücken der einzelnen Potentiale ausgegangen, sondern von einer Definition derselben, durch welche die allen einwerthigen Potentialen ausserhalb ihrer Unstetigkeitsstellen gemeinsamen Eigenschaften (art. I) und ihre ausnahmslose Darstellbarkeit

durch convergente Rechnungsoperationen (art. VI.) zu Merkmalen der ganzen Gattung gemacht werden. Von diesem Standpunkte aus besteht das Ziel der Untersuchung darin, die ganze Functionengattung nach Massgabe der mit den genannten Bedingungen verträglichen Unstetigkeiten in ihre charakteristischen Unterabtheilungen zu zerfällen, und die analytischen Formen zu entwickeln, durch welche die Functionen jeder Abtheilung dargestellt werden.

Es kann als ein Vorthail dieser Behandlungsweise bezeichnet werden, dass sie bei jeder Gattung von Potentialen die wesentlichen Eigenschaften derselben ihrem vollen Umfange nach hervortreten lässt. In der That findet sich unter den bekannten Sätzen über die Potentiale von Körpermassen und Flächenschichten (art. V. c., IX. m., XII. q.), auf welche die folgende Untersuchung ihrer Natur nach ebenfalls führen musste, keiner, der nicht von Beschränkungen befreit worden ist, die sich zwar beim directen Nachweise dieser Sätze an den Ausdrücken jener Potentiale durch doppelte und dreifache Integrale nicht vermeiden lassen, aber nur aus den hierbei verfügbaren Hilfsmitteln entspringen.

Die Gleichungen III. (O.) und IV. (3.) sind schon mehrfach aufgestellt, aber noch nicht zu den Folgerungen benutzt worden, die hier aus ihnen gezogen werden, wozu allerdings in den schwierign Fällen die Hülfsätze d. und e. des art. VII. erforderlich sind. Mit Rücksicht auf die Wichtigkeit dieser und ähnlicher Formeln durfte eine vollständige Begründung der erstern nicht übergangen werden. Um in den art. VII., XI., XII. den Gang der Untersuchung nicht unterbrechen zu müssen, habe ich den Beweis einiger dort benutzter Hülfsätze an den Schluss der Abhandlung in besondere Noten verlegt.

I.

Wir bezeichnen durch x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes σ im unbegrenzten Raume $\mathfrak{R}$, und durch φ' den in ihm stattfindenden Werth einer gegebenen einwerthigen Function, welche, mit Ausnahme von isolirten Punkten, Linien und Flächen, nirgendwo unbestimmt oder unstetig ist, und nur in isolirten Punkten q unendlich wird. In der Nähe der letztern beschränken wir das Anwachsen von φ' durch die Bedingung, dass das Product

$$r^k \varphi',$$

wenn r die Entfernung von σ bis q bedeutet, bei jeder Richtung von r mit r zugleich verschwindet, sobald für k ein passender, von 1 verschiedener positiver echter Bruch gesetzt wird. Endlich setzen wir,

wenigstens vorläufig, fest, dass φ' ausserhalb eines gegebenen Raumes $\mathfrak{R}'$, der keine unendlich weit vom Coordinatenanfang entfernten Punkte enthält, gleich Null sein soll.

Unter diesen Voraussetzungen untersuchen wir diejenigen Functionen v von x, y, z , welche den folgenden Bedingungen genügen:

A. Im ganzen Raume $\mathfrak{R}$, mit Ausnahme gegebener Punkte p , Linien l und Flächen f , sind v und seine ersten Derivirten einwerthig, endlich und stetig.

B. Ausserhalb der in A. bezeichneten Stellen besteht zwischen den zweiten Derivirten von v die Gleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -4\pi\varphi'.$$

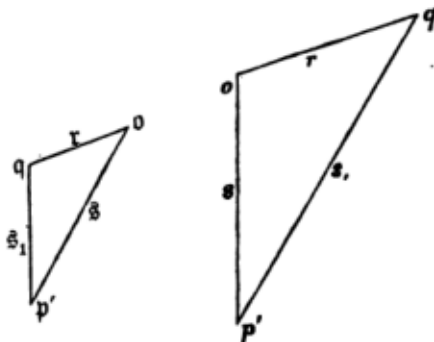
C. Den Fall, wo eine erste Derivirte von v oder v selbst an einer Fläche entlang unendlich oder unbestimmt sind, schliessen wir aus.

Nähere Bestimmungen über die Zahl und Beschaffenheit der Ausnahmestellen p, l, f und das Verhalten von v an denselben bleiben der späteren Untersuchung vorbehalten.

II.

Durch conforme Umbildung des Raumes $\mathfrak{R}$ ist man zunächst im Stande, jede Function v auf eine andere Function v von derselben Art zurückzuführen, die an so enge gezogene Bedingungen gebunden ist, dass sie einer weitem Behandlung zugänglich wird.

Neben dem unbegrenzten Raume $\mathfrak{R}$ denke man sich einen zweiten, ihm in den kleinsten Theilen ähnlichen Raum R , und in demselben drei rechtwinklige Axen; die Coordinaten eines R angehörigen Punktes o in Bezug auf diese Axen sollen x, y, z heissen. Es seien ferner p' und p' zwei in $\mathfrak{R}$ und R nach Belieben angenommene Punkte, deren Coordinaten, jedesmal mit Bezug auf die dem betreffenden Raume angehörigen Axen, l, m, n und l, m, n sind. Bezeichnet man nun die Entfernungen op' und op' durch ξ und s , so wird nach einem Satze des Herrn Liouville¹⁾



1) Journ. de M. Liouville, XV. Wegen des Ueberganges von v und φ' zu v und φ und der sich hieran knüpfenden Relationen vergl. die wichtige Abhandlung des Herrn Liouville im nämlichen Journal XII. 286—288.

die verlangte Beziehung zwischen den entsprechenden Punkten o und o beider Räume auf die allgemeinste Weise durch die Gleichungen

$$(1.) \quad \xi - l = \left(\frac{a}{s}\right)^2 (x - l), \quad \eta - m = \left(\frac{a}{s}\right)^2 (y - m), \quad \zeta - n = \left(\frac{a}{s}\right)^2 (z - n)$$

oder die aus ihnen folgenden

$$\xi s = a^2, \quad \frac{\xi - l}{s} = \frac{x - l}{s}, \quad \frac{\eta - m}{s} = \frac{y - m}{s}, \quad \frac{\zeta - n}{s} = \frac{z - n}{s}$$

dargestellt, vorausgesetzt, dass die Aehnlichkeit entsprechender Figuren bei beliebiger Grösse derselben und imaginäre Beziehungen ausgeschlossen werden.

Die letzten Gleichungen lassen die geometrische Beziehung zwischen den entsprechenden Punkten beider Räume unmittelbar erkennen, wenn man einen dieser Räume solange verschiebt und dreht, bis die Punkte p' und p' und die Richtungen der wachsenden Coordinaten zusammenfallen, wobei der Fall, dass dies letztere nicht angeht, ausser Acht gelassen werden kann. In der That geht dann die Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte o, o stets durch den Punkt (p', p') , und ihre von diesem Punkte ausgehenden Radienvectoren ξ, s werden zu einander umgekehrt proportional.

Nennt man p' und p' die Mittelpunkte der beiden Räume $\mathfrak{R}$ und R , so folgt aus der Gleichung $\xi s = a^2$, dass im Mittelpunkte des einen Raumes die unendlich entfernten Theile des andern abgebildet sind. Ausserhalb p' sind x, y, z einwerthige, endliche und stetige Functionen von ξ, η, ζ , und umgekehrt letztere ausserhalb p' in gleicher Weise mit jenen verbunden. Folglich gehört ausserhalb der Mittelpunkte zu jedem Punkte des einen Raumes ein einziger, ihn abbildender Punkt im andern Raume; wenn die Entfernung eines Punktes vom zugehörigen Mittelpunkte messbar, d. i. weder unendlich gross, noch unendlich klein ist, so gilt dasselbe von seiner Abbildung im andern Raume; endlich werden zusammenhängende Oerter in der Abbildung nicht getrennt, unterbrochene nicht zusammengefügt.

Gleichzeitig mit dieser Umbildung von $\mathfrak{R}$ führe ich zwei auf R bezogene Functionen v und φ ein (vergl. die oben erwähnte Abhandlung von Liouville), welche die conformen Umbildungen von v und φ' heissen mögen, und mit Rücksicht auf die in (1.) festgestellte Beziehung zwischen den Variablen ξ, η, ζ und x, y, z durch die Gleichungen

$$(2.) \quad v = \frac{s}{a} v, \quad \varphi = \left(\frac{s}{a}\right)^5 \varphi',$$

oder die folgenden

$$v = \frac{a}{s} v, \quad \varphi = \left(\frac{a}{s}\right)^5 \varphi'$$

bestimmt sind.

Dies festgestellt, gehen wir dazu über, die im vorigen art. für ϱ' und v gestellten Bedingungen auf ϱ und v zu übertragen, und wählen zu diesem Zwecke den Mittelpunkt p' von $\mathfrak{R}$ ausserhalb $\mathfrak{R}'$ und sämtlicher Ausnahmestellen p, l, f .

Dann kann die Abbildung R' von $\mathfrak{R}'$, in welcher allein ϱ von Null verschieden ist, weder den Mittelpunkt p' von R enthalten, noch bis ins Unendliche reichen, ersteres, weil $\mathfrak{R}'$ nicht bis ins Unendliche reicht, letzteres, weil p' nicht im Innern von $\mathfrak{R}'$ liegt. Da hiernach $\varrho = \left(\frac{s}{a}\right)^5 \varrho'$ im Punkte p' , ungeachtet des dort ins Unendliche wachsenden Factors s^5 gleich Null bleibt, so kann es nur mit ϱ' zugleich unbestimmt, unstetig oder unendlich werden, ersteres also nur in isolirten Punkten, Linien und Flächen, letzteres nur in solchen Punkten q , welche den Punkten q von $\mathfrak{R}$ entsprechen.

Ist r die Entfernung von q bis o , und bedeuten s_1, s_1 die Abstände der Punkte q, q von den zugehörigen Mittelpunkten, so folgt aus der, durch die Gleichungen (1.) und die Proportion $s : s_1 = s_1 : s$ leicht zu beweisenden Aehnlichkeit der Dreiecke $p'oq, p'qo$, $r = \frac{a^2}{s s_1} r$, also

$$r^k \varrho = \left(\frac{s}{a}\right)^5 \left(\frac{a^2}{s s_1}\right)^k \cdot r^k \varrho'.$$

Lässt man o mit q , als auch o mit q zusammenfallen, so verschwindet auf der rechten Seite der Factor $r^k \varrho'$ nach art. I., der andere Factor wird $= \left(\frac{s_1}{a}\right)^{5-2k}$, also nicht unendlich gross. Folglich verschwindet $r^k \varrho$ unabhängig von der Richtung von r , sobald o mit q zusammenfällt. Die für ϱ eintretenden Bedingungen sind also von derselben Art, wie die in art. I. für ϱ' gestellten.

Anders verhält es sich mit v ; die über die Lage von p' getroffene Bestimmung führt eine wesentliche Beschränkung in der Lage der Ausnahmestellen von v und eine Zerlegung von $\mathfrak{A}$. in zwei Bedingungen herbei, von denen die eine sich auf das Innere von R , die andere sich auf die unendlich entfernten Theile dieses Raumes bezieht.

Da die Ausnahmestellen p, l, f von v ausserhalb p' liegen, so liegen ihre Abbildungen p, l, f sämtlich in einem endlichen Bereiche von p' , derart, dass man sie mit p' in eine Fläche S einschliessen kann, die keine unendlich weit von einander und von dem willkürlich zu wählenden Coordinatenanfange entfernten Punkte enthält. In p, l, f verlieren v und seine ersten Derivirten der Definition gemäss die Eigenschaft, zugleich einwerthig, endlich und stetig zu sein; dasselbe gilt im Allgemeinen auch noch vom Punkte p' , aber von keinem anderen Punkte des Raumes R .

In der That liefert jeder im Unendlichen liegende Punkt p des Raumes $\mathfrak{R}$ einen mit p' zusammenfallenden Punkt p ; jeder Linie l und jeder Fläche f , die in $\mathfrak{R}$ bis ins Unendliche reicht, entspricht eine Linie l und eine Fläche f , die sich in p' schliesst. Enthält $\mathfrak{R}$ keine Ausnahmestelle von v im Unendlichen, so wird p' gleichwohl eine Ausnahmestelle von v werden, sobald sv mit s zugleich über alle Grenzen wächst.

Bezeichnet man durch α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche die Richtung von p' nach o mit den Axen der x, y, z bildet, so wird z. B. $\alpha = \frac{x-l}{s}$, und man erhält aus (1.) und (2.)

$$\frac{\partial sv}{\partial x} = \alpha \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\alpha^2}{s^2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - 2\alpha \left(\alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right].$$

Nennt man daher die festen Werthe, welche $\alpha^2 \frac{\partial v}{\partial x}$, $\alpha^2 \frac{\partial v}{\partial y}$, $\alpha^2 \frac{\partial v}{\partial z}$ in p' erlangen, P, Q und R , und lässt nun o in der durch α, β, γ bestimmten Richtung ins Unendliche rücken, wobei dann schließlich o mit p' zusammenfällt, so folgt der Satz, dass $s^2 \frac{\partial sv}{\partial x}$ gegen die feste Grenze $P - 2\alpha(\alpha P + \beta Q + \gamma R)$ convergirt. Aehnliches gilt von $s^2 \frac{\partial sv}{\partial y}$ und $s^2 \frac{\partial sv}{\partial z}$.

Da aber hiernach $s^2 \frac{\partial sv}{\partial x}$ bei unbegrenzter Zunahme von s nicht über alle Grenzen wächst, so muss $s \frac{\partial sv}{\partial x} = s^2 \frac{\partial v}{\partial x} + sv\alpha$ an der Grenze verschwinden. Bezeichnet man daher durch M den festen Werth, den $av = sv$ in p' erlangt, so folgt unter derselben Voraussetzung, wie vorhin, $\lim sv = M$, $\lim s^2 \frac{\partial v}{\partial x} = -M\alpha$; und man sieht leicht, dass man hier s durch die Entfernung r zwischen o und einem beliebigen, in endlicher Entfernung von p' liegenden Punkte O ersetzen kann, weil der Quotient $\frac{s}{r}$ im Unendlichen $= 1$ wird. Folglich haben wir den Satz:

Sind α, β, γ die Cosinus der Winkel, welche die Richtung von einem festen Punkte O nach o mit den Axen bildet, und ist r die Entfernung beider Punkte, so gelten für die von O unendlich weit entfernten Punkte o des Raumes die asymptotischen Ausdrücke:

$$v = \frac{M}{r}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{M\alpha}{r^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{M\beta}{r^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{M\gamma}{r^2}.$$

Wir ziehen endlich aus dem Vorstehenden noch die für unsere spätern Zwecke ausreichende Folgerung, dass v , $r \frac{\partial v}{\partial x}$, $r \frac{\partial v}{\partial y}$ und $r \frac{\partial v}{\partial z}$ im Unendlichen verschwinden, ohne vorher ihre Stetigkeit zu unterbrechen.

Schliesslich wird (vergl. die Abhandlung von Liouville)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \left(\frac{s}{a}\right)^2 \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right],$$

also, wenn man den rechts in Klammern stehenden Ausdruck wie üblich durch Δv bezeichnet, $\Delta v = -4\pi \left(\frac{a}{s}\right)^2 \rho' = -4\pi \rho$.

Die Functionen v genügen daher den folgenden Bedingungen:

- A. v und seine ersten Derivirten sind, mit Ausnahme gewisser Stellen, im ganzen Raume R einwerthig, endlich und stetig.
- B. Ausserhalb derselben Stellen besteht zwischen den zweiten Derivirten von v die Gleichung

$$\Delta v = -4\pi \rho.$$

- C. Eine Ausnahme von diesen Bedingungen wird nur in bestimmten Punkten p , Linien l und Flächen f gestattet. Diese *Ausnahmestellen* sind so im Raume vertheilt, dass man sie in eine Fläche S einschliessen kann, welche keine unendlich weit vom Coordinatenanfange entfernten Punkte enthält.

Den Fall, wo v oder eine erste Derivirte von v an einer Fläche entlang unendlich oder unbestimmt wird, schliessen wir aus.

- D. Ist r die Entfernung von o bis zu irgend einem festen Punkte O , so convergiren

$$v, \quad r \frac{\partial v}{\partial x}, \quad r \frac{\partial v}{\partial y}, \quad r \frac{\partial v}{\partial z}$$

ohne Stetigkeitsunterbrechung gegen Null, wenn o , ohne S zu überschreiten, in beliebiger Richtung ins Unendliche rückt.

- E. Die für ρ gültigen Bedingungen sind die nämlichen, wie die in art. I für ρ' gestellten.

Folglich ist v eine Function derselben Art, wie v , jedoch von speciellern Charakter, da alle Ausnahmestellen ins Endliche gerückt sind, und für die unendlich entfernten Theile des Raumes die Dirichlet'sche Bedingung D. eingetreten ist. Wir haben daher den Satz, dass jede Function v sich aus einer solchen speciellen Function v durch conforme Umbildung des Raumes R und der Functionen v und ρ ergibt.

Die Functionen v unterscheiden sich von einander 1) durch die Zahl und Beschaffenheit ihrer Ausnahmestellen und 2) durch die Gesetze, nach denen sie und ihre ersten Derivirten dort anwachsen oder unstetig werden. Was den ersten Punkt betrifft, so werden wir im Folgenden stets die Grenzfälle ausschliessen, wo die Anzahl der Punkte p , die Länge einer Linie l oder der Inhalt einer Fläche f un-

endlich gross ist. Diese Beschränkung der Aufgabe ist keine wesentliche, und hat nur den Zweck, von der Untersuchung der Hauptfälle Convergenzfragen fern zu halten, welche bloss auf den Uebergang zu den Grenzfällen Bezug haben, und in jedem einzelnen Falle besonders zu erledigen sind (art. XIII.).

III.

Wir denken uns einen zusammenhängenden Theil V des unbegrenzten Raumes, in dessen Innerem sich Höhlungen befinden, welche sämtliche Ausnahmestellen von v enthalten, und nennen S die Gesamtoberfläche dieser Höhlungen, S_∞ die äussere Oberfläche von V , so dass die vollständige Begrenzung dieses Raumes durch die Flächen S und S_∞ gebildet wird. Die Elemente der drei Gebiete V , S_∞ und S werden wir durch ∂V , ∂S_∞ und ∂S , ihre Coordinaten ohne Unterschied durch x, y, z , dagegen die Coordinaten eines in V festgewählten Punktes O durch X, Y, Z bezeichnen.

Um diesen Punkt O als Centrum legen wir eine Kugel K , deren Halbmesser c wir so klein wählen, dass alle Punkte von K ins Innere von V fallen, und eine zweite Kugel K_1 , deren Halbmesser die Längeneinheit ist. Ist alsdann $\partial\sigma$ ein Oberflächenelement von K_1 , und sind ξ, η, ζ seine Coordinaten in Bezug auf drei durch O in gleicher Richtung mit den ursprünglichen gelegte Axen, so sind in Bezug auf dieselben Axen $c\xi, c\eta, c\zeta$ die Coordinaten seiner Centralprojection auf K , und ihr Inhalt $c^2\partial\sigma$ ist das Oberflächenelement der letztern.

Wir errichten endlich über ∂S und ∂S_∞ Normalen, die erstere nach V hinein, die andere aus diesem Raume hinaus, und nennen die ersten Elemente dieser Normalen ∂p und ∂p_∞ , so dass z. B. $\frac{\partial\omega}{\partial p}$ den Werth bedeutet, welchen die Derivirte von ω nach der über ∂S errichteten Normale in ihrem Anfangspunkte auf ∂S hat.

1. Multiplicirt man die Gleichung $\Delta v = -4\pi\rho$ mit $-\frac{\partial V}{4\pi r}$, wo r die Entfernung von O bis zum Elemente ∂V ist, und integrirt über alle Elemente von V mit Ausschluss der in K enthaltenen, so ergiebt

sich mit Hülfe der Gleichung $\frac{1}{r}\Delta v = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}\right) + \dots$ und mit

Rücksicht darauf, dass der Ausdruck $\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}$ und die beiden ähnlich gebildeten während der Integration einwerthig, endlich und stetig bleiben nach dem Greenschen Satze

$$\int \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial p_\infty} - v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_\infty} \right) \partial S_\infty + \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial p} - v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p} \right) \partial S \\ + \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial c} - v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} \right) c^2 \partial \sigma,$$

wo zur Linken der Accent am Integralzeichen bedeutet, dass das Volumen der Kugel K vom Integrationsraume ausgeschlossen ist.

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{1}{4\pi} \int \left(v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial p} \right) \partial S = (S), \quad \frac{1}{4\pi} \int \left(v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_\infty} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial p_\infty} \right) \partial S_\infty = (S_\infty),$$

so folgt hieraus:

$$\frac{1}{4\pi} \int \left(c \frac{\partial v}{\partial c} + v \right) \partial \sigma = \int \frac{\partial V}{\partial r} + (S) - (S_\infty).$$

In dieser Gleichung lassen wir c verschwinden, und werden beweisen, dass unter diesen Umständen beide Seiten gegen feste Grenzen convergiren, und auch beim Übergange zur Grenze $c = 0$ nicht aufhören, einander gleich zu sein.

Das Integral $\frac{1}{4\pi} \int c \frac{\partial v}{\partial c} \partial \sigma$ ist numerisch kleiner als das Product aus $\frac{1}{4\pi} \int c \partial \sigma = c$ und dem grössten numerischen Werthe, den

$$\frac{\partial v}{\partial c} = \xi \frac{\partial v}{\partial x} + \eta \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \frac{\partial v}{\partial z}$$

auf K erlangt. Da aber $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ den unveränderlichen Werth 1 hat, so kann dieses Product wegen A . durch Verkleinerung von c unter jede Grenze gebracht werden, folglich convergirt $\frac{1}{4\pi} \int c \frac{\partial v}{\partial c} \partial \sigma$ mit abnehmendem c ohne Stetigkeitsunterbrechung gegen Null.

Nennt man ferner v_0 den Werth, den die einwerthige Function v in O erlangt, und ersetzt das Integral $\frac{1}{4\pi} \int v \partial \sigma$ durch $v_0 + \frac{1}{4\pi} \int (v - v_0) \partial \sigma$, so convergirt der zweite Summand wegen der Stetigkeit von v mit abnehmendem c stetig gegen Null.

Folglich convergirt bei unbegrenzter Abnahme von c die linke Seite obiger Gleichung ohne Stetigkeitsunterbrechung gegen die feste Grenze v_0 .

Auf der rechten Seite ändert sich während dessen nur das erste Glied, und zwar ist der Zuwachs, den sie erlangt, wenn c in den

kleineren Werth b übergeht, gleich $\int_b^c r \bar{c} r \int \rho \partial \sigma$. Solange O in messbarer Entfernung von allen Punkten q liegt, in denen ρ unendlich wird, verschwindet dieses Integral offenbar mit c zugleich; ist dagegen O selbst einer dieser Punkte, so setze man dasselbe, bei passender Wahl des von 1 verschiedenen positiven echten Bruches k gleich $\int_b^c r^{1-k} \bar{c} r \int r^k \rho \partial \sigma$.

Dann kann man c so klein wählen, dass $r^k \rho$ während der Integration numerisch kleiner als eine beliebig gegebene Zahl A bleibt, also das Integral, abgesehen vom Zeichen, kleiner als

$$\int_b^c r^{1-k} \bar{c} r \int A \partial \sigma = 4\pi A \cdot \frac{c^{2-k} - b^{2-k}}{2-k}$$

wird. Folglich convergirt dieses Integral auch im gegenwärtigen Falle mit c und dem kleineren b zugleich stetig gegen Null.

Man kann daher c so klein wählen, dass jeder Zuwachs, den die rechte Seite obiger Gleichung durch fernere Verkleinerung von c noch erhalten kann, unter eine beliebige Grenze gedrückt wird. Da aber die rechte Seite, solange c von Null verschieden ist, einen völlig bestimmten, endlichen Werth hat, so folgt hieraus zunächst, dass sie bei unbegrenzter Abnahme von c ohne Stetigkeitsunterbrechung gegen eine feste Grenze convergirt, welche dadurch erhalten wird, dass man in ihrem ersten Gliede die Integration über das ganze Volumen V ausdehnt.

Da endlich die obige Gleichung für ein beliebig kleines c besteht, solange nur c von Null verschieden ist, und die letzten Aenderungen, welche ihre beiden Seiten erleiden, wenn man c vollends verschwinden lässt, selbst verschwindend klein, also nicht um messbare Grössen von einander verschieden sind, so kann die Gleichheit auch durch den Uebergang zur Grenze $c = 0$ nicht aufgehoben werden, und es ergibt sich nun folgende, bei jeder Lage von O im Innern von V gültige Gleichung:

$$(O.) \quad v_0 = \int \frac{\rho \partial V}{r} + (S) - (S_\infty).$$

2. Hätte man die Gleichung $\Delta v = -4\pi \rho$ mit $\frac{x-X}{4\pi r^3} \partial V = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial X} \int \frac{\rho}{r} \partial V$ multiplicirt, und die Integration im früheren Umfange ausgeführt, so würde sich

$$\frac{1}{4\pi} \int \left[\frac{x-X}{r^3} \frac{\partial v}{\partial c} - v \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{x-X}{r^3} \right) \right] c^2 \partial \sigma = \int \frac{\rho}{\partial X} \frac{\partial}{\partial X} \int \frac{\rho}{r} \partial V + (S)' - (S_\infty)'$$

ergeben haben, wo $(S)'$ und $(S_\infty)'$ die Integrale bedeuten, welche man aus den vorhin durch (S) und (S_∞) bezeichneten erhält, wenn man $\frac{1}{r}$

durch $\frac{\partial}{\partial X} \frac{1}{r}$ ersetzt, d. h. unter dem Integralzeichen nach X differentiirt.

Im Elemente $c^2 \partial \sigma$ wird nach der oben eingeführten Bezeichnung $x - X = c \xi$, $\frac{x - X}{r^3} = \frac{\xi}{c^3}$, also ist die linke Seite gleich

$$\frac{1}{4\pi} \int \left[\xi \frac{\partial v}{\partial c} - v \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{\xi}{c^3} \right) \right] c^2 \partial \sigma = \int \frac{\partial (v \xi c^2)}{4\pi c^3 \partial c} \cdot \partial \sigma.$$

Bezeichnet man aber durch ∂K das Volumenelement von K , so ist wegen der Stetigkeit von v $\int \frac{\partial v}{\partial x} \partial K = \int v \xi c^2 \partial \sigma$. Lässt man hier c um ∂c wachsen, und hebt in den Änderungen beider Seiten mit $4\pi c^3 \partial c$ weg, so folgt

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial v}{\partial x} \partial \sigma = \frac{\partial \int v \xi c^2 \partial \sigma}{4\pi c^3 \partial c} = \int \frac{\partial (v \xi c^2)}{4\pi c^3 \partial c} \cdot \partial \sigma.$$

da $\frac{\partial (v \xi c^2)}{\partial c}$ während der Integration weder unendlich noch unbestimmt wird. Also haben wir

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial v}{\partial x} \partial \sigma = \int \rho \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \partial V + (S)' - (S_\infty)'.$$

Die linke Seite ist ein Mittel aus den Werthen, welche $\frac{\partial v}{\partial x}$ auf K erlangt, und geht daher wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial v}{\partial x}$ mit abnehmendem c stetig in den festen Werth $\frac{\partial v_0}{\partial x}$ über, welchen diese Derivirte in O hat.

Können wir daher beweisen, dass auch die rechte Seite mit abnehmendem c ohne Stetigkeitsunterbrechung gegen eine feste Grenze convergirt, so folgt, dass die Gleichung auch noch an der Grenze $c = 0$ besteht.

Lässt man c in den kleineren Werth b übergehen, so erhält die rechte Seite den Zuwachs

$$\int_b^c \partial r \int \rho \xi \partial \sigma = \int_b^c \frac{\partial r}{r^2} \int r^2 \rho \xi \partial \sigma.$$

Solange O in messbarer Entfernung von jedem Punkte q liegt, verschwindet dies mit c zugleich; fällt O mit einem Punkte q zusammen, so wird für ein hinlänglich kleines c während der Integration $\int r^2 \rho \xi \partial \sigma$ numerisch kleiner als $\int A \partial \sigma = 4\pi A$, weil ξ zwischen -1 und 1 liegt;

folglich wird jener Zuwachs kleiner als $4\pi A \int_b^c \frac{\partial r}{r^k} = 4\pi A \frac{c^{1-k} - b^{1-k}}{1-k}$,

und verschwindet daher auch jetzt noch, wenn c und das kleinere b in Null übergehen. Daraus folgt:

$$(O') \quad \frac{\partial v_0}{\partial X} = \int \varrho \frac{\partial}{\partial X} \frac{1}{r} \partial V + (S)' - (S_\infty)'.$$

Zugleich ist der Nachweis geliefert, dass das erste Glied zur Rechten einen völlig bestimmten, endlichen Werth hat, was von den beiden andern Gliedern ohne Weiteres einleuchtet.

IV.

Lässt man die Fläche S_∞ sich immer mehr erweitern, so dass sie fortwährend neue Teile des äusseren Raumes in ihr Inneres aufnimmt, ohne bereits überschrittene Theile auszuschneiden, so kann sich auf der rechten Seite der Gleichung

$$(O) \quad v_0 = \int \varrho \frac{\partial V}{r} + (S) - (S_\infty)$$

das erste Glied nur solange ändern, als es ausserhalb S_∞ noch Stellen giebt, in denen ϱ von Null verschiedene Werthe hat. Von dem Augenblicke an, wo S_∞ diese Stellen sämmtlich überschritten hat, wird das Integral $\int \varrho \frac{\partial V}{r}$ von der ferneren Umgestaltung der Fläche S_∞ unabhängig.

Dasselbe tritt einmal ein, wenn ϱ zwar im ganzen Raume Werthe hat, jedoch so verläuft, dass das über den ganzen Raum erstreckte Integral $\int \varrho \frac{\partial V}{r}$ von der Anordnung der Integration unabhängig convergirt. In der That kann man unter dieser Voraussetzung dem Integrationsraume, ohne dabei Begrenzungstheile ins Unendliche zu verlegen, einen solchen Umfang ertheilen, dass keine fernere Erweiterung desselben den Werth des Integrals um eine beliebig kleine, gegebene Grösse zu ändern mehr im Stande ist.

Für den Fall, dass ϱ nicht bloss in einem begrenzten Raume R' von Null verschiedene Werthe hat, setzen wir diese Bedingung als erfüllt voraus.

Lässt man daher alle Punkte der Fläche S_∞ ins Unendliche rücken, wobei nach den einmal gestellten Bedingungen in V keine Ausnahmestelle von v aufgenommen werden kann, so wird vorstehende Gleichung eine, für alle ausserhalb S liegenden Punkte O gültige, convergente

Darstellung von v_0 stets und auch nur dann liefern, wenn (S_∞) ohne Stetigkeitsunterbrechung gegen eine feste Grenze convergirt, die von dem Gesetze, nach welchem die Umgestaltung von S_∞ erfolgt, unabhängig ist.

Die Fläche S_∞ schliessen wir in eine Fläche S'_∞ ein, deren Element wir $\partial S'_\infty$ nennen; das erste Element der über $\partial S'_\infty$ aus dem von beiden Flächen begrenzten Raume hinaus errichteten Normale soll durch $\partial p'_\infty$ bezeichnet werden. Sei w eine zweite, nebst ihren ersten Derivirten in diesem Raume einwerthige, endliche und stetige Function, welche der Gleichung $\Delta w = 0$ genügt. Integriert man nun die Gleichung $v \Delta w - w \Delta v = \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial w}{\partial x} - w \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \dots = 4\pi \varrho w$ über den zwischen S_∞ und S'_∞ liegenden Raum W , so folgt, wenn mit 4π weggehoben wird

$$(3.) \quad \frac{1}{4\pi} \int \left(v \frac{\partial w}{\partial p'_\infty} - w \frac{\partial v}{\partial p'_\infty} \right) \partial S'_\infty = \frac{1}{4\pi} \int \left(v \frac{\partial w}{\partial p_\infty} - w \frac{\partial v}{\partial p_\infty} \right) \partial S_\infty + \int \varrho w \partial W.$$

Setzt man hier $w = \frac{1}{r}$, und lässt nun die Flächen S_∞ und S'_∞ unabhängig von einander ins Unendliche rücken, so convergirt der oben gestellten Bedingung zufolge $\int \varrho w \partial W$ stetig gegen Null. Wenn daher gleichzeitig die linke Seite gegen eine feste Grenze convergirt, so ist dies auch die Grenze des ersten Gliedes zur Rechten, nämlich von (S_∞) . Nimmt man aber für S'_∞ eine um O als Centrum mit dem Radius r beschriebene Kugel, so wird die linke Seite

$$= \frac{1}{4\pi} \int \left(v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) r^2 d\sigma = -\frac{1}{4\pi} \int \left[v + \xi \cdot r \frac{\partial v}{\partial x} + \eta \cdot r \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \cdot r \frac{\partial v}{\partial z} \right] d\sigma.$$

Dieselbe ist also numerisch kleiner als die Summe aus den grössten numerischen Werthen, welche v , $r \frac{\partial v}{\partial x}$, $r \frac{\partial v}{\partial y}$, $r \frac{\partial v}{\partial z}$ auf S'_∞ annehmen. Da jeder von diesen vier Summanden wegen D . durch Vergrösserung von r unter jede Grenze gebracht werden kann, so convergirt mit wachsendem r die linke Seite obiger Gleichung stetig gegen Null; dies ist also auch, nach dem vorhin Bemerkten, der Werth, in welchen (S_∞) stetig übergeht, wenn alle Punkte der Fläche S_∞ ins Unendliche rücken. Wir haben demnach den Satz:

- a. Sobald v im ganzen, die Fläche S umgebenden Raume V den Bedingungen A ., B ., D . genügt, und das Integral $\int \frac{\varrho \partial V}{r}$ unabhängig von der Anordnung der Integration convergirt, ist in jedem Punkte O von V

$$(4.) \quad v_0 = \int \frac{\varrho \partial V}{r} + (S).$$

V.

Die Untersuchung der Gleichung

$$(O') \quad \frac{\partial v_0}{\partial X} = \int \varrho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial X} \partial V + (S') - (S_\infty)'$$

erledigt sich auf demselben Wege. Setzt man in (3.) $w = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial X}$ und nimmt für S_∞ wieder eine Kugel vom Radius r und dem Centrum O , so wird auf ihr $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial X} = \frac{\xi}{r^2}$, also folgt aus (3.)

$$\begin{aligned} (S_\infty)' &= \frac{1}{4\pi} \int \left[v \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\xi}{r^2} \right) - \frac{\xi}{r^2} \frac{\partial v}{\partial r} \right] r^2 \partial \sigma - \int \varrho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial X} \partial W \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int \left[\frac{2v}{r} + \xi \frac{\partial v}{\partial x} + \eta \frac{\partial v}{\partial y} + \xi \frac{\partial v}{\partial z} \right] \xi \partial \sigma - \int \varrho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial X} \partial W. \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite convergirt das erste Glied wegen D . mit wachsendem r notwendig gegen Null; wenn daher auch das zweite Glied bei unausgesetzter Erweiterung der Flächen S_∞ und S'_∞ verschwindet, so gilt dasselbe von $(S_\infty)'$. Daraus folgt der Satz:

b. Sobald v im Raume V ausserhalb S den Bedingungen A ., B .,

D . genügt, und das Integral $\int \varrho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial X} \partial V$ unabhängig von der Anordnung der Integration convergirt, ist in jedem Punkte O von V

$$\frac{\partial v_0}{\partial X} = \int \varrho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial X} \partial V + (S)'$$

Durch Verbindung dieses Satzes mit dem vorigen folgt weiter:

c. Wenn v im Raume ausserhalb S den Bedingungen A ., B ., D .

genügt, und die beiden Integrale $\int \frac{\varrho \partial V}{r}$, $\int \varrho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial X} \partial V$ unabhängig von der Anordnung der Integration convergiren, erhält man $\frac{\partial v_0}{\partial X}$ aus dem Ausdrücke von v_0 durch Differentiiren unter dem Integralzeichen.

Durch diese Sätze ist die Frage nach den ersten Derivirten von v vollständig auf die Ermittlung der Ausdrücke zurückgeführt, durch welche v selbst dargestellt wird, weshalb wir uns im Folgenden nur noch mit den letzteren zu beschäftigen haben.

VI.

Durch die Gleichung (4.) wird jede den Bedingungen *A.*, *B.*, *D.* genügende Function *v* im ganzen, ausserhalb *S* liegenden Raume *V* durch convergente Rechnungsoperationen dargestellt.

Da aber *S* aus den Oberflächen *S_p*, *S_i*, etc. der einzelnen Höhlungen zusammengesetzt ist, in denen die Ausnahmestellen *p*, *l*, etc. von *v* eingeschlossen sind, so ist in dieser Gleichung unter

$$(S) = \frac{1}{4\pi} \int \left(v \frac{\partial}{\partial p} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial p} \right) \partial S$$

eine Summe von Integralen (*S_p*), (*S_i*) etc. derselben Form zu verstehen, von denen jedes sich über eine der Oberflächen *S_p*, *S_i* etc. erstreckt.

Lässt man nun die Oberfläche einer dieser Höhlungen, etwa *S_p*, sich immer mehr um die entsprechende Ausnahmestelle *p* zusammenziehen, so kann dies in (4.) den Werth der rechten Seite nicht ändern, solange *v* den Bedingungen des art. II. genügt. Da aber gleichzeitig wegen der für *ρ* gestellten Bedingungen $\int \frac{\partial \partial V}{r}$ bei dieser Erweiterung seines Integrationsraumes gegen eine feste Grenze convergirt, und ausser diesem und (*S_p*) alle übrigen Glieder der rechten Seite von (4.) ungeändert bleiben, so convergirt auch (*S_p*) gegen eine feste Grenze.

Folglich müssen umgekehrt die an den Ausnahmestellen von *v* eintretenden Bedingungen für *v* und $\frac{\partial v}{\partial p}$ so gewählt werden, dass bei fortgesetzter Verengerung der Integrationsflächen *S_p*, *S_i*, etc. jedes der Integrale (*S_p*), (*S_i*), etc. für sich gegen eine feste Grenze convergirt. Ist dies erreicht, so wird *v₀* durch die Gleichung (4.) an der Grenze im ganzen Raume *ausserhalb seiner Ausnahmestellen* dargestellt.

Damit ist jedoch der Fall nicht ausgeschlossen, dass der hiermit gewonnene Ausdruck der Function *v* in einer Ausnahmestelle Werthe angiebt, welche von dem der Function an dieser Stelle vorgeschriebenen Verlaufe unabhängig sind.

Man weiss, dass solche lokale Abweichungen einer Function von einem sie sonst darstellenden Ausdrucke in manchen Fällen nur von der Form des letztern abhängen und durch eine Aenderung derselben gehoben werden können.

Wir schliessen nun alle Verstösse gegen die Bedingungen *A.* und *B.* aus, deren die Functionen *v* wegen *C.* fähig sind, ohne dass die oben gefundenen, im ganzen übrigen Raume gültigen Ausdrücke dieser Functionen an ihnen Theil nehmen können.

Die Functionen, welche nun noch übrig bleiben, und die aus ihnen

durch conforme Umbildung folgenden Functionen v (art. II.) begreifen wir unter dem Namen der *einwerthigen Potentiale*.

Die folgenden Sätze beziehen sich ausschliesslich auf die den Bedingungen C. und D. genügenden Potentiale, welche wir zur Unterscheidung von den übrigen wie bisher durch v bezeichnen.

VII.

Hilfssatz. Sei R eine positive Variable und $f(R)$ eine Function von R , die nebst ihrer ersten Derivirten $f'(R)$ oberhalb $R = 0$ bis zu einem gegebenen Werthe $R = a$ hin weder unbestimmt, noch unendlich, noch unstetig wird, während ihr Verhalten im Punkte $R = 0$ selbst noch dahin gestellt bleiben mag.

Dann besteht zwischen dem Verlaufe der beiden Functionen $f(R)$ und $f'(R)$ in unendlicher Nähe von $R = 0$ ein Zusammenhang, in Betreff dessen wir folgende Sätze hervorheben.

- d. Wenn für ein positives k und jede unbegrenzte Abnahme von R $R^{k+1}f'(R)$ ohne Unstetigkeit gegen eine feste Grenze A convergirt, so convergirt $R^k f(R)$ stetig gegen die Grenze $-\frac{A}{k}$; wächst unter derselben Voraussetzung $R^{k+1}f'(R)$ über alle Grenzen, so ist dasselbe mit $R^k f(R)$ der Fall.
- e. Wenn bei jeder unbegrenzten Abnahme von R $Rf'(R)$ ohne Unstetigkeit gegen eine feste Grenze A convergirt, so hat auch $\frac{f(R)}{\log R}$ den Werth A zur Grenze; wächst unter derselben Voraussetzung $Rf'(R)$ über alle Grenzen, so findet dasselbe mit $\frac{f(R)}{\log R}$ statt.

Beweis. Ist $0 < R_0 < R_2 < a$, so folgt

$$f(R_2) - f(R_0) = \int_{R_0}^{R_2} R^{k+1} f'(R) \cdot \frac{\partial R}{R^{k+1}},$$

da $f(R)$ zwischen R_0 und R_2 weder unbestimmt, noch unendlich, noch unstetig ist. Da ferner zwischen denselben Grenzen $R^{k+1}f'(R)$ stetig und $\frac{1}{R^{k+1}}$ von Zeichenwechseln frei ist, so kann man, wie klein auch R_0 sein mag, zum Mindesten auf eine Art R_1 zwischen R_0 und R_2 so wählen, dass die rechte Seite

$$= R_1^{k+1} f'(R_1) \int_{R_0}^{R_2} \frac{\partial R}{R^{k+1}}$$

wird.

(d.) Solange nun $k > 0$ ist, folgt hieraus

$$kR_0^k f(R_2) - kR_0^k f(R_0) = R_1^{k+1} f'(R_1) \left[1 - \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^k \right].$$

In dieser Gleichung lassen wir R_0 und R_2 abnehmen, jedoch so, dass wenn a und b zwei ohne Ende abnehmende Zahlen bedeuten, R_0^k fortwährend unterhalb der kleinsten von den ebenfalls abnehmenden Zahlen $\frac{a}{f(R_1)}$ und bR_1^k bleibt. Dann werden $R_0^k f(R_2)$ und $\left(\frac{R_0}{R_1} \right)^k$ Bruchtheile von a und b , ersteres etwa $= \theta a$, letzteres $= \theta_1 b$, und R_1 in stetiger oder sprunghafter Abnahme der Null immer näher gebracht. Es folgt

$$k\theta a - kR_0^k f(R_0) = R_1^{k+1} f'(R_1) [1 - \theta_1 b],$$

wo man sich die Grössen a , b , R_2 , R_0 und R_1 in der angegebenen Abnahme zu denken hat.

Wenn daher $-kR_0^k f(R_0)$ bei abnehmendem R_0 über alle Grenzen wächst, oder gegen eine feste Grenze convergirt, so kann man die Abnahme von R_1 nach einem solchen Gesetze erfolgen lassen, dass $R_1^{k+1} f'(R_1)$ in gleicher Weise verläuft.

Wenn aber umgekehrt $R_1^{k+1} f'(R_1)$ unter allen Umständen zuletzt unendlich gross wird, und nicht etwa bloss dann, wenn R_1 längs einer besonders ausgewählten Werthenreihe abnimmt, so muss auch $-kR_0^k f(R_0)$ bei verschwindendem R_0 unendlich gross werden; convergirt $R_1^{k+1} f'(R_1)$ bei jeder unbegrenzten Abnahme von R_1 gegen eine feste Grenze A , so hat auch $-kR_0^k f(R_0)$ diesen Werth A zur Grenze, w. z. b. w.

(e.) Für $k = 0$ folgt ebenso

$$\frac{f(R_0)}{\log R_0} - \frac{f(R_2)}{\log R_2} = R_1 f'(R_1) \left[1 - \frac{\log R_2}{\log R_0} \right].$$

Lässt man auch hier R_0 und R_2 verschwinden, jedoch so, dass $\log R_0$ numerisch oberhalb der grössten von den wachsenden Zahlen $\frac{\log R_2}{b}$, $\frac{f(R_2)}{a}$ bleibt, so bedarf es zum Beweise von e. nur einer Wiederholung der eben angewandten Schlüsse.

Diese beiden Sätze lassen sich verallgemeinern, jedoch ohne Hinzufügung neuer Bedingungen, durch welche ihre Brauchbarkeit beeinträchtigt wird, nicht umkehren.

f. Lehrsatz. Ein einwerthiges Potential v und seine ersten Deriviren können in einem von jeder andern Ausnahmestelle getrennten Punkte m weder unendlich, noch unbestimmt, noch unstetig sein, sobald die Producte

$$R^2 \frac{\partial v}{\partial x}, \quad R^2 \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R^2 \frac{\partial v}{\partial z}$$

bei jeder unbegrenzten Abnahme der Entfernung R vom Punkte x, y, z bis zum festen Punkte m stetig gegen Null convergiren.

Beweis. Fände das Gegentheil statt, so würde m zu den Ausnahmestellen von v gehören. Wir scheiden demnach aus dem Raume V einen abnehmenden Raum V_m aus, welcher m enthält, und nennen S_1 die um die übrigen Ausnahmestellen von v gelegte Fläche.

Nun sei w ein zweites einwerthiges Potential, welches sich von v nur dadurch unterscheidet, dass es im Innern von V_m den Bedingungen $A.$ und $B.$ genügt, während es ausserhalb V_m genau denselben Bedingungen wie v unterworfen ist, derart dass, wenn v auch noch in V_m den Bedingungen $A.$ und $B.$ genügt, in V überall $v = w$ wäre.

Dann reicht es zum Beweise des Satzes hin, zu zeigen, dass der Unterschied der beiden Ausdrücke, durch welche v und w im Raume V dargestellt werden, ausserhalb V_m überall $= 0$ ist, und dass dies gilt, wie klein auch V_m sein mag.

Ist dies nämlich bewiesen, so führt die Annahme, es sei im abnehmenden Raume V_m selbst v von w verschieden, zur Folgerung, dass die Function v im Punkte m einen Verstoß gegen die Bedingungen $A.$ und $B.$ begeht, dessen ihr, für den ganzen übrigen Raum V gültiger Ausdruck w unfähig ist. Es würde also v keine der Definition des einwerthigen Potentials genügende Function sein, und nur dadurch in eine solche verwandelt werden können, dass man in V_m ihren Verlauf den Bedingungen $A.$ und $B.$ gemäss abänderte.

Aus (4.) ergibt sich zunächst unter der Voraussetzung, dass O ausserhalb S_1 liegt,

$$w_0 = \int \frac{e \partial V}{r} + (S_1),$$

wo (S_1) das früher durch (S) bezeichnete Integral, ausgedehnt über die Fläche S_1 , bedeutet.

Der Ausdruck für v_0 ergibt sich für den Fall, dass O ausserhalb S_1 und V_m liegt, durch folgende Betrachtung. Man lege um m als Centrum eine Kugel K vom Radius R , welche den abnehmenden Raum V_m völlig einschliesst, und wähle R so klein, dass O und S_1 ausserhalb des Volumens V_K dieser Kugel liegen. Dann kann man für die Function v die Fläche S zusammensetzen aus S_1 und der Kugeloberfläche K . Dies festgestellt, ist der von S_1 herrührende Theil der Voraussetzung gemäss in den Ausdrücken für v_0 und w_0 der nämliche. Dasselbe gilt von dem über V nach Ausschluss von V_K erstreckten Integrale von

$\frac{e \partial V}{r}$. Scheidet man daher zur Bildung von v_0 aus V das Volumen V_K aus, und fügt zu S_1 die Oberfläche dieses Volumens, so wird

$$v_0 = w_0 - \int \frac{e \partial V_K}{r} + \frac{1}{4\pi} \int \left(v \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial R} \right) R^2 d\sigma.$$

Da der Voraussetzung gemäss $R^2 \frac{\partial v}{\partial R} = \xi \cdot R^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \eta \cdot R^2 \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \cdot R^2 \frac{\partial v}{\partial z}$, also nach *d.* auch Rv und R^2v mit R zugleich verschwindet, und r während der Integration von Null verschieden bleibt, so convergirt das über die Oberfläche von V_K erstreckte Integral mit R zugleich stetig gegen Null; dasselbe beweist man von dem Integrale $\int \frac{e \partial V_K}{r}$ auf dem in art. III. eingeschlagenen Wege.

Solange also die Entfernung von O bis m von Null verschieden ist, wie klein dieselbe übrigens auch sein mag, ist $v_0 = w_0$, w. z. b. w.

Dieser Beweis kommt darauf hinaus, zu zeigen, dass die Bedingung, v oder seine ersten Derivirten sollen in m unendlich, unstetig oder unbestimmt werden, jedoch so, dass $R^2 \frac{\partial v}{\partial x}$, $R^2 \frac{\partial v}{\partial y}$ und $R^2 \frac{\partial v}{\partial z}$ mit R zugleich stetig verschwinden, auf denselben Ausdruck für v_0 führt, wie die Bedingung, dass $A.$ und $B.$ in m gar nicht verletzt werden. Solange also ein in m stattfindender Verstoss gegen diese Bedingungen sich innerhalb der im Lehrsatz verlangten Grenzen hält, ist er ein solcher, dessen jeder in (4.) enthaltener Ausdruck unfähig ist, und den wir daher bei der Definition des einwerthigen Potentials ausschliessen.

- g.* Lehrsatz. Ein einwerthiges Potential v und seine ersten Derivirten können auf einer Linie von endlicher Länge, die von jeder anderen Ausnahmestelle getrennt ist, weder unendlich, noch unbestimmt, noch unstetig sein, sobald die Producte

$$R \frac{\partial v}{\partial x}, \quad R \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R \frac{\partial v}{\partial z}$$

bei jeder unbegrenzten Abnahme der kürzesten Entfernung R vom Punkte x, y, z bis zur festen Linie stetig gegen Null convergiren.

Beweis. Was auch an dieser Linie l stattfinden mag, so erhält man doch stets einen Ausdruck für die Werthe, welche v ausserhalb l und S erlangt, wenn man l mittelst einer Fläche S_1 aus V ausschliesst und wie eine Ausnahmestelle behandelt. Nennt man das von S_1 eingeschlossene Volumen V_1 , so wird durch den Ausschluss von V_1 die

Gleichung (4.) nur so weit geändert, dass auf ihrer rechten Seite noch der Ausdruck

$$\frac{1}{4\pi} \int \left(v \frac{\partial}{\partial p} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial p} \right) \partial S_i - \int \frac{e \partial V_i}{r}$$

hinzutritt; derselbe ist, wie aus (3.) leicht folgt, von der Gestalt der Fläche S_i unabhängig.

Bei unbegrenzter Verengung von S_i convergiren beide Theile dieses Ausdruckes stetig gegen Null.

Für den zweiten Theil ergibt sich dies unmittelbar aus den über ϱ und die Länge von l gemachten Voraussetzungen. Um das Nämliche für den ersten Theil zu beweisen, nennen wir R die kürzeste Entfernung von ∂S_i bis zur Linie l , (rp) den Winkel zwischen r und ∂p , woraus $\frac{\partial r}{\partial p} = -\cos(rp)$ folgt, und setzen

$$\frac{R}{4\pi} \left(v \frac{\partial}{\partial p} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial p} \right) = \frac{1}{4\pi} \left(Rv \cdot \frac{\cos(rp)}{r^2} - \frac{1}{r} \cdot R \frac{\partial v}{\partial p} \right) = \omega,$$

wodurch derselbe die Form $\int \omega \frac{\partial S_i}{R}$ annimmt. Ist daher unter den absoluten Werthen, welche ω während der Integration erlangt, Ω der grösste, so ist dieser Theil numerisch kleiner als $\Omega \int \frac{\partial S_i}{R}$.

Lässt man aber alle Elemente ∂S_i immer näher an l heranrücken, so convergiren $R \frac{\partial v}{\partial x}$, $R \frac{\partial v}{\partial y}$, $R \frac{\partial v}{\partial z}$, also auch $R \frac{\partial v}{\partial p}$ und $R \frac{\partial v}{\partial R}$ stetig gegen Null. Dies ist nach e . nicht anders möglich, als dass zugleich $\frac{v}{\log R}$ und umsomehr $Rv = R \log R \cdot \frac{v}{\log R}$ verschwindet. Solange also O nicht unendlich nahe an einem Punkte von l liegt, convergiren mit R zugleich alle Werthe von ω , also auch Ω stetig gegen Null.

Ertheilt man der Fläche S_i die Gestalt einer Röhre¹⁾, deren zu l senkrechter Querschnitt ein Kreis vom constanten Radius R ist, während sein Centrum auf l liegt, und schliesst die Röhre durch zwei Halbkugeln, deren Mittelpunkte den Anfang und das Ende von l bilden, so wird $\int \partial S_i = 2\pi Rl + 4\pi R^2$, wenn l die Länge der Linie l bedeutet; also wird bei verschwindenden Werthen von R an der Grenze $\int \frac{\partial S_i}{R} = 2\pi l$.

1) Note 2.

Folglich wird $\int \omega \frac{\partial S_l}{R}$ numerisch kleiner als das Product zweier Grössen Ω und $2\pi l$, von denen die erstere verschwindet, während die andere nicht über alle Grenzen wächst, woraus das Behauptete folgt.

Unter den Voraussetzungen des Lehrsatzes wird also v in jeder messbaren Entfernung von l durch denselben Ausdruck dargestellt, den man erhält, wenn v auch an l entlang den Bedingungen A . und B . genügt. Folglich ist dieser Ausdruck, und mit ihm v als einwerthiges Potential an l entlang jeder mit den übrigen Voraussetzungen des Lehrsatzes vereinbaren Verletzung von A . und B . unfähig.

h. In art. II. *C.* ist der Fall ausgeschlossen worden, wo v oder eine seiner ersten Derivirten in allen Punkten einer Fläche unendlich oder unbestimmt wird.

Der Grund hiervon ist folgender. Legt man um die Fläche f eine von S abgelöste Fläche S_f , so würde man unter der Voraussetzung, an f entlang werde eine erste Derivirte von v oder v selbst unendlich oder unbestimmt, im Ausdrucke von v_0 ein Glied (S_f) erhalten, in welchem die unter dem Integralzeichen stehende Function bei fortgesetzter Verengung von S_f schliesslich aufhört, die Integration zu gestatten.

Daraus darf man indessen nicht schliessen, dass es keine Ausdrücke gebe, welche ausserhalb der Fläche f ein einwerthiges Potential v darstellen, aber an ihr entlang unendlich oder unbestimmt werden. In den bis jetzt untersuchten Fällen muss diese Erscheinung jedoch als eine wirkliche Divergenz des Ausdruckes von v bezeichnet werden, da sie bloss an der Form des Ausdruckes haftet, und durch Aenderung dieser Form beseitigt werden kann. Beispiele dieser Art erhält man, wenn man den aus art. V. *b.* folgenden Ausdrücken für die Derivirten der in art. XII. *r.* bezeichneten Potentiale auch noch an den Ausnahmestellen eine Bedeutung einräumt.

Aus den vorstehenden Lehrsätzen ergeben sich als Corollare die folgenden, in denen die jedesmalige Bedeutung von R aus dem Vorhergehenden erhellt.

i. In einem Punkte oder einer Linie von endlicher Länge, die keiner anderen Ausnahmestelle angehören, kann ein einwerthiges Potential oder eine seiner ersten Derivirten niemals unstetig oder unbestimmt werden, ohne dass eine der letzteren unendlich wird.

k. Wird das einwerthige Potential v oder eine seiner ersten Derivirten in dem, von jeder anderen Ausnahmestelle getrennten Punkte m unendlich, so kann mindestens eine der Grössen $R^2 \frac{\partial v}{\partial x}$, $R^2 \frac{\partial v}{\partial y}$, $R^2 \frac{\partial v}{\partial z}$ nicht bei jeder Richtung von R mit R zugleich verschwinden.

1. Wird das einwerthige Potential v oder eine seiner ersten Derivirten in jedem Punkte einer Linie unendlich, die weder von unendlicher Länge ist, noch einer anderen Ausnahmestelle angehört, so kann mindestens eine der Grössen $R \frac{\partial v}{\partial x}$, $R \frac{\partial v}{\partial y}$, $R \frac{\partial v}{\partial z}$ nicht bei jeder unbegrenzten Abnahme von R gegen Null convergiren.

VIII.

Wenn wir daher die einwerthigen Potentiale v nach ihren Verstössen gegen die Bedingungen $A.$ und $B.$ ordnen, so bleiben folgende Fälle übrig:

1. Diese Bedingungen werden im ganzen Raume erfüllt (art. IX.).
2. Ausnahmepunkte. Das Product aus einer der ersten Derivirten von v und dem Quadrate der Entfernung R von einem festen Punkte p convergirt nicht bei jeder unbegrenzten Abnahme von R gegen Null (art. X.).
3. Ausnahmelinien. Das Product aus einer der ersten Derivirten von v und dem kürzesten Abstände R von einer Linie l convergirt nicht bei jeder unbegrenzten Abnahme von R gegen Null (art. XI.).
4. Ausnahmeflächen. Beim Durchgange durch eine Fläche von endlicher Ausdehnung erleiden v oder seine ersten Derivirten plötzliche Aenderungen (art. XII.).

Wenn die Fläche S sich mit Ausscheidung aller Theile des Raumes, in denen die Bedingungen $A.$ und $B.$ erfüllt sind, immer enger an die Ausnahmestellen anschliesst, so zerfällt sie zuletzt in so viele von einander getrennte Theile, als Ausnahmestellen vorhanden sind. Jedem dieser Theile entspricht im Ausdrucke von v ein Glied, welches einer der drei zuletzt genannten Gattungen von Potentialen angehört. Folglich kann jedes Potential v durch eine Summe von Potentialen der vorhin bezeichneten vier Gattungen dargestellt werden.

IX. Erster Fall.

- m.* Wenn den Bedingungen $A.$ und $B.$ im ganzen Raume, ohne Ausnahme irgend einer Stelle, Genüge geschieht, so ist in jedem Punkte O des Raumes

$$v_0 = \int \frac{e \partial V}{r},$$

sobald das Integral zur Rechten unabhängig von der Anordnung der Integration convergirt.

In der That fällt jetzt aus der Gleichung (4.) das Integral (S) weg, da

es nicht mehr nötig ist, aus V einzelne Theile wegen einer dort stattfindenden Verletzung von A . oder B . auszuschneiden.

Es folgt hieraus, dass man jedes einwerthige Potential v durch Subtraction eines Integrals $\int \frac{e^{\partial V}}{r}$ in ein anderes, w , verwandeln kann, welches ausserhalb der Ausnahmestellen der Bedingung $\Delta w = 0$ genügt, während die an diesen Stellen selbst stattfindenden Verstösse gegen A . und B . ganz ungeändert bleiben.

X. Zweiter Fall. Ausnahmepunkte.

Findet ein Verstoß gegen die Bedingungen A . und B . nur in einem einzigen Punkte p statt, und ist ϱ überall $= 0$, so wird ausserhalb der den Punkt p einschliessenden Fläche S

$$v_0 = (S),$$

und dieser Ausdruck ist, wie man aus (3.) für $\varrho = 0$ und $w = \frac{1}{r}$ schliesst, von der Gestalt der Fläche S unabhängig, solange sie p ein-, O ausschliesst.

Nimmt man daher für S eine Kugel vom Halbmesser R und dem Centrum p , so wird

$$v_0 = \frac{1}{4\pi} \int \left(v \frac{\partial}{\partial R} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial R} \right) R^2 d\sigma,$$

solange R kleiner als die Strecke Op ist, und die rechte Seite von R unabhängig.

Soll in p überhaupt eine Verletzung von A . und B . möglich sein, so darf sich dieselbe nicht innerhalb der in f . angegebenen Grenzen halten. Stellt man also die Bedingung, dass

$$R^n \frac{\partial v}{\partial x}, \quad R^n \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R^n \frac{\partial v}{\partial z}$$

bei abnehmendem R nicht über alle Grenzen wachsen, dass dies aber bei jeder Verkleinerung von v eintritt, so darf v jedenfalls nicht kleiner als 2 sein. Nennt man die zunächst über v liegende ganze Zahl $n + 3$, so kann n nur eine der Zahlen 0, 1, 2, ... bedeuten, und es verschwinden

$$R^{n+3} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad R^{n+3} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R^{n+3} \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \text{und wegen d. auch } R^{n+3} v$$

mit R zugleich, während

$$R^{n+1} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad R^{n+1} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R^{n+1} \frac{\partial v}{\partial z}$$

über alle Grenzen wachsen. Es findet sich im Folgenden, dass $\nu = n + 2$ sein muss.

1. Nimmt man zunächst für n seinen kleinsten Werth Null, und lässt R abnehmen, so reducirt sich die rechte Seite der aus der obigen folgenden Gleichung

$$v_0 = -\frac{1}{4\pi r_p} \int R^2 \frac{\partial v}{\partial R} \partial \sigma + \frac{1}{4\pi} \int \left(R^2 v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial R} + \frac{(r-r_p) R^2}{rr_p} \frac{\partial v}{\partial R} \right) \partial \sigma,$$

in welcher r_p die Entfernung von O bis p bedeutet, an der Grenze auf ihr erstes Glied, da $R^2 \frac{\partial v}{\partial R}$ der Voraussetzung gemäss, also nach d , auch $R^2 v$ und, weil die Differenz der Dreiecksseiten r, r_p kleiner als die dritte Seite R ist, $(r-r_p) R^2 \frac{\partial v}{\partial R}$ verschwindet. Der Factor

$\int \frac{\partial v}{\partial R} \cdot R^2 \partial \sigma = \int \frac{\partial v}{\partial p} \partial S$ muss nach dem Obigen einen von R oder der Gestalt von S unabhängigen Werth $-4\pi M$ haben.

n. Sobald im ganzen Raume $\rho = 0$ ist, und ausserhalb des Punktes p nirgendwo ein Verstoss gegen die Bedingungen A . und B . stattfindet, ferner bei unbegrenzter Annäherung an p

$$R^2 \frac{\partial v}{\partial x}, \quad R^2 \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R^2 \frac{\partial v}{\partial z}$$

verschwinden, und

$$\int \frac{\partial v}{\partial p} \partial S = -4\pi M$$

ist, folgt

$$v_0 = \frac{M}{r_p}.$$

Bei der Anwendung dieses Satzes auf die Umformung von $\frac{1}{r}$ kann man ausser den Bedingungen des Satzes noch beliebige andere Eigenschaften dieser Function benutzen, da diese mit jenen nicht im Widerspruche stehen, sondern aus ihnen folgen.

2. Für den allgemeinen Fall, wo n eine beliebige positive ganze Zahl ist, mag Folgendes genügen.

Entwickelt man $\frac{1}{r}$ mittelst des binomischen Satzes oder auf andere Weise nach steigenden Potenzen der Unterschiede $x-l, y-m, z-n$ zwischen den Coordinaten x, y, z des Flächenelements $R^2 \partial \sigma$ und den Coordinaten l, m, n von p , so erhält man eine Reihe

$$\frac{1}{r} = \frac{T_0}{r_p} + \frac{T_1}{r_p^2} + \frac{T_2}{r_p^3} + \dots,$$

in welcher T_μ ein homogenes Polynom μ^{ten} Grades jener Coordinatendifferenzen ist. Da die Nenner von x, y, z unabhängig sind, so ist für jedes μ $\Delta T_\mu = 0$, folglich, wie aus (3.) für $\varrho = 0$ und $w = T_\mu$ folgt, das Integral

$$M_\mu = \frac{1}{4\pi} \int \left[v \frac{\partial T_\mu}{\partial p} - T_\mu \frac{\partial v}{\partial p} \right] dS$$

von der Gestalt der Fläche S unabhängig, solange sie den Punkt p einschliesst. Sein Werth bleibt also ungeändert, wenn man für S die im vorigen Falle construirte Kugel nimmt, und R nach Belieben abnehmen lässt.

Vereinigt man nun in den Reihen für $\frac{1}{r}$ und $\frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{r}$ alle Glieder, welche im Nenner eine höhere Potenz von r_p enthalten, als die $(n+1)^{\text{te}}$, in einen Rest, so fallen bei fortgesetzter Verkleinerung von R aus dem Ausdrucke für v_0 unter den obigen Voraussetzungen die von den Resten beider Reihen herrührenden Glieder weg, und es ergibt sich

$$v_0 = \frac{M_0}{r_p} + \frac{M_1}{r_p^2} + \dots + \frac{M_n}{r_p^{n+1}}.$$

Die Factoren M_μ sind beliebige Kugelfunctionen μ^{ter} Ordnung der Winkel, welche die Richtung pO bestimmen. Die in ihnen verfügbaren Constanten bestimmen sich bei den Anwendungen meistens aus den in der Regel bekannten Zeichenwechseln von $\frac{\partial v_0}{\partial r_p}$ und seinem Verhalten bei wachsenden und abnehmenden Werthen von r_p , wobei nach dem Obigen eine ungefähre Schätzung des Werthes von v hinreicht.

3. Auch in dem Falle, wo die ersten Derivirten von v bei unbegrenzter Annäherung an p rascher anwachsen, als jede Potenz der reciproken Entfernung von diesem Punkte, stellt das Integral

$$[p] = \frac{1}{4\pi} \int \left(v \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial R} \right) R^2 d\sigma$$

noch immer v im ganzen Raume ausserhalb der um p gelegten Kugel dar, und zwar ist sein Werth vom Halbmesser R dieser Kugel völlig unabhängig.

Wenn überhaupt ein Integral der vorstehenden Form $[p]$ mit abnehmendem R gegen eine von Null verschiedene feste Grenze convergirt, so geht es dort als einwerthiges Potential in ein solches über, welches in p , aber nicht ausserhalb dieses Punktes eine Ausnahmestelle

besitzt. Liegt in einem solchen Falle p auf einer Ausnahmelinie oder Fläche von v , so sagen wir, es finde in p ein Verstoss gegen die Bedingungen $A.$ und $B.$ statt, welcher auch in einem isolirten Ausnahmepunkte möglich ist.

Jedes einwerthige Potential v lässt sich daher durch Subtraction von Integralen der obigen Art in ein anderes, w , verwandeln, welches von allen in isolirten Ausnahmepunkten möglichen Verstössen gegen $A.$ und $B.$ befreit ist. Dann muss das, mittelst dieses Potentials w gebildete Integral $[p]$, wo immer der Punkt p gewählt werden mag, bei unbegrenzter Abnahme von R entweder von R abhängig bleiben, oder wenn es eine feste Grenze hat, mit R zugleich verschwinden. Denn wenn $[p]$ bei abnehmendem R zwar von R unabhängig würde, aber nicht gegen Null convergirte, so wäre p einem isolirten Ausnahmepunkte gleich zu achten.

XI. Dritter Fall. Ausnahmelinien.

Findet ein Verstoss gegen die Bedingungen $A.$ und $B.$ nur auf einer Linie l von endlicher Länge statt, und ist φ überall $= 0$, so ist ausserhalb der l einschliessenden Fläche S

$$v_0 = (S),$$

und dieses Integral ist von der Gestalt der Fläche S unabhängig, solange sie l ein-, und O ausschliesst.

Der Einfachheit wegen setzen wir voraus, dass die Linie l nicht aus getrennten Stücken besteht, und überall stetig gebogen ist. Diese Voraussetzung bildet keine wesentliche Einschränkung der Untersuchung. Besteht nämlich l aus mehreren von einander getrennten, aber stetig gebogenen Theilen, so setzt sich (S) aus ebensoviel Integralen von der Art zusammen, auf welche wir uns hier beschränken; hängt l zusammen, jedoch so, dass stetig gebogene Theile bei ihrem Zusammentreffen Ecken bilden, so kann man dies so ansehen, als ob zwei stetig gebogene Linien einen Endpunkt mit einander gemein haben.

Stellt man nun die Bedingung, dass die Grössen

$$R \frac{\partial v}{\partial x}, \quad R \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R \frac{\partial v}{\partial s}$$

bei unbegrenzter Abnahme der kürzesten Entfernung R vom Punkte x, y, s bis zur Linie l niemals über alle Grenzen wachsen, dass aber jede Verkleinerung von v dies zur Folge habe, so darf v nicht < 1 sein, weil sonst nach art. VII. g. an l entlang jeder Verstoss gegen $A.$ und $B.$ unmöglich sein würde. Ist $n + 2$ die zunächst über v

liegende ganze Zahl, also n eine der Zahlen $0, 1, 2, \dots$, so verschwinden hiernach die Grössen

$$R^{n+1} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad R^{n+1} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R^{n+1} \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \text{und wegen d. } R^{n+1} v$$

mit R zugleich an l entlang, während von den Grössen

$$R^n \frac{\partial v}{\partial x}, \quad R^n \frac{\partial v}{\partial y}, \quad R^n \frac{\partial v}{\partial z}$$

mindestens eine über alle Grenzen wächst.

Wir schliessen den Fall aus, wo in einzelnen Punkten von l solche Verstösse gegen $A.$ und $B.$ stattfinden, wie sie nach dem vorigen art. auch in isolirten Punkten möglich sind.

Dann ist v bis auf eine begrenzte Anzahl von Grössen bestimmt, über die zu seiner vollständigen Definition noch in jedem einzelnen Elemente von l verfügt werden muss. (Vergl. unten (β)).

Für die folgende Untersuchung ist es zweckmässig, der Fläche S die folgende Form zu geben. Wir bezeichnen die Endpunkte von l durch a und e , zwei benachbarte Punkte von l durch a_1 und e_1 , und setzen nun S zusammen aus einer um $a_1 e_1$ als Axe gelegten Röhrenfläche $S_1^{1)}$ vom Halbmesser R , und zwei über a und e hinausreichenden Verschlussstücken S_a, S_e , von denen jedes sich mittelst eines der Normalebene von l angehörigen Streifens an S_1 senkrecht ansetzt. Die später zu benutzende Folge dieser Einrichtung besteht darin, dass verschwindende Aenderungen von R die Endpunkte der Axe $a_1 e_1$ von S_1 ungeändert lassen.

Bezeichnet man die Theile von (S) , welche von der Integration über die Stücke S_a, S_1, S_e von S herrühren, durch $(a), (l)$ und (e) , so wird

$$v_0 = (a) + (l) + (e).$$

Wir beginnen nun mit der Untersuchung des Integrals (l) für ein ohne Ende abnehmendes R .

Ist q ein zwischen a und e liegender Punkt von l , s die Länge des Bogens aq , so dass s zu- oder abnimmt, jenachdem q an l entlang nach e oder a rückt, und ist ∂s das von q ausgehende Bogenelement von l , P der Krümmungsradius in q , θ' der Winkel zwischen P und einem von q ausgehenden Halbmesser der Röhrenfläche S_1 , so wird das Element ∂S_1 der letzteren $= R \left(1 - \frac{R \cos \theta'}{P}\right) \partial \theta' \partial s$, und da R zu ihm senkrecht steht,

1) Note 2.

$$(D) = \frac{1}{4\pi} \int \left(R v \frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} R \frac{\partial v}{\partial R} \right) \left(1 - \frac{R \cos \theta'}{P} \right) \varepsilon \theta' \partial s,$$

wo der Accent am Integralzeichen bedeutet, dass die Integration nach s sich von a_1 bis e_1 erstreckt.

Seien x, y, z die Coordinaten von q , die wir als Functionen von s betrachten, und x', y', z' ihre ersten, x'', y'', z'' ihre zweiten Derivirten nach s . Durch q legen wir drei rechtwinklige Axen qT, qP, qN , von denen die erste in die Verlängerung von ∂s fällt, die zweite nach dem Krümmungscentrum und die dritte so gerichtet ist, dass sie zusammen durch blosse Drehung beziehungsweise in die Richtung der wachsenden x, y, z gebracht werden können. Setzt man nun

$$y'z'' - z'y'' = A, \quad z'x'' - x'z'' = B, \quad x'y'' - y'x'' = C,$$

so werden die Cosinus zwischen diesen und den positiven Axen der x, y, z folgende:

$$\begin{array}{lll} \text{Richtungscosinus von } qT : & x' & y' & z' \\ \text{Richtungscosinus von } qP : & Px'' & Py'' & Pz'' \\ \text{Richtungscosinus von } qN : & PA & PB & PC. \end{array}$$

Bezeichnet man ferner durch r_q die Entfernung von q bis O , und durch a, b, c ihre Richtungswinkel, so wird

$$\cos a = \frac{\partial r_q}{\partial X}, \quad \cos b = \frac{\partial r_q}{\partial Y}, \quad \cos c = \frac{\partial r_q}{\partial Z},$$

wenn X, Y, Z wie früher die Coordinaten von O sind.

Dies vorausgeschickt, lässt sich die Entfernung r von O bis zum Elemente εS_i in eine für den gegenwärtigen Zweck passende Form bringen. Bezeichnet man nämlich durch o den Endpunkt von r auf ∂S_i , so sind r, R und r_q die Seiten des Dreiecks qOo , also wenn ω den r gegenüberliegenden Winkel oqO bedeutet, $r^2 = r_q^2 - 2r_q R \cos \omega + R^2$. Zur Bestimmung von ω seien ferner λ und λ' die Neigungswinkel von r_q und R gegen qT , θ und nach dem bereits oben Festgestellten θ' die Neigungswinkel der durch qT und die Geraden r_q, R gelegten Ebenen gegen die Krümmungsebene TqP ; dann wird

$$\cos \omega = \cos \lambda \cos \lambda' + \sin \lambda \sin \lambda' \cos (\theta' - \theta),$$

oder $\cos \omega = \sin \lambda \cos (\theta' - \theta)$, da R zu qT senkrecht steht, also $\lambda' = 90^\circ$ ist. Daraus folgt

$$r^2 = r_q^2 - 2r_q R \sin \lambda \cos (\theta' - \theta) + R^2,$$

während λ und θ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}\cos \lambda &= x' \cos a + y' \cos b + z' \cos c, \\ \sin \lambda \cos \theta &= Px'' \cos a + Py'' \cos b + Pz'' \cos c, \\ \sin \lambda \sin \theta &= PA \cos a + PB \cos b + PC \cos c\end{aligned}$$

bestimmt sind.

In diesem Ausdrücke von r hängen r_q , λ und θ nur von der Lage der Punkte q und O ab, aber nicht vom Halbmesser R und auch nicht von θ' . Da $r_q > R$ ist, so folgt

$$\frac{1}{r} = \sum_0^{\infty} \frac{R^m}{r_q^{m+1}} P_m,$$

wo unter P_m die Kugelfunction $P_m(\sin \lambda \cos(\theta' - \theta))$ zu verstehen ist. Führt man dies in den Ausdruck von (I) ein, und setzt zur besseren Uebersicht

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial v}{\partial R} P_m \cdot \frac{\partial s \partial \theta'}{r_q^{m+1}} &= U_m, & \frac{1}{4\pi} \int v P_m \cdot \frac{\partial s \partial \theta'}{r_q^{m+1}} &= U_{m,1}, \\ \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial v}{\partial R} P_m \cdot \frac{\cos \theta' \partial s \partial \theta'}{Pr_q^{m+1}} &= V_m, & \frac{1}{4\pi} \int v P_m \cdot \frac{\cos \theta' \partial s \partial \theta'}{Pr_q^{m+1}} &= V_{m,1},\end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned}(I) &= \sum_1^{\infty} m R^m U_{m,1} - \sum_0^{\infty} R^{m+1} U_m \\ &\quad - \sum_1^{\infty} m R^{m+1} V_{m,1} + \sum_0^{\infty} R^{m+2} V_m.\end{aligned}$$

Da in den Ausdrücken U und V die Integration zwischen endlichen Grenzen stattfindet, die nach dem Obigen bei verschwindenden Änderungen von R ungeändert bleiben, und zwischen denselben $\frac{\partial v}{\partial R}$ nicht unendlich oder unbestimmt wird, so ist

$$U_m = \frac{\partial U_{m,1}}{\partial R}, \quad V_m = \frac{\partial V_{m,1}}{\partial R}.$$

Solange aber der Endpunkt O von r_q ausserhalb der um l mit dem Halbmesser R beschriebenen Röhrenfläche liegt, werden $U_{m,1}$ und seine Derivirte U_m oberhalb $R=0$ weder unbestimmt, noch unendlich, noch unstetig; dasselbe gilt von $V_{m,1}$ und V_m . Folglich kann man auf diese Functionen von R den Lehrsatz d. des art. VII. anwenden, und erhält, wenn der Fall, wo $R^{m+1} U_m$ oder $R^{m+2} V_m$ bei verschwindendem R unbestimmt, unendlich oder unstetig wird, ausgeschlossen wird, für $m > 0$

$$\begin{aligned}\lim m R^m U_{m,1} &= - \lim R^{m+1} U_m, \\ \lim m R^{m+1} V_{m,1} &= - \frac{m}{m+1} \lim R^{m+2} V_m.\end{aligned}$$

Da ferner wegen der für $\frac{\partial v}{\partial R}$ gestellten Bedingungen in der ersten von den vorstehenden Gleichungen beide Seiten für $m > n$, in der zweiten für $m + 1 > n$ verschwinden, so folgt

$$\lim (l) = \lim \left[\sum_0^{n-1} \frac{2m+1}{m+1} R^{m+1} V_m - R U_0 - 2 \sum_1^n R^{m+1} U_m \right],$$

oder geordnet

$$(\alpha.) \quad \lim (l) = \lim \left[-R U_0 + 2 \sum_1^n \left(\frac{2m-1}{2m} R^{m+1} V_{m-1} - R^{m+1} U_m \right) \right].$$

Dies vorausgeschickt, unterwerfen wir v an l entlang der Bedingung, dass bei unbegrenzter Abnahme von R in jedem Punkte q , für jeden Werth von β und für $m = 0, 1, \dots, n$

$$(\beta.) \quad \lim R^{m+1} \int \frac{\partial v}{\partial R} \cos(m\theta' - \beta) \partial \theta' = -4\pi (A_m \cos \beta + B_m \sin \beta)$$

sei, wo A_m und B_m von β unabhängige Functionen des Bogens s sind, welche die Integration an l entlang in dem zur Bildung von $\lim (l)$ erforderlichen Umfange gestatten.

Aus dem bekannten Ausdrücke für die Kugelfunctionen

$$P_m (\cos \lambda \cos \lambda' + \sin \lambda \sin \lambda' \cos(\theta' - \theta))$$

erhält man für $\lambda' = 90^\circ$

$$P_0 (\sin \lambda \cos(\theta' - \theta)) = 1,$$

$$P_1 (\sin \lambda \cos(\theta' - \theta)) = \sin \lambda \cos(\theta' - \theta)$$

und allgemein

$$P_m (\sin \lambda \cos(\theta' - \theta)) = A_m \cos m(\theta' - \theta) + A_{m,1} \cos(m-2)(\theta' - \theta) + \dots,$$

wo

$$A_m = 2 \frac{(2m)!}{(2^m m!)^2} \sin^m \lambda$$

ist. Die übrigen Factoren A sind ebenfalls von θ' und θ unabhängig, kommen aber bei der folgenden Untersuchung nicht in Betracht.

Wendet man nämlich den vorstehenden Ausdruck von P_m auf die Bestimmung des

$$\lim \frac{R^{m+1}}{4\pi} \int \frac{\partial v}{\partial R} P_m \partial \theta'$$

an, indem man von $m = 0$ an aufwärts schliesst, so zeigt sich sofort, dass P_m durch sein erstes Glied ersetzt werden kann, und es ergibt sich

$$\text{für } m = 0 \quad \lim \frac{R}{4\pi} \int \frac{\partial v}{\partial R} P_0 \partial \theta' = -A_0,$$

$$\text{für } m = 1, 2, \dots, n \quad \lim \frac{R^{m+1}}{4\pi} \int \frac{\partial v}{\partial R} P_m \partial \theta' = -A_m (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta).$$

Ebenso findet sich für $m = 1, 2, \dots, n$

$$\lim \frac{R^{m+1}}{4\pi} \int \frac{\partial v}{\partial R} P_{m-1} \cdot \cos \theta' \partial \theta' = -\frac{1}{2} A_{m-1} (A_m \cos(m-1)\theta + B_m \sin(m-1)\theta).$$

Daraus ergeben sich die folgenden Ausdrücke, aus denen in (α.) der Grenzwert von (I) zusammengesetzt ist:

$$(\gamma.) \left\{ \begin{array}{l} \lim -RU_0 = \int \frac{A_0 \partial s}{r_0}, \\ \lim -R^{m+1}U_m = 2 \frac{(2m)!}{(2^m m!)^2} \int \frac{\sin \lambda^m (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta)}{r_0^{m+1}} \partial s, \\ \frac{2m-1}{2m} \lim R^{m+1}V_{m-1} = \frac{(2m)!}{(2^m m!)^2} \int \frac{\sin \lambda^{m-1} (A_m \cos(m-1)\theta + B_m \sin(m-1)\theta)}{Pr_0^m} \partial s; \end{array} \right.$$

die Accente an den Integralzeichen bedeuten, dass die Integration an l entlang von a_1 bis e_1 zu erstrecken ist.

Lässt man daher die Flächen S_a und S_e sich bis zu den Punkten a_1 und e_1 erstrecken, und ersetzt sie nun der Einfachheit wegen durch Kugeln mit den Halbmessern $aa_1 = c_a$, $ee_1 = c_e$ und den Mittelpunkten a und e , so gehen im Ausdrucke von v_0 (α.) und (e) in Integrale [a] und [e] (voriger art.) über, und es folgt

$$v_0 = [a] + \lim(I) + [e].$$

Dieses Resultat umfasst verschiedene Fälle.

1. Wenn die durch A_m und B_m bezeichneten Functionen von s so beschaffen sind, dass von den Integralen (γ.), aus denen $\lim(I)$ besteht, einzelne divergent werden, wenn man sie bis zu den Endpunkten a und e von l erstreckt, so bilden die Integrale [a] und [e] wesentliche Bestandtheile des Ausdruckes von v_0 , indem sie zur Ausgleichung der, bei abnehmenden Werthen der Halbmesser c_a und c_e eintretenden Divergenz von $\lim(I)$ dienen.

2. Wenn dagegen die Functionen A und B die Integration auch bis an die Enden von l hinan gestatten, so kann man c_a und c_e verschwinden lassen, und verlangen, dass auch [a] und [e] verschwinden. Denn da in diesem Falle jedes der Integrale [a] und [e] für sich gegen eine feste Grenze convergirt, so würden sie, falls diese Grenzen von Null verschieden wären, in den Ausdruck von v_0 zwei Glieder liefern, welche man nach dem Schlusse des vorigen art. auch dadurch einführen kann, dass man einen isolirten Ausnahmepunkt nach a und einen nach e rücken lässt, und welche ebenso durch Beseitigung dieser Ausnahmepunkte ohne eine Abänderung in den übrigen Bedingungen entfernt werden können, wie es oben als geschehen vorausgesetzt worden ist. Daraus folgt der Satz:

- o. Es sei v ein einwerthiges Potential, welches nur auf einer ununterbrochen zusammenhängenden und stetig gebogenen Linie von der messbaren Länge l gegen die Bedingungen A . und B . verstösst, und auch auf dieser von allen in isolirten Ausnahmepunkten möglichen Verletzungen dieser Bedingungen befreit ist. Wenn alsdann im ganzen Raume $\varphi = 0$ ist, und an l entlang bei unbegrenzter Abnahme von R

$$1) \lim R^{n+1} \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \lim R^{n+1} \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \lim R^{n+1} \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

$$2) \text{ für } m = 0, 1, \dots, n \quad \lim R^{m+1} \int \frac{\partial v}{\partial R} \cos m\theta' \partial\theta' = -4\pi A_m,$$

$$3) \text{ für } m = 1, 2, \dots, n \quad \lim R^{m+1} \int \frac{\partial v}{\partial R} \sin m\theta' \partial\theta' = -4\pi B_m$$

ist, so ist für jeden Punkt O ausserhalb l $v_0 = \lim (I)$ oder

$$v_0 = \int \frac{A_0 \partial s}{r_q} + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(2m)!}{(2^m m!)^2} \int \left[2 \frac{\sin 1^m (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta)}{r_q^{m+1}} - \frac{\sin 1^{m-1} (A_m \cos (m-1)\theta + B_m \sin (m-1)\theta)}{Pr_q^m} \right] \partial s,$$

vorausgesetzt, dass die Functionen A_m und B_m die Integration über die ganze Linie l hinweg gestatten.

Mittelst der hier anwendbaren Sätze *d.* und *e.* des art. VII. ergeben sich aus den Bedingungen 2) und 3) folgende Eigenschaften des vorstehenden Potentials:

$$\left. \begin{aligned} \lim \frac{1}{\log R} \int v \partial\theta' &= -4\pi A_0, \\ \lim m R^m \int v \cos m\theta' \partial\theta' &= 4\pi A_m \\ \lim m R^m \int v \sin m\theta' \partial\theta' &= 4\pi B_m \end{aligned} \right\} \text{ für } m = 1, 2, \dots, n.$$

Dieselben können ebenfalls dazu dienen, um zu einem gegebenen Ausdrucke von v die Grössen A und B zu bestimmen.

Einfache Beispiele zu beiden Fällen erhält man durch conforme Umbildung einwerthiger Functionen von $\xi + i\eta$, welche nur in einer endlichen Anzahl von Punkten der ξ, η Ebene unendlich werden, oder ihrer reellen Bestandtheile. Betrachtet man nämlich eine solche als Function von ξ, η, ζ , so verhält sie sich wie eine den Bedingungen des

art. I. für φ' gleich Null genügende Function v , die nebst ihren ersten Derivirten $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ auf geraden Linien, die zur z -Axe parallel sind, unendlich wird, und ausserhalb derselben endlich und stetig bleibt. Diese Linien werden durch die conforme Umbildung in Kreisbögen verwandelt, deren Enden im Mittelpunkte des Raumes x, y, z zusammenstossen. Die rationalen Functionen liefern Beispiele zum zweiten Falle, $\log \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}$ kann zur Erläuterung des andern dienen.

3. Wenn die ersten Derivirten von v an l entlang unendlich gross von unendlich hoher Ordnung werden, so stellt der Ausdruck $(S) = (l) + (a) + (e)$ noch immer v ausserhalb der Fläche S dar, und sein Werth ist auch jetzt noch vom Halbmesser R und der Form von S_a und S_e unabhängig. Allgemein geht jeder Ausdruck dieser Form, der von der Umgestaltung der Fläche S unabhängig wird, wenn sie sich immer enger um l zusammenzieht, an der Grenze als einwerthiges Potential in ein solches über, welches ausser der Linie l keine andere Ausnahmestelle besitzt. Man kann daher durch Subtraction von Potentialen dieser Gattung jedes einwerthige Potential v in ein anderes, w , verwandeln, welches so beschaffen ist, dass der mittelst der Werthe von w gebildete Ausdruck (S) für jede beliebige Linie l bei fortgesetzter Verengerung der Fläche S entweder von der Gestalt dieser Fläche abhängig bleibt, oder falls er eine feste Grenze hat, an derselben verschwindet.

XII. Vierter Fall. Ausnahmeflächen.

Die Bedingungen A . und B . werden nur an einer zusammenhängenden Fläche f entlang verletzt, von welcher wir voraussetzen,

- 1) dass sie keine unendlich weit von einander entfernten Punkte enthält, und dass die Länge ihres Randes, wenn ein solcher vorhanden ist, nicht unendlich gross ist;
- 2) dass die Anzahl ihrer Ecken und Kanten, so wie die Zahl ihrer Durchschnittspunkte mit Geraden von verschwindender Länge und mit Curven, die zu ihrem Rande oder zu einer bestimmten, auf ihr verzeichneten Linie l (vergl. unten 3)) in unendlicher Nähe parallel sind, nicht unendlich gross ist.

Wir setzen ferner voraus, dass φ im ganzen Raume ausserhalb f gleich Null ist. In diesem, wie in den früheren Fällen darf aus dem Umstande, dass Δv auf f selbst nicht gleich Null gesetzt werden kann, nicht geschlossen werden, φ habe dort von Null verschiedene

Werthe, weil auf f selbst von der Bildung des Ausdruckes Δv überhaupt keine Rede sein kann.

Den Fall, wo v oder eine seiner ersten Derivirten in allen Punkten eines Flächenstücks von endlicher Ausdehnung unendlich oder unbestimmt wird, haben wir bereits ausgeschlossen. Wir fügen hierzu noch weitere Beschränkungen in den an f entlang voranzusetzenden Verstößen gegen $A.$ und $B.$ Diese Verstöße bestehen nach art. VIII. in blossen Unstetigkeiten, welche v oder seine ersten Derivirten beim Durchgange durch f erleiden, und welche, abgesehen von einzelnen auf f liegenden Punkten und Linien, mit keinem Unendlichwerden dieser Functionen verbunden sind. Die Beschränkungen, denen wir diese Unstetigkeiten unterwerfen, betreffen 1) die Geschwindigkeit, mit welcher v oder seine ersten Derivirten anwachsen dürfen, wenn man solchen Punkten und Linien von Aussen her, und 2) die von jener wohl zu unterscheidende Geschwindigkeit, mit welcher ihre Sprünge wachsen dürfen, wenn man diesen Stellen an der Fläche f entlang immer näher rückt.

Wenn die Unstetigkeiten von v oder seinen ersten Derivirten sich bis an den Rand λ der Fläche f erhalten, so werden diese Functionen auf dem Rande selbst unbestimmt, indem sie beim Umbiegen um denselben alle beim Durchgange durch f übersprungenen Werthe in stetiger Reihenfolge durchlaufen. Folglich gehört der Rand λ im Allgemeinen ebenfalls zu den, auf f noch besonders zu unterscheidenden Ausnahmestellen, von denen er bloss durch seine Lage auf f unterschieden ist.

Wenn auf f in irgend einem Punkte oder an einer Linie entlang eine, auch in isolirten Punkten oder Linien mögliche Verletzung von $A.$ stattfindet, so kann man dieselbe ohne eine Aenderung in den übrigen Bedingungen dadurch vollständig beseitigen, dass man aus dem Ausdrucke für v eine von den im zweiten und dritten Falle auftretenden Formen ausscheidet. Wir setzen dies als geschehen voraus, und beschränken dem entsprechend das Unendlichwerden von v und seinen ersten Derivirten durch die unten folgende vierte Bedingung.

Dies festgestellt, betrachten wir f als einen Spalt im Raume, und bezeichnen einen Punkt o von f , jenachdem er als auf der einen oder der andern Seite des Spaltes liegend betrachtet wird, durch o_1 oder o_2 , die Werthe von v in diesen Punkten durch v_1, v_2 und unter der Voraussetzung, dass man beim Differentiiren von o_1 und o_2 aus auf den, über beiden Seiten des Spaltes von ihm abwärts errichteten Normalen fortschreitet, seine Derivirten durch $\frac{\partial v_1}{\partial p_1}$ und $\frac{\partial v_2}{\partial p_2}$. Dann stellen sich die an f entlang zu erfüllenden Bedingungen wie folgt:

- 3) Mit Ausnahme von isolirten Punkten m , einer Linie l (vergl. oben 2)) und des Randes λ sind v und seine ersten Derivirten auf beiden Seiten von f nirgendwo unendlich oder unbestimmt. Die Punkte m sind nur in begrenzter Zahl vorhanden, und die Anzahl der Ecken von l und λ , sowie die Länge von l ist ebenfalls nicht unendlich gross.
- 4) Legt man um jeden Punkt m als Centrum eine Kugelfläche S_m , und um die Linien l und λ als Axen Röhrenflächen S_l und S_λ , sämmtlich vom Halbmesser c , so soll zugleich mit c jedes der Integrale

$$[m] = \frac{1}{4\pi} \int \left(v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial p} \right) \partial S_m,$$

$$\left. \begin{array}{l} (l) \\ (\lambda) \end{array} \right| = \frac{1}{4\pi} \int \left(v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial p} \right) \cdot \left. \begin{array}{l} \partial S_l \\ \partial S_\lambda \end{array} \right|$$

verschwinden.

- 5) Beim Durchgange durch f sind v und seine ersten Derivirten unstetig, und zwar ist im Punkte o

$$\frac{\partial v_1}{\partial p_1} + \frac{\partial v_2}{\partial p_2} = -4\pi E,$$

$$v_1 - v_2 = 4\pi \Omega_1.$$

- 6) Ist R die geradlinige Entfernung von o bis zu einem Punkte m , und nähert sich o , ohne f zu verlassen, diesem Punkte auf einer beliebigen Bahn, so verschwinden

$$R^{1+k}E, \quad R^{1+k}\Omega_1$$

mit R zugleich, sobald für k eine passende, unter 1 liegende positive Zahl gesetzt wird.

- 7) Nähert sich dagegen o , ohne f zu verlassen, einem der Linie l oder λ angehörigen Punkte so, dass seine Bahn zuletzt in die Normalebene dieser Linie fällt, so verschwinden zugleich mit der geradlinigen Entfernung R beider Punkte die Grössen

$$R^k E, \quad R^k \Omega_1,$$

wenn k wieder einen von 1 verschiedenen positiven echten Bruch bedeutet.

In den verschiedenen Fällen, welche sich hier darbieten, kann k verschiedene Werthe haben, welche jedoch sämmtlich kleiner als 1 sein müssen. Für unsern Zweck reicht es hin, unter k den grössten von allen diesen Werthen zu verstehen.

Setzt man nun die um alle Ausnahmestellen von v zu legende Fläche S zusammen aus den Flächen S_m, S_i, S_l (siehe oben 4)) und den ausserhalb derselben liegenden Theilen der Spaltflächen, und bezeichnet man durch ∂f_1 und ∂f_2 die mit dem Elemente ∂f von f zusammenfallenden Elemente der letztern, so geht die für jeden ausserhalb S liegenden Punkt O gültige Gleichung $v_0 = (S)$ mit Rücksicht auf die in 4) eingeführten Zeichen über in

$$v_0 = \frac{1}{4\pi} \int \left(v_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_1} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial p_1} \right) \partial f_1 + \frac{1}{4\pi} \int \left(v_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_2} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_2}{\partial p_2} \right) \partial f_2 \\ + (I) + (\lambda) + \Sigma[m],$$

wenn die Summation im letzten Gliede zur Rechten sich über alle Punkte m erstreckt, und in den ersten Gliedern der Accent andeutet, dass die innerhalb der Kugeln und Röhren liegenden Elemente ∂f von der Integration ausgeschlossen sind.

In den beiden ersten Gliedern lassen sich zunächst die entsprechenden Elemente vereinigen. Berücksichtigt man, dass in o $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_2} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_1}$ ist, so ergibt sich wegen 5)

$$(a.) \quad v_0 = \int \frac{E \partial f}{r} + \int \Omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_1} \partial f + (I) + (\lambda) + \Sigma[m].$$

Nennt man ferner $\partial f_m, \partial f_i, \partial f_l$ die Elemente der ins Innere von S_m, S_i, S_l fallenden Theile von f , und setzt

$$\int \frac{E \partial f_m}{r} = E_m, \quad \int \Omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_1} \partial f_m = O_m, \quad \int \frac{E \partial f_i}{r} = E_i, \quad \text{u. s. w.},$$

so kann man endlich schreiben

$$v_0 = \int \frac{E \partial f}{r} + \int \Omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_1} \partial f + T,$$

wenn

$$T = (I) + (\lambda) - E_i - E_l - O_i - O_l + \Sigma([m] - E_m - O_m)$$

gesetzt wird, und das Weglassen der Accente bedeutet, dass die Integration in den ersten Gliedern über alle Elemente von f ohne Ausnahme zu erstrecken ist.

Dabei ist jedoch vorausgesetzt, dass diese Glieder durch die Erweiterung ihres Integrationsgebietes weder unendlich, noch unbestimmt

werden. Dies ist, wie im Folgenden gezeigt wird, wirklich der Fall, solange die für E und Ω_1 gestellten Bedingungen 6) und 7) erfüllt sind.

Werden dagegen diese Bedingungen so abgeändert, dass die Inte-

grale $\int \frac{E \partial f}{r}$ und $\int \Omega_1 \frac{\partial}{\partial p_1} \frac{1}{r} \partial f$ divergiren, wenn man die Integration bis an l, λ, m hinan erstreckt, so muss der ursprüngliche Ausdruck (α) beibehalten werden, indem nun die Glieder (l), (λ), [m] zur Ausgleichung der bei abnehmendem c eintretenden Divergenz der ersten Glieder dienen.

Wir werden beweisen, dass bei den obigen Bedingungen jedes einzelne Glied von T mit dem Halbmesser c zugleich verschwindet. Da die Anzahl dieser Glieder wegen 3) keine unbegrenzte ist, so ist dasselbe dann auch von ihrer Summe T nachgewiesen.

Nennt man R die geradlinige Entfernung von ∂f_m bis m , und bezeichnet durch k den in 6) erwähnten positiven echten Bruch, so ist

$$E_m = \int \frac{R^{1+k} E}{r} \cdot \frac{\partial f_m}{R^{k+1}}, \quad O_m = \int R^{1+k} \Omega_1 \frac{\partial}{\partial p_1} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f_m}{R^{k+1}};$$

ersetzt man aber die Factoren $\frac{R^{1+k} E}{r}$ und $R^{1+k} \Omega_1 \frac{\partial}{\partial p_1} \frac{1}{r}$ durch passende Mittelwerthe M und N , und setzt $\int \frac{\partial f_m}{R^{k+1}} = \omega$, so wird $E_m = M\omega$, $O_m = N\omega$. Da wegen 6) der grösste Werth von M und N , und nach Note 1. auch ω mit c zugleich unter jede Grenze sinkt, so gilt dasselbe von E_m und O_m .

Bezeichnet man ferner durch R die auf einem Halbmesser der Röhrenfläche S_i gezählte Entfernung von ∂f_i bis zur Axe l , durch k den in 7) erwähnten positiven echten Bruch, und durch M', N' passende

Mittel aus den Werthen, welche $\frac{R^k E}{r}$ und $R^k \Omega_1 \frac{\partial}{\partial p_1} \frac{1}{r}$ in E_i und O_i während der Integration durchlaufen, und setzt man $\int \frac{\partial f_i}{R^k} = \eta$, so wird $E_i = M'\eta$, $O_i = N'\eta$; und da wegen 7) der grösste Werth von M' und N' , und nach Note 3. auch η mit c zugleich unter jede Grenze sinkt, so gilt dasselbe von E_i und O_i , und aus demselben Grunde von E_λ und O_λ .

Man kann daher die Halbmesser der Flächen S_i, S_λ, S_m so klein wählen, dass die durch ihr völliges Verschwinden bewirkten Aenderungen $E_i + E_\lambda + \sum E_m, O_i + O_\lambda + \sum O_m$ der Integrale $\int \frac{E \partial f}{r}$ und

$\int \Omega_1 \frac{\partial}{\partial p_1} \frac{1}{r} \partial f$ kleiner als alles Beliebige werden; folglich convergieren diese Integrale ohne Unstetigkeit gegen feste Grenzen, wenn man sie bis an l, λ, m hinan erstreckt.

Da zugleich mit c wegen 4) auch jedes der Integrale $(l), (\lambda), [m]$ verschwindet, so folgt ferner, dass der Unterschied T zwischen v_0 und

der Summe der beiden Integrale $\int \frac{E \partial f}{r}$ und $\int \Omega_1 \frac{\partial}{\partial p_1} \frac{1}{r} \partial f$ unter jede Grenze gedrückt wird, wenn man die Halbmesser der Flächen S, S_1, S_m ohne Ende abnehmen lässt. Daraus folgt:

- p. Die Function v ist durch die Bedingungen $A., B., D.$ des art. II und 3) bis 7) völlig bestimmt, so lange die Fläche f den Bedingungen 1) und 2) entspricht, und ρ gleich Null ist, und zwar ist für jeden ausserhalb f liegenden Punkt O :

$$v_0 = \int \frac{E \partial f}{r} + \int \Omega_1 \frac{\partial}{\partial p_1} \frac{1}{r} \partial f.$$

Ändert man insbesondere die Bedingung 5) dahin ab, dass entweder Ω_1 oder E gleich Null ist, so ergibt sich:

- q. Ist unter Voraussetzung aller übrigen Bedingungen v selbst beim Durchgange durch die Fläche f stetig, dagegen

$$\frac{\partial v_1}{\partial p_1} + \frac{\partial v_2}{\partial p_1} = -4\pi E,$$

während E den in 6) und 7) gestellten Bedingungen genügt, so ist

$$v_0 = \int \frac{E \partial f}{r}.$$

- r. Ist die Derivirte von v nach der Normale der Fläche f beim Durchgange durch dieselbe nicht unstetig, jedoch

$$v_1 - v_2 = 4\pi \Omega_1,$$

während Ω_1 die in 6) und 7) gestellten Bedingungen erfüllt, so ist

$$v_0 = \int \Omega_1 \frac{\partial}{\partial p_1} \frac{1}{r} \partial f.$$

Diese Sätze gelten selbst dann noch, wenn im ersten Fall v_1 und v_2 , im zweiten $\frac{\partial v_1}{\partial p_1}$ und $\frac{\partial v_2}{\partial p_1}$ in unendlicher Nähe von l, λ, m einen der-

artigen Verlauf annehmen, dass es nicht mehr gestattet ist, Ω_1 resp. E an diesen Stellen noch gleich Null zu setzen, wofern nur dort den Bedingungen 6) und 7) Genüge geschieht. In der That kommen hierdurch zu v_0 nur Integrale O_1, O_2, O_m resp. E_1, E_2, E_m , welche sämtlich kleiner als jede angebbare oder mit anzugebenden Werthen vergleichbare Zahl sind.

Man kann endlich, ohne dass die vorstehenden Sätze ihre Gültigkeit verlieren, die Bedingungen 6) und 7) durch die allgemeinere ersetzen, dass die über einen beliebigen Theil F von f erstreckten Integrale $\int \frac{E \partial f}{r}$ und $\int \Omega_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p_1} \partial f$ bei stetiger Erweiterung von F nie unbestimmt, unendlich oder unstetig werden, weil diese Bedingung das Verschwinden von E_m, O_m, E_1, O_1, E_2 und O_2 nach sich zieht.

XIII.

Zu den im Vorangehenden untersuchten Gattungen einwerthiger Potentiale müssen nun noch als besondere Fälle diejenigen gefügt werden, bei denen die Anzahl der Ausnahmepunkte, die Länge einer Ausnahmelinie oder der Inhalt einer Ausnahmefläche unendlich gross ist, sowie diejenigen, welche Ausnahmestellen im Unendlichen besitzen.

Wir bemerken in dieser Beziehung zunächst den folgenden Grundsatz, der mit den nöthigen Modificationen in jedem der eben genannten vier Fälle Anwendung findet.

Wenn der Ausdruck v eines einwerthigen Potentials bei unbegrenzter Erweiterung einer Ausnahmestelle $\mathfrak{A}$ zuletzt in einen, vom Gesetze dieser Erweiterung unabhängigen Ausdruck u übergeht, so stellt u dasjenige einwerthige Potential dar, welches der ins Unbegrenzte erweiterten Ausnahmestelle entspricht.

Bezeichnet man diese Letztere durch $\mathfrak{B}$, so reicht es zum Beweise des Satzes hin, zu zeigen, 1) dass u ein einwerthiges Potential ist, 2) dass es ausserhalb $\mathfrak{B}$ nirgendwo gegen die Bedingung A. verstösst, und 3) dass u , soweit $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}$ zusammenfällt, stets dieselben Unstetigkeiten wie v besitzt. Das Letztere folgt aus der Form des Ausdruckes v , welche zur Folge hat, dass aus der Differenz $u - v$ alle auf $\mathfrak{A}$ bezüglichen Theile wegfallen; da ausserdem der Unterschied zwischen u und v nach den Bedingungen des Satzes durch hinlängliche Erweiterung von $\mathfrak{A}$ im ganzen Raume ausserhalb $\mathfrak{B}$ unter eine beliebige

Grenze hinabgedrückt werden kann, und v dort die beiden zuerst genannten Eigenschaften besitzt, so können dieselben auch dem Ausdrucke u nicht abgehen.

XIV.

Nach diesem Satze bleiben nur noch diejenigen einwerthigen Potentiale zu untersuchen übrig, welche Ausnahmestellen im Unendlichen besitzen, ohne dass ihre Ausdrücke sich aus den oben gefundenen durch unbegrenzte Erweiterung einer solchen Stelle ergeben. Dieselben müssen nach art. II. und VI. aus den bisher betrachteten sämmtlich durch conforme Umbildung erhalten werden.

Zur leichteren Übersicht gehen wir auf die in art. I. definirte Function v zurück, indem wir $\varphi' = 0$ setzen, und ausserdem die Bedingung stellen, dass v von solchen Ausnahmestellen, die keinen Punkt im Unendlichen besitzen, befreit ist.

Da hiernach die Ausnahmestellen von v entweder vollständig im Unendlichen liegen, oder ohne Unterbrechung aus den unendlich entfernten Theilen des Raumes bis ins Endliche reichen, so kann man den Raum ξ, η, ζ mittelst einer nie in getrennte Stücke zerfallenden Fläche in zwei Theile zerlegen, von denen der eine alle unendlich entfernten Theile des Raumes und sämmtliche Ausnahmestellen enthält, während der andere, den wir $\mathfrak{B}$ nennen, von ihnen völlig frei ist. Dann lässt sich der Werth v_D , den v in einem beliebigen Punkte D des Raumes $\mathfrak{B}$ hat, nach art. III. durch ein über die Oberfläche von $\mathfrak{B}$ erstrecktes Integral darstellen, dessen Werth infolge der für v gestellten Bedingungen von der Gestalt dieser Fläche unabhängig ist, solange in $\mathfrak{B}$ keine Ausnahmestellen aufgenommen werden.

Dies festgestellt, legen wir um den Mittelpunkt p' des Raumes ξ, η, ζ (art. II.) eine Kugelfläche $\mathfrak{K}$, um jede Ausnahmelinie von v eine Röhrenfläche, und unterscheiden bei jeder Ausnahmefläche ihre beiden Seiten, indem wir sie als einen Spalt im Raume ansehen.

Dann können wir die Oberfläche von $\mathfrak{B}$ zusammensetzen 1) aus demjenigen Theile $\mathfrak{S}_\infty$ der Kugelfläche $\mathfrak{K}$, der ausserhalb sämmtlicher Röhren- und Spaltflächen liegt, und 2) aus derjenigen Fläche $\mathfrak{S}$, die durch sämmtliche ins Innere von $\mathfrak{K}$ fallenden Theile der letzteren gebildet wird.

Dehnt man nun die Bezeichnungen des art. III. 1. auf den vorliegenden Fall aus, so folgt aus der Gleichung (O.) desselben art.

$$v_D = (\mathfrak{S}) - (\mathfrak{S}_\infty).$$

Lässt man jetzt $\mathfrak{K}$ oder $\mathfrak{S}_\infty$ ins Unendliche rücken, und $\mathfrak{S}$ sich dem-

gemäss erweitern, so sind zwei Fälle möglich; entweder convergirt das Integral $(\mathfrak{S})$, also wegen der für v gestellten Bedingungen auch $(\mathfrak{S}_\infty)$ gegen eine feste Grenze, oder es ist dies nicht der Fall.

1. Im ersten Falle geht $(\mathfrak{S})$ in eines von den im vorigen art. behandelten Potentialen über, und es wird demnach $(\mathfrak{S}_\infty)$ an der Grenze ebenfalls ein einwerthiges Potential. Wir verwandeln dasselbe durch conforme Umbildung, zu deren Mittelpunkt wir das Centrum p' von $\mathfrak{R}$ nehmen, in ein auf den Raum x, y, z bezügliches v . Dann entspricht der Kugelfläche $\mathfrak{R}$ in letzterem eine neue Kugelfläche K , und den unendlich entfernten Theilen des Raumes x, y, z das Centrum p' von K . Man erhält auf diese Weise (art. II.) ein einwerthiges Potential

$$v = \frac{a}{s}(\mathfrak{S}_\infty),$$

welches ausserhalb p' allenthalben den Bedingungen $A., B., D.$ des art. II. für $\rho = 0$ genügt, also zu den im art. X. behandelten gehört. Folglich wird umgekehrt der Grenzwert von $(\mathfrak{S}_\infty)$ im vorliegenden Falle durch conforme Umbildung der in art. X. behandelten Gattung von Potentialen erhalten, was in dem Falle, wo v im Unendlichen nicht von unendlich hoher Ordnung unendlich wird, auf rationale ganze Functionen von x, y, z führt.

2. Wenn dagegen bei fortgesetzter Erweiterung von $\mathfrak{R}$ zwar die Differenz von $(\mathfrak{S})$ und $(\mathfrak{S}_\infty)$ bei einem festen Werthe beharrt, aber keines von beiden Integralen für sich gegen eine feste Grenze convergirt, so verwandelt sich v durch die nämliche conforme Umbildung in ein einwerthiges Potential v , welches eine nicht bis ins Unendliche reichende Ausnahmestelle besitzt, die sich im Punkte p' schliesst. Der Kugel $\mathfrak{R}$ und dem zur Ausschliessung der Ausnahmestellen von v dienenden System $\mathfrak{F}$ von Röhren- und Spaltflächen entspricht im Raume x, y, z die Kugel K mit dem Centrum p' und ein System F von Flächen, welche die Ausnahmestellen von v einschliessen. Beseitigt man von beiden Flächen K und F diejenigen Theile, welche ins Innere der andern fallen, und nennt die übrig bleibenden Theile $S_{p'}$ und S , so wird v nach art. IV. durch die Gleichung

$$v_0 = (S) + (S_{p'})$$

dargestellt, und es ist nun nach art. II.

$$(S) = \frac{a}{s}(\mathfrak{S}), \quad -(S_{p'}) = \frac{a}{s}(\mathfrak{S}_\infty).$$

Daraus folgt, dass bei fortgesetzter Verengerung von K oder $S_{p'}$ zwar die Summe der Integrale (S) und $(S_{p'})$ ungeändert bleibt, aber keines von beiden für sich gegen eine feste Grenze convergirt

Folglich wird man im gegenwärtigen Falle auf die in art. XI. und XII. erwähnten Fälle zurückgeführt, wo zur Vermeidung divergenter Ausdrücke für v aus einer Linie l oder einer Fläche f abnehmende Stücke derselben ausgeschieden, und durch eingeschaltete Kugelflächen ersetzt wurden.

Die einwerthigen Potentiale zerfallen hiernach in zwei getrennte Gattungen, von denen die eine durch die, in den art. IX.—XII. gegebenen, geschlossenen Ausdrücke dargestellt wird, während die andere die Darstellung durch Formen, deren Elemente von der reciproken Entfernung abhängen, nur unter der Bedingung gestattet, dass die durch die Wahl dieser bestimmten Formen herbeigeführte Divergenz durch Ausscheidung von Restgliedern gehoben wird. Functionen dieser Art sind bis jetzt wenig untersucht worden, da sie nach dem eben Gesagten mit der Lehre von den Kräften, die nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernung wirken, in keiner Beziehung stehen.

Note 1.

Um den Punkt m der Fläche S als Centrum legen wir eine Kugel vom Radius c , und nennen S' das in ihr Inneres fallende Stück von S . Es wird vorausgesetzt, dass S' durch Gerade, die zu einer Coordinatenaxe parallel sind, höchstens n mal, d. h. nicht unendlich oft geschnitten wird. Ist jetzt $\partial S'$ ein Element von S' , R seine Entfernung von m , k eine unter 1 liegende positive Zahl, so convergirt das Integral

$$\omega = \int \frac{\partial S'}{R^{1+k}}$$

mit abnehmendem c gegen Null.

Zum Beweise verlegen wir den Coordinatenanfang nach m , und bezeichnen die positiven Flächeninhalte der Projectionen von $\partial S'$ auf die Coordinatenebenen durch $\partial S'_x$, $\partial S'_y$, $\partial S'_z$, woraus

$$\omega < \int \frac{\partial S'_x}{R^{1+k}} + \int \frac{\partial S'_y}{R^{1+k}} + \int \frac{\partial S'_z}{R^{1+k}}$$

folgt, weil $\partial S'$ als Summe der positiven Projectionen von $\partial S'_x$, $\partial S'_y$, $\partial S'_z$ auf die Ebene von $\partial S'$ kleiner als die Summe dieser Grössen selbst ist. Legt man jetzt über die yz -Ebene um m als Centrum zwei Kreise, deren Radien $\Re$ und $\Re + \partial \Re$ kleiner als c sind, so ist die Summe aller auf den von ihnen begrenzten Kreisring fallenden Projectionen $\partial S'_x$ kleiner als $n \cdot 2\pi \Re \partial \Re$, also der von diesen Projectionen herrührende Theil von $\int \frac{\partial S'_x}{R^{1+k}}$ kleiner als $n \cdot 2\pi \Re \partial \Re$ dividirt durch den kleinsten Werth, welcher R^{1+k} in diesen Projectionen beizulegen ist,

also jedenfalls kleiner als $\frac{n \cdot 2\pi R \partial R}{R^{1+k}}$; mithin ist $\int \frac{\partial S_x}{R^{1+k}} < 2n\pi \int \frac{\partial R}{R^k}$
 $= \frac{2n\pi}{1-k} c^{1-k}$. Da dasselbe für die beiden anderen Integrale gilt, so folgt
 $\omega < \frac{6n\pi}{1-k} c^{1-k}$. So lange also $1-k$ einen von Null verschiedenen
 positiven Werth hat, und n nicht über jeder angebbaren Zahl liegt,
 kann man die positive Grösse ω durch Verkleinerung von c unter jede
 Grenze bringen, w. z. b. w.

Note 2.

Die Oberfläche eines Raumes, den eine beliebig fortbewegte Kugel
 K vom constanten Halbmesser R durchdringt, nenne ich eine Röhren-
 fläche, R ihren Halbmesser und die Bahn l des Kugelcentrums ihre Axe.

Die Curve, in welcher die Kugel K durch eine ihrer früheren
 Lagen geschnitten wird, ist ein Kreis, dessen Ebene zur Verbindungs-
 linie der Kugelmittelpunkte in der Mitte senkrecht steht, und den
 nämlichen Punkt zum Centrum hat. Lässt man beide Kugeln zu-
 sammenfallen, so geht ihr Durchschnitt in die Curve über, an der ent-
 lang K von der Röhrenfläche S berührt wird. Dieselbe ist hiernach
 ein Hauptkreis von K , dessen Ebene im Centrum von K zur Axe l
 senkrecht steht. Daraus ergeben sich die folgenden bekannten Sätze,
 welche hier der Übersicht wegen zusammengestellt werden mussten.

1. Die Röhrenfläche S wird von jeder Normalebene ihrer Axe l
 in einem Kreise vom Halbmesser R geschnitten, den wir den Quer-
 schnitt nennen.

2. Alle Halbmesser eines Querschnitts sind Normalen von S ; jeder
 Querschnitt ist also eine Krümmungslinie von S und ihr Krümmungs-
 radius constant $= R$.

Durch die Endpunkte q, q' eines Bogenelementes ∂l der Axe lege
 ich die Normalebenen von l , und nenne die hierdurch auf S be-
 stimmten Querschnitte N, N' . Ist nun ∂l_1 ein Element von N , o sein
 Anfangspunkt, und ∂l_2 das von N und N' begrenzte Element der
 zweiten durch o gehenden Krümmungslinie von S , so sind ∂l_1 und ∂l_2
 zu einander, und weil sie in der Tangentialebene von S liegen, auch
 beide zur Normale oq senkrecht. Folglich ist ausser ∂l auch noch
 ∂l_2 zur Ebene des Querschnittes N senkrecht.

3. Jedes Element ∂l_2 einer Krümmungslinie der zweiten Schaar
 ist zu dem, von den nämlichen Normalebenen der Axe begrenzten
 Elemente ∂l dieser letztern parallel.

Die Länge von ∂l_2 berechnen wir mittelst seiner Projection $\partial l'_2$
 auf die zu ∂l gehörige Krümmungsebene der Axe. Da ∂l_2 zu ∂l , also

auch zu dieser Krümmungsebene parallel ist, so ist seine Länge gleich der Länge ∂l_1 seiner Projection. Letztere ist zu ∂l parallel, und mit diesem durch dieselben Normalebenen der Axe, also auch durch dieselben Hauptnormalen von l begrenzt. Folglich liegen ∂l und ∂l_1 auf zwei concentrischen Kreisen dem nämlichen Centriwinkel gegenüber. Nennt man P den Krümmungshalbmesser von l , P' den Halbmesser des anderen Kreises, so folgt $\frac{\partial l_1}{P'} = \frac{\partial l}{P}$, also $\partial l_1 = \partial l = \frac{P'}{P} \partial l$.

Bezeichnet man aber durch θ' den Winkel zwischen der Richtung von q nach o und von q an P entlang nach dem Krümmungscentrum hin, so dass θ' , wenn o an N entlang sich fortbewegt, von 0 bis 2π wachsen kann, so ergibt sich $P' = P - R \cos \theta'$, also $\partial l_1 = \left(1 - \frac{R \cos \theta'}{P}\right) \partial l$.

Lässt man ferner θ' um $\partial \theta'$ wachsen, so beschreibt o das Bogenelement ∂l_1 , also ist $\partial l_1 = R \partial \theta'$.

Das Element der Oberfläche S ist $\partial S = \partial l_1 \partial l_2$, mithin

$$\partial S = \left(1 - \frac{R \cos \theta'}{P}\right) R \partial \theta' \partial l.$$

Ist daher l die Länge der Axe l , so ist die Gesamtoberfläche von S zwischen dem ersten und letzten Querschnitte gleich

$$\int \partial l \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{R \cos \theta'}{P}\right) R \partial \theta' = 2\pi R l.$$

Note 3.

Auf der Fläche S sei eine Linie l verzeichnet, deren Länge und Eckenzahl nicht unendlich gross sind. Um diese Linie als Axe legen wir eine Schaar von Röhrenflächen, und nennen R den Halbmesser einer beliebigen Röhre Σ , c den Halbmesser der weitesten Röhre Σ_0 . Diese letztere schneidet aus S ein Stück S' heraus, von dem wir voraussetzen, dass es von jeder geraden Linie und jeder Krümmungslinie einer der genannten Röhrenflächen höchstens in n getrennten Punkten, d. h. nicht unendlich oft geschnitten wird.

Ist jetzt $\partial S'$ ein, zwischen die Röhren von den Halbmessern R und $R + \partial R$ fallendes Element von S' , k eine unter 1 liegende positive Zahl, so convergirt das über die ganze Fläche S' erstreckte Integral

$$\eta = \int \frac{\partial S'}{R^k}$$

mit abnehmendem c gegen Null

Zum Beweise dieses Satzes ist eine Zerlegung von η erforderlich. Die Röhrenfläche Σ_0 setzt sich aus Kugelstücken und Röhrenflächen im engern Sinne zusammen. Die letzteren können durch einen Querschnitt Q erzeugt werden, der sich an den stetig gebogenen Theilen von l entlang fortbewegt. Zu den ersteren gehören die halbkugelförmigen Verschlussstücke über den Enden von l und, wie aus der Erzeugung der Fläche durch Fortbewegung einer Kugel hervorgeht, in jeder Ecke m von l zwei Kugelsectoren, welche die angrenzenden Röhrenstücke in Verbindung setzen, und von denen der eine innerhalb, der andere ausserhalb beider Stücke liegt.

Dehnt man nun in η zuerst die Integration über alle Elemente $\partial S'$ aus, welche von Q überstrichen werden, so werden in jeder Ecke m die in den einen Kugelsector fallenden Elemente zweimal aufgenommen, dagegen die im anderen und in den Verschlussstücken liegenden weggelassen. Ist η' das Resultat dieser Integration, so muss man also, um η zu erhalten, zu η' für jede Ecke und jedes Ende von l ein Integral $\int \frac{\partial S''}{R^k}$ addiren, und für jede Ecke ein solches Integral subtrahiren; in diesen Integralen ist R die Entfernung von $\partial S''$ bis zum fraglichen Punkte von l , während $\partial S''$ das Element des ins jedesmalige Kugelstück fallenden Theils von S' ist. Jedes dieser Integrale ist also kleiner als $c \int \frac{\partial S''}{R^{1+k}}$, und um so mehr kleiner als dasselbe Integral, wenn es über alle in die volle Kugel fallenden Elemente $\partial S''$ erstreckt wird. Da für das letztere die in der ersten Note gestellten Bedingungen erfüllt sind, so verschwindet es selbst, und um so mehr jedes zu η' hinzuzufügende Integral mit c zugleich. Dasselbe gilt von der Summe dieser Integrale, da ihre Anzahl nicht unendlich gross ist. Folglich verschwindet auch $\eta - \eta'$ zugleich mit c .

Die Untersuchung kann hiernach auf den Fall beschränkt werden, wo l stetig gebogen, und S' durch die Röhrenfläche Σ_0 vom Halbmesser c und ihre Querschnitte in den Enden von l begrenzt ist. Wir setzen demnach voraus, dass der Krümmungshalbmesser P von l nirgendwo kleiner als eine gegebene Strecke γ wird, und wählen $c < \gamma$; dann wird für jeden Winkel θ $1 - \frac{R \cos \theta}{P}$ positiv und kleiner als 2, wovon später Gebrauch gemacht wird.

Dies festgestellt, betrachten wir der leichteren Darstellung wegen die Halbmesser R , die zu l parallelen Krümmungslinien l_2 der Röhrenflächen und ihre, in die Querschnitte fallenden Krümmungslinien l_1 als drei Schaaren von Lichtstrahlen. Dann wirft $\partial S'$ in jeder dieser drei Beleuchtungen einen Schatten, in der ersten auf die Röhrenfläche Σ

vom Halbmesser R , in der zweiten auf den Querschnitt Q und in der dritten auf denjenigen Theil E der Krümmungsebene von l , welcher die rückwärts gehende Verlängerung von P enthält. Nennt man die Flächeninhalte dieser Schatten, wie sie aufgezählt wurden, $\partial \Sigma$, ∂Q , ∂E , so ist

$$\partial S' < \partial \Sigma + \partial Q + \partial E,$$

da die drei Schatten von $\partial S'$ wie zu einander senkrechte Projectionen von $\partial S'$ oder wie Vergrößerungen solcher angesehen werden können.

Bedeutet $\partial \Sigma_0$ den Flächeninhalt des Schattens, den $\partial \Sigma$ auf die äusserste Röhrenwand Σ_0 wirft, und h das Vergrößerungsverhältnis, so wird $\partial \Sigma = \frac{\partial \Sigma_0}{h}$; es wird demnach auch

$$\int \frac{\partial S'}{R^2} < \int \frac{\partial \Sigma_0}{h R^2} + \int \frac{\partial Q}{R^2} + \int \frac{\partial E}{R^2},$$

wenn rechts der jedesmalige Werth von R durch die Lage des schattenwerfenden Elementes $\partial S'$ bestimmt wird, und die Integrationen sich über alle beschatteten Theile von Σ_0 , Q und E erstrecken, und zwar über jedes Element so oft, als es Elemente $\partial S'$ giebt, deren Schatten es aufnimmt.

Nennt man ∂l_1 , ∂l_2 die Elemente der beiden Krümmungslinien l_1 , l_2 , die vom Punkte p der Fläche Σ ausgehen, und θ den Winkel zwischen dem nach p führenden Halbmesser R und dem Krümmungshalbmesser P im Fusspunkte von R auf l , so ist $\partial l_1 = R \partial \theta$, $\partial l_2 = \left(1 - \frac{R \cos \theta}{P}\right) \partial l$, wenn ∂l_2 und ∂l von denselben Querschnitten begrenzt werden. Die Elemente von Σ , Q und E werden hiernach folgende:

$$\partial \Sigma = \partial l_1 \partial l_2 = R \left(1 - \frac{R \cos \theta}{P}\right) \partial l \partial \theta,$$

$$\partial Q = \partial l_1 \partial R = R \partial R \partial \theta,$$

$$\partial E = \partial R \partial l_2 \text{ für } \theta = \pi, \text{ also } = \left(1 + \frac{R}{P}\right) \partial l \partial R.$$

Folglich ist

$$\frac{\partial \Sigma_0}{h R^2} = R^{1-\kappa} \left(1 - \frac{R \cos \theta}{P}\right) \partial l \partial \theta < 2 c^{1-\kappa} \partial l \partial \theta,$$

$$\frac{\partial Q}{R^2} = R^{1-\kappa} \partial R \partial \theta,$$

$$\frac{\partial E}{R^2} = \left(1 + \frac{R}{P}\right) \frac{\partial l \partial R}{R^2} < \frac{2 \partial l \partial R}{R^2}.$$

Bildet man jetzt für jedes Element $\partial S'$ die verstärkte Ungleichheit

$$\frac{\partial S'}{R^2} < 2 c^{1-\kappa} \partial l \partial \theta + R^{1-\kappa} \partial R \partial \theta + \frac{2 \partial l \partial R}{R^2},$$

und beachtet bei der Addition, dass auf jedes beschattete Element $\partial \Sigma_0$, ∂Q , ∂E nicht mehr als n Schatten fallen können, so wird umso mehr

$$\int \frac{\partial S'}{R^k} < n \left[2c^{1-k} \int \partial l \partial \theta + \int R^{1-k} \partial R \partial \theta + 2 \int \frac{\partial l \partial R}{R^k} \right],$$

wo die Integrationen über jedes beschattete Element $\partial \Sigma_0$, ∂Q , ∂E nur einmal zu erstrecken sind. Diese Ungleichheit wird mindestens nicht geschwächt, wenn statt dessen die Integrationen über alle Elemente ausgedehnt werden, also ist

$$\eta < n \left[4\pi l \cdot c^{1-k} + \frac{2\pi}{2-k} c^{2-k} + \frac{2}{1-k} l c^{1-k} \right].$$

Solange daher $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{l}$ und die positive Zahl $1-k$ von Null verschieden sind, kann man die positive Grösse η durch Verkleinerung von c unter jede Grenze hinabdrücken, w. z. b. w.

Zürich, 15. Juni 1865.

XI.

Ueber den Einfluss von Realitäts- und Stetigkeits-Bedingungen auf die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 66, 1866, S. 1—14.)

Die Aufgaben, deren Lösung von der Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen abhängt, führen in der Regel Nebenbedingungen mit sich, welche aus der mit dem Problem gegebenen realen Bedeutung der einzelnen Variablen entspringen, und demgemäss stets in einer Beschränkung der Veränderlichkeit dieser Grössen bestehen.

Man hat diesem Umstande bisher keine besondere Beachtung geschenkt, indem bei den mir bekannt gewordenen Untersuchungen über Probleme dieser Art die Schlüsse sich ausschliesslich auf die den allgemeinen Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen eigenthümlichen Formverhältnisse stützen, ohne dass die Frage erwähnt wird, ob diese Formen auch die hier unerlässliche Eigenschaft besitzen, jene nur auf Grössenverhältnisse gerichteten Nebenbedingungen ununterbrochen zu befriedigen.

Dies ist nun keineswegs unter allen Umständen der Fall; vielmehr kann es vorkommen, dass diese Nebenbedingungen zu wesentlichen Abweichungen von den Gesetzen zwingen, nach denen die in der allgemeinen Lösung dargestellten Functionen durch die Differentialgleichungen von bekannten zu unbekannten Werthen fortgesetzt werden, und dann treten Erscheinungen ein, die bisher unbemerkt bleiben mussten, weil sie durch eine von diesen Gesetzen nirgendwo abweichende Rechnung nicht aufgedeckt werden können.

1.

Wir beschränken uns der Deutlichkeit wegen auf den Fall, wo die Auflösung gewöhnlicher Differentialgleichungen dazu dienen soll, um die Bewegungen materieller Punkte zu bestimmen. Diese Aufgabe schliesst ihrer Natur nach drei Bedingungen ein, dass nämlich 1) bei allen jene Bewegung unmittelbar bestimmenden Grössen imaginäre

Aenderungen, 2) bei der Zeit und den Coordinaten unstetige Aenderungen, und 3) bei der Zeit alle Beschränkungen in der Zu- oder Abnahme ausgeschlossen bleiben.

Diese Bedingungen würden nicht besonders zu erwähnen sein, wenn sie mit den Differentialgleichungen der Bewegung niemals in Widerspruch kommen könnten. In Wirklichkeit sind aber diese letzteren nichts anderes, als Gleichungen zwischen unbekannten Grössen, von denen einzelne die Derivirten anderer sind. Sie enthalten also thatsächlich zwei von einander zu unterscheidende Bedingungen, von denen die eine darin besteht, dass die Werthe jener Grössen durch die Werthe der übrigen gegeben sind, die andere darin, dass sie überdies die Derivirten anderer sein sollen. So enthält z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{dx}{dt} \sin \alpha + x \cos \alpha \right)^2 + \frac{1}{b^2} \left(\frac{dx}{dt} \cos \alpha - x \sin \alpha \right)^2 = 1$$

gleichzeitig alle Bedingungen, welche durch die beiden Gleichungen

$$\frac{1}{a^2} (y \sin \alpha + x \cos \alpha)^2 + \frac{1}{b^2} (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 = 1, \quad y = \frac{dx}{dt}$$

ausgedrückt sind.

Da hiernach zwei von einander durchaus unabhängige Bestimmungen vorliegen, von denen jede das Zeichen von y an die Zu- oder Abnahme von x bindet, nämlich einerseits die ursprüngliche Gleichung zwischen den Grössen x und y selbst nebst den Stetigkeits-Bedingungen, andererseits die Gleichung $y = \frac{dx}{dt}$ nebst den Realitäts- und Stetigkeits-Bedingungen, so ist unmittelbar klar, dass Widersprüche zwischen sämtlichen Bedingungen nicht immer unmöglich sind, und unter welchen Voraussetzungen sie eintreten müssen.

Ein Widerspruch zwischen diesen sämtlichen Bedingungen tritt stets und auch nur dann ein, wenn eine Differentialgleichung oder ein System solcher in irgend einem Augenblicke anfängt, das Zeichen der Derivirten einer Function in einer den Realitäts- und Stetigkeits-Bedingungen widersprechenden Weise zu bestimmen. Von demselben Augenblicke an ist eine reelle und zugleich stetige Fortsetzung dieser Function nur möglich, wenn entweder eine zweite, sich dort stetig anschliessende, im Allgemeinen singuläre Lösung existirt, oder die Differentialgleichungen in einer entsprechenden Weise abgeändert werden. Es sind hier zwei Fälle zu unterscheiden:

I. Wenn eine Function x und die unabhängige Variable t in Folge der Stetigkeitsbedingungen ihre Aenderungen im früheren Sinne fortsetzen müssen, aber zugleich $\frac{dx}{dt} = x'$ durch die Differentialgleichungen zu einem Zeichenwechsel gezwungen wird.

II. Wenn x' ohne Unstetigkeit sein Zeichen nicht wechseln kann, aber x bei stetigem x' durch die Realitätsbedingungen verhindert ist, seine Aenderungen im früheren Sinne fortzusetzen.

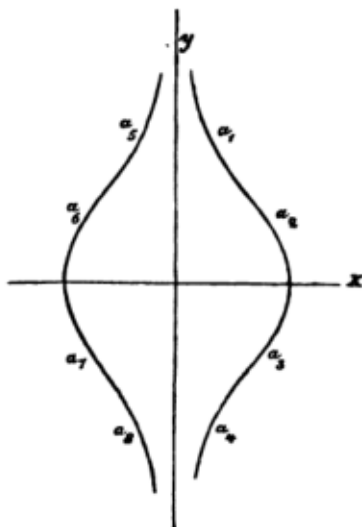
Dieser zweite Fall tritt z. B. ein, wenn die Differentialgleichungen für x , als Function von x' betrachtet, ein Maximum bei positivem, oder ein Minimum bei negativem x' liefern, ohne dass den Bedingungen der Aufgabe durch eine besondere Lösung genügt werden kann, welche eine dem Zeichen von x' entsprechende Fortsetzung von x gestattet, z. B. in der Differentialgleichung $(x' - a)^2 + x^2 = a^2$ für $x' = a$, $x = a$. Hat x von Null aus gehend diesen Werth erreicht, so kann es wegen des Zeichens von x' nicht zu früheren Werthen zurückkehren, wegen des Werthes von x' nicht bei dem Werthe a beharren, und wegen der Differentialgleichung und der Realitätsbedingungen denselben nicht überschreiten.

Bedeutet bei einem mechanischen Problem, welches diesen Fall zulässt, x irgend eine Coordinate, t die Zeit, also $\frac{dx}{dt}$ die Geschwindigkeit, mit welcher x wächst, so reicht die Angabe der beschleunigenden Kräfte nebst den Anfangs-, Realitäts- und Stetigkeits-Bedingungen zur völligen Bestimmung der Bewegung nicht für alle Folgezeiten hin, sondern nur bis zu dem Augenblicke, wo jener Fall zum ersten Male eintritt. Von diesem Augenblicke an ist die stetige und zugleich reelle Fortsetzung von x bei stetigem $\frac{dx}{dt}$ unmöglich, also, da die erstere wegen des unbeschränkten Wachsens von t nothwendig ist, wird $\frac{dx}{dt}$ zu einer Unstetigkeit gezwungen, die jedoch vollkommen willkürlich ist, weil die bis zu jenem Augenblicke wirkenden Bedingungen keine Angabe über die Grösse derselben enthalten.

Auch der erste Fall ist unter zwei verschiedenen Voraussetzungen möglich. Sind nämlich x_0, t_0 die Werthe von x und t , für welche derselbe eintritt, so genügt man entweder von da ab den Bedingungen der Aufgabe durch eine, von der bis dahin gültigen verschiedene, aber bei $x = x_0, t = t_0$ sich stetig anschliessende Lösung, oder es hört, falls eine solche Lösung nicht existirt, wenigstens eine der Grössen x, t auf, reell zu sein. In der That kann unter dieser Voraussetzung x , wenn t den Werth t_0 überschreitet, weder $-x_0$ bleiben, weil dies eine von der früheren, ein veränderliches x voraussetzenden, verschiedene Lösung wäre, noch kann es, ohne imaginär zu werden, x_0 überschreiten, weil hierbei x' sein Zeichen ändern würde, während der dritte Fall, dass es zu früheren Werthen zurückkehre, durch die Voraussetzungen des vorliegenden Falles ausgeschlossen ist.

Ein Beispiel dieser Art ist die Gleichung $x^3 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 1 - x^2$. Setzt man $\frac{dx}{dt} = y$, und betrachtet x und y als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes, so entspricht dieser Gleichung eine Curve von der nebenverzeichneten Gestalt, welche die y -Axe zweimal zur Asymptote hat.

Lässt man nun x zwischen den Grenzen -1 und 1 oscilliren, und verlangt, dass hierbei alle einzelnen Theile im Ausdrucke für y sich mit x nach der Stetigkeit ändern, wie es später zu beweisenden Sätzen zufolge bei der unbestimmten Integration vorstehender Differentialgleichung wirklich geschieht, so wird diese Curve durch den Punkt x, y von a_1 aus in der Richtung $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_1, \dots$ durchlaufen, indem y , so oft x durch Null geht, von einem der Werthsgebiete $+\infty$ und $-\infty$ ins andere springt, um sich von da ab eine Zeit lang nach der Stetigkeit zu ändern.



Dies widerspricht jedoch auf der Seite der negativen x der Bedingung, dass bei reellen Werthen aller Variablen stets $y = \frac{dx}{dt}$ sei, indem auf dem Zweige a_5, a_6 , bei abnehmendem x , $\frac{dx}{dt}$ positiv, auf dem Zweige a_7, a_8 , bei wachsendem x , $\frac{dx}{dt}$ negativ sein würde. Wenn man daher aus obiger Differentialgleichung x durch unbestimmte Integration ermittelt, und die willkürliche Constante der Bedingung gemäss wählt, dass der Punkt x, y zur Zeit $t = 0$ von a_1 ausgehe, so kann diese Lösung reelle Werthe für x bei reellem t nur bis zu dem Augenblicke liefern, wo x zum ersten Male $= 0$ wird.

2.

Die vorangehenden Grössenbestimmungen stützen sich ausdrücklich auf die Bedingung reeller Werthe aller Variablen, und können ohne dieselben nicht bestehen; sie begründen daher keine Schlüsse auf entsprechende Eigenschaften der durch die Differentialgleichungen bedingten analytischen Formen. Um auch für die letzteren die Folgerungen festzustellen, welche sich an die obigen Ausnahmefälle knüpfen, muss die Untersuchung bei unbeschränkten Variablen durchgeführt

werden. Der hierbei einzuschlagende Weg bestimmt sich durch den nachher zu beweisenden Satz, dass der Uebergang von einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu seiner allgemeinen Lösung stets als durch unbestimmte Integration vollständiger Differentiale bewirkt angesehen werden kann.

Während dieser unbestimmten Integrationen, welche man sich in der bekannten Weise als successive, die partiellen Differentiale der Reihe nach berücksichtigende zu denken hat, durchlaufen nun die unabhängigen Variablen und die der Integration unterworfenen Functionen Werthenreihen, welche zwar unbestimmt gelassen sind, aber nichts desto weniger einer wesentlichen Einschränkung unterliegen.

In der That ist jedes Resultat der unbestimmten Integration, soweit dieser Begriff überhaupt reicht, ein Ausdruck u , der als solcher bei fester, übrigens willkürlicher unterer Begrenzung stetige Aenderungen nur mit der oberen Begrenzung zugleich erleidet, und den Ausdruck unter dem Integralzeichen zum Differential hat. Wenn daher der Ausdruck u überhaupt vom Integrationswege, nicht bloss von seiner Begrenzung abhängt, so muss diese Abhängigkeit eine solche sein, dass eine stetige Aenderung des Integrationsweges bei fester Begrenzung entweder eine sprungweise Aenderung von u zur Folge hat, oder, wo u nicht unstetig ist, es ganz und gar ungeändert lässt.

In Folge dessen ist durch die unbestimmte Integration jeder Integrationsweg ausgeschlossen, an dem entlang die Werthe der unter dem Integralzeichen stehenden Ausdrücke nicht allenthalben in der speciellen Weise auf einander folgen, wie sie sich bei der stetigen Fortsetzung der entsprechenden Functionen über complexe Werthsgebiete an einander fügen. Denn wenn derselbe eine angebbare Stelle enthielte, an welcher der durch die stetige Fortsetzung bestimmte analytische Verlauf einer von diesen Functionen unterbrochen ist, so würde man durch stetige Ortsänderung dieser Stelle dem Resultate der Integration stetige und von Null verschiedene Aenderungen ertheilen können.

Wenn daher in Folge anderweitiger Bedingungen in dem Augenblicke, wo der Integrationsweg eine bestimmte Stelle überschreitet, bei einer von den der Integration unterworfenen Functionen der analytische Verlauf unterbrochen werden muss, so muss von diesem Augenblicke an das Resultat dieser Integration von dem der unbestimmten abweichen, da beide sich in verschiedener Weise ändern.

Wenn ein System A von n gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen eben so viel gesuchten Functionen die Eigenschaft hat, dass sich aus ihm nicht sämtliche Derivirten eliminiren lassen, so besteht seine allgemeine Lösung aus n Gleichungen B zwischen

den gesuchten Functionen und n willkürlichen Constanten, welche bekanntlich in Bezug auf die Functionen von einander unabhängig sind, und überdies, was für unseren Zweck ebenso wesentlich ist, dieselbe Eigenschaft in Bezug auf die willkürlichen Constanten besitzen. Denn liessen sich diese aus B eliminiren, so wäre das Eliminationsresultat entweder identisch, und dann bestände das System B aus weniger als n Gleichungen, oder dasselbe stellte sich dar als eine von den Gleichungen A geforderte Relation, in der weder willkürliche Constanten noch Derivirten vorkommen können, und dann liessen sich aus A alle Derivirten eliminiren, was der Voraussetzung zuwider ist.

Folglich ist durch die Gleichungen B jede von den n willkürlichen Constanten in völlig bestimmter Weise abhängig gemacht von der unabhängigen Veränderlichen und den ursprünglich gesuchten Functionen. Es giebt daher auch n von einander unabhängige vollständige Differentiale, welche in Folge der Gleichungen A gleich Null sein müssen, und von denen aus man durch unbestimmte Integration zu einem mit B gleichbedeutenden System von Gleichungen gelangt. Folglich muss die allgemeine Lösung von A wenigstens mittelbar als das Resultat unbestimmter Integrationen angesehen werden. Dasselbe gilt von der allgemeinen Lösung jedes beliebigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, da dasselbe, auf seine wirkliche Ordnung reducirt (vergl. die Abhandlung von Jacobi im 64. Bande dieses Journals, Seite 297), als ein System A dargestellt werden kann.

Hieraus ziehen wir nun den Schluss, dass die allgemeine Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen bei mechanischen Problemen, weil sie dem Resultate unbestimmter Integrationen entspricht, nach Berücksichtigung der Anfangsbedingungen nur bis zu dem Augenblicke gültig ist, wo zum ersten Male einer Derivirten durch die Differentialgleichungen ein den Realitäts- und Stetigkeits-Bedingungen widersprechendes Vorzeichen angewiesen wird.

Umgekehrt kann von den obigen Ausnahmefällen weder der eine, noch der andere eintreten, so lange die allgemeine Lösung bei reellen und stetigen Aenderungen der Variabeln jeder Function reelle, und wo das gefordert ist, zugleich stetige Aenderungen anweist, weil unter dieser Voraussetzung ein Widerspruch zwischen der Zu- oder Abnahme einer Function und dem Zeichen ihrer Derivirten unmöglich ist.

3.

Zum Schlusse will ich an einigen einfachen Beispielen nachweisen, wie in den obigen Ausnahmefällen die Realitäts- und Stetigkeits-Bedingungen zur Bestimmung der ferneren Bewegung verhelfen, und zu

diesem Zwecke ein von mir vor längerer Zeit gefundenes Verfahren benutzen, welches, wenn auch auf eine specielle Gattung von Differentialgleichungen beschränkt, doch vorzugsweise geeignet ist, um die hier erörterten Verhältnisse zur Anschauung zu bringen. Dasselbe gewährt überdies bei einer grossen Zahl von Aufgaben der Mechanik ohne die geringste Mühe eine so vollständige Einsicht in den Verlauf der zu untersuchenden Erscheinung, wie sie durch die Rechnung nur selten, und stets nur auf Umwegen erreicht werden kann. Dasselbe besteht in Folgendem.

Ist eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$(1.) \quad f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$$

zu untersuchen, in welcher die unabhängige Variable t nicht vorkommt, so betrachte man in einem System rechtwinkliger Coordinaten x als die Abscisse zweier Punkte m und μ zur Zeit t , von denen der erstere auf der Abscissenaxe beharrt, während die Ordinate y des andern $= \frac{dx}{dt}$ ist. Während alsdann m sich der Gleichung (1.) gemäss an der Abscissenaxe entlang fortbewegt, beschreibt der mit m stets auf derselben Ordinate befindliche Hülfspunkt μ eine Curve, deren Gleichung

$$(2.) \quad f(x, y) = 0$$

ist, und welche die Geschwindigkeitscurve heissen soll.

Dies festgestellt, ist $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot y$; folglich wird die Geschwindigkeitscomponente von μ parallel zur x -Axe durch die Ordinate, parallel zur y -Axe durch die Subnormale der Geschwindigkeitscurve dargestellt. Die tangentielle Geschwindigkeit von μ ist hiernach gleich dem von μ bis zur x -Axe reichenden Stücke N der Normale. Legt man die Richtungen der wachsenden x und y wie üblich nach rechts und oben, so bewegt sich μ wegen der Gleichung $\frac{dx}{dt} = y$ nach rechts oder links, je nachdem es sich über oder unter m befindet.

Ist ρ der Krümmungshalbmesser der Geschwindigkeitscurve, $d\tau$ der Winkel, um den er sich während der Zeit dt dreht, ds das $d\tau$ gegenüberliegende Bogenelement, so ist $\rho d\tau = ds$. Bezeichnet man daher die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher die Normale sich dreht, durch ω , so folgt $\rho \omega = \frac{ds}{dt}$, also

$$\omega = \frac{N}{\rho}.$$

Betrachtet man m als eine Masseneinheit, so wird die an m wirkende beschleunigende Kraft $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt}$ durch die von m selber aus-

gehende Subnormale dargestellt, und zwar, wie man sich leicht überzeugt, stets auf derjenigen Seite von m , nach welcher sie diesen Punkt zieht.

Auf diese Weise ist die zu untersuchende Bewegung von m auf die Bewegung des Hilfspunktes μ zurückgeführt, und die letztere augenfällig, solange μ sich ausserhalb der x -Axe befindet, weil in diesem Falle die Geschwindigkeit von μ und ihre Richtung sich aus der Gestalt der Geschwindigkeitscurve und der Lage von μ unmittelbar zu erkennen geben.

Wenn dagegen μ in die x -Axe einrückt, also $y = \frac{dx}{dt} = 0$ wird, so kommt m , welches jetzt mit μ zusammenfällt, dort für einen Augenblick zur Ruhe. Ob es in derselben verharren, oder seine Bewegung weiter fortsetzen muss, hängt davon ab, ob mit $\frac{dx}{dt}$ auch die andere Geschwindigkeitscomponente $\frac{dy}{dt} = y \frac{dy}{dx}$ von μ erlischt. Ist dies der Fall, ist z. B. der Winkel, unter welchem μ die x -Axe trifft, kein rechter, so geht μ und mit ihm m in den Ruhezustand über. Damit die Bewegung von μ nach seinem Eintritte in die x -Axe nicht erlösche, ist erforderlich, wenn auch nicht in allen Fällen hinreichend, dass dort $y \frac{dy}{dx}$ von Null verschieden bleibt. Was unter dieser Voraussetzung stattfindet, hängt hauptsächlich davon ab, ob der Punkt, den die Geschwindigkeitscurve mit der x -Axe gemein hat, ein Rückkehrpunkt, ein Wendepunkt oder ein Punkt gewöhnlicher Biegung ist. Die verschiedenen hier möglichen Fälle lassen sich indessen stets so leicht erledigen, dass eine allgemeine Erörterung über dieselben überflüssig ist.

I. Sei die Bewegung von m bestimmt durch die Gleichung $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{x^2}$ mit der Bedingung, dass für $t = 1$, $x = 1$ und $\frac{dx}{dt} = 0$ sei, nebst allen aus dem Begriff der Bewegung folgenden Realitäts- und Stetigkeitsbedingungen. Wir fügen noch hinzu, dass die Geschwindigkeit von m , ohne durch Null zu gehen, ihre Richtung nicht umkehren soll, was die Stetigkeitsbedingung für unendliche Werthe von $\frac{dx}{dt}$ vertritt.

Durch einmalige Integration findet sich die oben als Beispiel benutzte Gleichung $x^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 1 - x^2$; also ist die Gleichung der Geschwindigkeitscurve $x^2 y^2 = 1 - x^2$. Dieselbe giebt für $y = 0$, $x = \pm 1$, $y \frac{dy}{dx} = \mp 1$. Wenn daher der Punkt μ die x -Axe trifft, so geht er durch dieselbe hindurch mit der Geschwindigkeit 1. Da ferner μ sich unter der x -Axe nach links, über derselben nach rechts bewegt, so gelangt er, auf welchem Zweige er sich auch befinden mag, mit wach-

sender Geschwindigkeit und wachsender Ordinate auf die unendlich entfernten Theile dieses Zweiges. In demselben Augenblicke geht der mit μ fortwährend auf derselben Ordinate befindliche Punkt m mit unendlich grosser Geschwindigkeit durch den Anfangspunkt, wodurch μ auf die benachbarten Theile des anderen Zweiges übergeführt wird. Da hiernach μ die Geschwindigkeitscurve unaufhörlich in derselben Richtung, und dieselbe Stelle jedesmal mit derselben Geschwindigkeit durchläuft, so ist seine Bewegung eine rein periodische. Folglich führt m periodische Oscillationen zwischen den Abscissen $x = 1$ und $x = -1$ aus. Da überdies die Geschwindigkeitscurve in Bezug auf die Coordinatenachsen symmetrisch ist, so sind auch die Viertelsschwingungen von m symmetrisch. Die Dauer einer ganzen Schwingung ist demnach viermal so gross, wie die Zeit, deren μ bedarf, um einen Quadranten zu durchlaufen. Wegen $dt = \frac{dx}{y}$ ist die letztere $= \int_0^1 \frac{dx}{y}$ bei positivem y , also $= 1$. Die Dauer einer vollständigen Schwingung beträgt also 4 Zeiteinheiten.

Durch Integration findet man mit Rücksicht auf die Anfangsbedingungen $x = \sqrt{t(2-t)}$, was nur von $t = 0$ bis $t = 2$ reell ist. An den Grenzen dieses Zeitraums wird $x = 0$, und hier tritt der Fall ein, dass, wenn x seine reellen Aenderungen durch Null hindurch fortsetzt, der Ausdruck $\frac{1}{x} \sqrt{1-x^2}$ für $\frac{dx}{dt}$ bei stetiger Aenderung seiner einzelnen Theile das Zeichen wechselt, was die reelle und zugleich stetige Fortsetzung von x und t durch die Differentialgleichung selbst unmöglich macht.

II. Sei α eine reelle Zahl zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, und die Bewegung von m bestimmt durch die Differentialgleichung $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\cotg \alpha^2}{x^3} + x = 0$; die übrigen Bedingungen sollen dieselben sein, wie im vorigen Beispiele.

Durch einmalige Integration erhält man $x^2 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = (1-x^2)(\cotg \alpha^2 + x^2)$. Daraus ergibt sich weiter durch unbestimmte Integration

$$t = \text{const.} - \text{arc tg } \sqrt{\frac{1-x^2}{\cotg \alpha^2 + x^2}},$$

und hieraus durch passende Bestimmung der Constanten nach einer kleinen Reduction $x^2 = \cos^2(1-t) - \cotg \alpha^2 \sin^2(1-t)$. Folglich hat x die Periode 2π . Da indessen, wie man sofort sieht, x aus vorstehender Gleichung zu Anfange nur während des Zeitraums $1 - \alpha < t < 1 + \alpha$ reelle Werthe erlangt, so lassen sich aus der Periodicität des Aus-

druckes für x keine weiteren Schlüsse ziehen. An den Grenzen dieses Zeitraumes tritt derselbe Ausnahmefall wie im vorigen Beispiele ein.

Die Geschwindigkeitscurve, deren Gleichung $x^2 y^2 = (1 - x^2)(\cot^2 \alpha + x^2)$ ist, hat eine ähnliche Gestalt, wie im vorigen Falle; wo sie die x -Axe schneidet, wird die Geschwindigkeit von μ , abgesehen vom Zeichen, $= \frac{1}{\sin \alpha}$, also von Null verschieden. Folglich finden in Bezug auf die Bewegung von μ und m auch die vorigen Schlüsse statt. Die Zeit, deren μ bedarf, um einen Quadranten zu durchlaufen, ergibt sich aus dem obigen Ausdrucke für t gleich $\arctg(\tg \alpha) = \alpha$, da α zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt. Folglich führt m periodische Oscillationen zwischen den Abscissen $x = 1$ und $x = -1$ aus, aber die Dauer einer ganzen Schwingung ist nicht -2π , wie die allgemeine Lösung andeutet, sondern -4α .

III. Sei die Bewegung des Punktes m durch die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = x \sqrt{1 - \frac{dx}{dt}}$$

und die hinzugehörigen Bedingungen bestimmt.

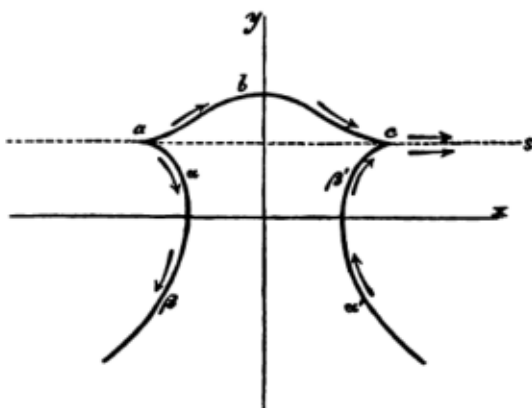
Diese Gleichung hat die singuläre Lösung $\frac{dx}{dt} = 1$; durch Integration findet man dagegen $3\left(2\frac{dx}{dt} + 3\right)\left(1 - \frac{dx}{dt}\right)^{\frac{3}{2}} = 14 - 5x^2$, bei passender Wahl der Integrationsconstanten. Die letztere hat zur Folge, dass die Geschwindigkeitscurve, deren Gleichung $3(2y + 3)(1 - y)^{\frac{3}{2}} = 14 - 5x^2$ ist, nothwendig durch die Anfangslage von μ geht, d. h. μ seine Bewegung auf der Geschwindigkeitscurve beginnt. Es wird sich zeigen, dass μ nicht unter allen Umständen auf ihr verbleibt.

Was nun die Gestalt dieser Curve betrifft, so ist dieselbe zunächst symmetrisch in Bezug auf

die y -Axe. Auf der Seite der positiven x gehören zu jedem x zwischen 1 und $\sqrt{\frac{14}{5}}$ drei reelle y , von denen eines negativ ist, sonst nur ein einziges.

Da $y \frac{dy}{dx} = x \sqrt{1 - y}$ für $x = 1, y = 0$ nicht verschwindet, so findet dort ein senkrechter Durchschnitt mit der x -Axe

statt, welcher die Fortbewegung von μ nicht hindert. Für $y = 1$,



$x = \sqrt{\frac{14}{5}}$ wird $\frac{dy}{dx} = 0$, also hat die Curve dort eine Spitze c , in welcher ihre beiden dort von links her zusammentreffenden Zweige von der in der Figur punktirten Geraden $y = 1$, welche der singulären Lösung entspricht, berührt werden. Endlich erlangt y für $x = 0$ ein Maximum.

Es sind hiernach in Betreff der anfänglichen Lage von μ drei Voraussetzungen möglich.

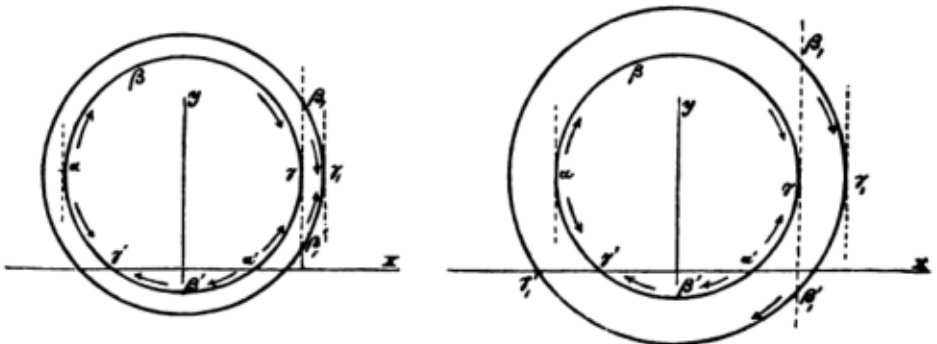
a) Befand μ sich zu Anfange in α auf dem Zweige $\alpha\beta$, so bewegt es sich zunächst nach rechts, geht dann durch die x -Axe, und setzt von dort aus seine Bewegung über β hinweg ohne Ende fort.

b) Befand μ sich zu Anfange auf dem Zweige abc , so bewegt es sich nach rechts bis c . Von dort kann es, weil die Ordinate in c ihr Zeichen nicht wechselt, nicht nach links zurückkehren, während die Geschwindigkeitscurve sich von c aus auch nicht weiter nach rechts fortsetzt. Folglich würde die stetige Fortbewegung von m über die Abscisse $x = \sqrt{\frac{14}{5}}$ von c hinaus ohne eine Unstetigkeit von $\frac{dx}{dt} = y$ nicht möglich sein, wenn nicht die in c berührende Gerade cs einen den ursprünglichen Bedingungen ebenfalls genügenden Ort für μ bildete. In c angelangt, geht daher μ auf cs über, und behält von da ab die Geschwindigkeit 1.

a') Befand endlich μ sich zu Anfange in α' , so durchläuft es den Bogen $\alpha'\beta'c$ und geht dann auf cs über.

Der Gang von m , oder der Verlauf von x als Function von t , lässt sich hiernach leicht beurtheilen.

IV. Sei h eine positive Constante, und die Bewegung von m bestimmt durch die Differentialgleichung $\left(\frac{dx}{dt} - h\right) \frac{d^2x}{dt^2} + x \frac{dx}{dt} = 0$, die Anfangsbedingung, dass für $t = 0$, $x = x_0$, $\frac{dx}{dt} = y_0$ werde, und die hierzu gehörigen Realitäts- und Stetigkeits-Bedingungen.



Setzt man $(y_0 - h)^2 + x_0^2 = c^2$, so folgt $\left(\frac{dx}{dt} - h\right)^2 + x^2 = c^2$, und für die Gleichung der Geschwindigkeitscurve $(y - h)^2 + x^2 = c^2$. Dieselbe ist also ein Kreis $\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'$ vom Halbmesser c , dessen Mittelpunkt in der Höhe h über dem Coordinatenursprunge liegt. Wir wollen nun annehmen, y_0 und x_0 seien so gewählt, dass $c > h$ wird, die Durchschnittspunkte mit der x -Axe seien α' und γ' , und die beiden Punkte, in denen der Kreis von seinen Ordinaten berührt wird, α und γ . Dann sind in Bezug auf die anfängliche Lage von μ vier Voraussetzungen möglich.

α) Befand μ sich anfangs zwischen α und γ' , so bewegt es sich mit abnehmender Geschwindigkeit nach dem Durchschnitte γ' mit der x -Axe, wo es zur Ruhe kommt.

β) Befand μ sich zu Anfange auf dem Bogen $\alpha'\beta'\gamma'$, so bewegt es sich nach links, und kommt wieder in γ' zur Ruhe.

β) Befand μ sich zu Anfange auf einem der Bogen $\alpha\beta\gamma$ oder $\alpha'\gamma$, so bewegt es sich in beiden Fällen nach rechts, bis es den Punkt γ erreicht, wobei m die Geschwindigkeit h erlangt. Von dort kann μ nicht nach links zurückkehren, weil die Ordinate $y = \frac{dx}{dt}$ ihr Zeichen nicht wechselt, und nicht weiter nach rechts gehen, da die Geschwindigkeitscurve sich in dieser Richtung nicht fortsetzt, und ausser der Gleichung des obigen Kreises keine andere Lösung existirt, welche den vorliegenden Bedingungen Genüge leistet.

Folglich ist zur stetigen und zugleich reellen Fortsetzung von x und t in dem Augenblicke, wo μ in γ anlangt, eine plötzliche, übrigens willkürliche Aenderung von $\frac{dx}{dt} = y$ erforderlich.

Sei also y_1 der Werth, auf den $\frac{dx}{dt}$ von h aus in dem Augenblicke springt, wo $x = c$ wird; dann folgt aus der ursprünglichen Differentialgleichung, wenn $(y_1 - h)^2 + c^2 = c_1^2$ gesetzt wird, $(y - h)^2 + x^2 = c_1^2$; also wird der neue Zweig der Geschwindigkeitscurve ein mit dem vorigen concentrischer Kreis, dessen Halbmesser $c_1 > c$ ist.

Je nach dem Werthe von y_1 springt nun der, an keine stetige Ortsänderung gebundene Hülfpunkt μ , nachdem er in γ angelangt ist, nach β_1 oder β'_1 . Liegt ausser β_1 auch noch β'_1 über der x -Axe (Figur links), so wiederholt sich der vorige Fall, indem nun μ sowohl von β_1 wie von β'_1 aus nach dem in gleicher Höhe mit γ liegenden Punkte γ_1 rückt, also eine neue Unstetigkeit von $\frac{dx}{dt}$ erforderlich wird, die zu einem neuen Kreise mit vergrössertem Halbmesser führt. Liegt β'_1 unter

der x -Axe, und springt μ von γ nach β_1' , so rückt es von dort nach γ_1' (Figur rechts), wo es zur Ruhe kommt.

Die Bewegung von m oder der Verlauf von x als Function von t bedarf hiernach keiner weiteren Erörterung.

Weitere geeignete Beispiele zur Anwendung des vorliegenden Verfahrens, welche allerdings nicht auf die hier behandelten Ausnahmefälle führen, liefert die Lehre vom konischen Pendel, von der Drehung eines Körpers um seinen Schwerpunkt und von der Bewegung eines schweren Punktes auf einer beliebig gegebenen Curve. Alle diese Anwendungen sind jedoch so einfach, dass es nicht nöthig ist, hier darauf näher einzugehen.

Zürich, 5. Januar 1866.

XII.

Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie.*)

(Annali di Matematica pura ed applicata, Serie II, Bd. 1, 1868, S. 89—103.)

Il presente lavoro si occupa del problema delle temperature stazionarie sopra superficie piane, coll'intento di esporre i punti di vista generali che devono mettersi a fondamento nella trattazione di questa quistione.

Ho giudicato conveniente di ritenere per la presente ricerca le condizioni essenziali del problema nella stessa semplicità che è propria della quistione fisica. Se si pone il problema nella sua forma più generale, allora il suo interesse invade un nuovo campo, onde per questo caso è giustificata una speciale ricerca che riservo ad un'altra occasione.

L'unico cangiamento che mi sono permesso per questa volta, concerne l'equazione differenziale del problema, che ho completata col mezzo di un termine indipendente, in guisa che l'espressione $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ non vien posta eguale a zero, ma ad una funzione arbitraria φ di x, y . Fatta astrazione da ragioni più riposte, questa aggiunta ha l'evidente vantaggio che vengono d'ora in avanti esclusi diversi sussidi non adatti a ricerche generali, per es. trasformazioni e soluzioni particolari.

Il principale interesse che si annoda a questo problema, dipende dalla sua conosciuta relazione colle proprietà generali di una funzione di una variabile complessa $x + iy$. Le ricerche fatte finora, per quanto qui potranno occorrere, non mirano però tanto ad approfondire e spiegare completamente questo legame, quanto piuttosto a rendere utile questo legame per gli scopi dell'integrazione.

Se si introducono nell'equazione $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$, in luogo delle

*) Traduzione del Dott. Carlo Formenti, in Pavia.

coordinate ortogonali x, y , le parti reali θ, ω di una funzione di $x + iy$ come variabili indipendenti, in virtù di quella relazione non vien cambiata la forma dell'equazione differenziale. Da ciò si ha subito il principio adoperato dal sig. Lamé nelle sue pregevoli *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, che la soluzione del problema per la superficie circolare $x^2 + y^2 < c^2$ basta per derivarne, sotto certe supposizioni fatte intorno alla funzione $\theta + i\omega$ ed alla grandezza di c , la soluzione per la superficie $\theta^2 + \omega^2 < c^2$.

La stessa trasformazione serve anche di fondamento alla bella memoria del sig. Neumann (Giornale di Borchardt, t. 59, pag. 348). La quale, oltre ad una diligente ricerca sulle curve (dapprima trattate da Cauchy) $\theta^2 + \omega^2 = c^2$, che il signor Neumann chiama *linee di livello*, presenta eziandio un importante progresso nella trattazione dell'attuale problema, facendo dipendere, per mezzo di considerazioni che sono analoghe alla teoria di Green sul potenziale, la determinazione della funzione primitivamente cercata da un'altra $\left[\eta_a^{(p)} d\omega_a \text{ in quanto al valore } = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \xi}{\partial p} ds \text{ art. 1.} \right]$ che è indipendente dai valori arbitrari di quella nel contorno, e soltanto dipende dalla forma del contorno e dalla posizione di un punto arbitrario p . L'espressione di questa funzione in θ ed ω è data a pag. 354, e la determinazione di θ ed ω per mezzo di x ed y vien ridotta ad un problema (pag. 355) il quale, a meno di una condizione di discontinuità non messa in evidenza, ma tuttavia facile a completarsi, costituisce un caso particolare della quistione primitiva. Non vi si danno però applicazioni di questa interessante riduzione a casi determinati.

Quanto sia anche a me riuscito di trovare nuovi punti di vista ed utili sussidi per la presente questione, lo mostreranno le ricerche che seguono.

I.

Sia distesa sul piano xy una superficie F ad un solo strato e semplicemente connessa (*eine einblättrige und einfach zusammenhängende Fläche*), il cui contorno sia formato da una data curva K . Ciò supposto, si cerca una funzione U di x, y , che unitamente alle sue derivate prime sia ad un valore (*einwerthig*) e continua in F , e che sodisfaccia all'equazione:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \varphi(x, y),$$

mentre lungo il contorno K sia:

$$U = \psi(x, y).$$

Per determinare U in punto o di F , separiamo da F un cerchio di raggio ϱ , il cui centro sia o , e formiamo, mediante una funzione ξ che colle sue prime derivate sia nella restante superficie F' ad un valore e continua, l'equazione:

$$\int \xi \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right] dF' = \int \varphi \xi dF'.$$

Se si indica con ds un elemento arbitrario della linea K , con dp il differenziale della normale a ds diretta verso l'esterno, e finalmente con θ l'angolo che il raggio ϱ uscente da o fa colla direzione delle x crescenti; il primo membro dell'ultima equazione diventerà:

$$= \int \left(\xi \frac{\partial U}{\partial p} - U \frac{\partial \xi}{\partial p} \right) ds - \int \left(\varrho \xi \frac{\partial U}{\partial \varrho} - U \varrho \frac{\partial \xi}{\partial \varrho} \right) d\theta + \int U \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right] dF'.$$

Ciò posto, assoggettiamo ξ alle seguenti condizioni:

A. Lungo la curva K sia dappertutto $\xi = 0$.

B. Per ϱ tendente a zero diventi $\varrho \frac{\partial \xi}{\partial \varrho} = 1$.

C. In F , fuori di o , sia $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0$.

Da B. pel teorema VII. c. della mia *teorica dei potenziali ad un valore* (Giornale di Borchardt, t. 64, pag. 337*) discende che anche $\frac{\xi}{\log \varrho}$ converge verso il limite 1, quando ϱ tende a zero. Per conseguenza, insieme con ϱ si annulla $\varrho \xi = \varrho \log \varrho \cdot \frac{\xi}{\log \varrho}$, e l'ultima espressione annullandosi ϱ , si trasforma in:

$$- \int \psi \frac{\partial \xi}{\partial p} ds + 2\pi U_0.$$

Noi otteniamo adunque:

$$U_0 = \frac{1}{2\pi} \left[\int \psi \frac{\partial \xi}{\partial p} ds + \int \varphi \xi dF \right],$$

quindi la determinazione di U è ridotta a quella di ξ .

II.

L'equazione C. è la condizione affinché $\frac{\partial \xi}{\partial x} dy - \frac{\partial \xi}{\partial y} dx$ sia il differenziale totale di una funzione di x, y . Indicando questa funzione con η , si ottiene

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad - \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

*) Dieser Band S. 200.

quindi

$$\omega = \xi + i\eta$$

è una funzione di $s = x + iy$, e ξ ne è la parte reale. Questa funzione, per le A e B e per le già poste condizioni, ha le seguenti proprietà:

1. Lungo la curva K , la funzione ω è imaginaria senza parte reale, mod. $e^w = 1$.
2. Fuori di o , $\frac{d\omega}{ds}$ epperò anche ω , ξ , η sono monodrome (*einädrig*) e continue.
3. Se si considerano ξ ed η come funzioni delle coordinate polari ϱ , θ , aventi origine in o , quando θ cresce per una rotazione dell'asse delle x verso l'asse delle y , è:

$$\varrho \frac{\partial \xi}{\partial \varrho} = \frac{\partial \eta}{\partial \theta}, \quad \varrho \frac{\partial \eta}{\partial \varrho} = -\frac{\partial \xi}{\partial \theta}.$$

Da ciò segue subito per $\varrho = 0$, $\frac{\partial \eta}{\partial \theta} = 1$. Se quindi il punto (x, y) gira nella direzione positiva intorno al punto o , per ciascun giro η cresce di 2π , ed ω di $2\pi i$, perchè ξ è ad un valore. Per lo stesso motivo nel piano (ϱ, θ) , lungo la linea $\varrho = 0$, è $\frac{\partial \xi}{\partial \theta} = 0^*$; quindi per $\varrho = 0$ si ha $\varrho \frac{\partial \eta}{\partial \varrho} = 0$, $\frac{\eta}{\log \varrho} = 0$. Ne risulta che nel punto o la funzione $\omega = \log(s - s_0)$ è monodroma, ed insieme anche continua, perchè il quoziente

$$\frac{\omega - \log(s - s_0)}{\log(s - s_0)} = \frac{\xi}{\log \varrho + i\theta} = 1 + i \frac{\eta}{\log \varrho + i\theta},$$

si annulla con ϱ , ciò che sarebbe impossibile se la funzione $\omega = \log(s - s_0)$, monodroma in o , ivi fosse discontinua.

Quindi e^w è dappertutto in F ad un valore e continua, e fuori di o , dove diventa infinitamente piccola del primo ordine, è inoltre diversa da zero. Se si indica con w questa funzione, si ha il seguente risultato:

Sia w una funzione di s ad un valore e continua in F , tale che il suo modulo nel contorno K di questa superficie

*) Per provare questa proposizione, basta mostrare che la funzione $U' = \xi - \log \varrho$, che è ad un valore in F , è in o anche continua, poichè allora essa sarà costante lungo la summenzionata linea $\varrho = 0$ (asse delle θ). Se nell'art. I si assume U' in luogo di U , sarà $\varphi = 0$ all'infuori di o . Inoltre, per la rappresentazione di U' in un punto qualsivoglia m diverso da o , non occorre che il punto o sia escluso da F , perchè per $\varrho = 0$ risulta $\varrho \frac{\partial U'}{\partial \varrho} = 0$, $\varrho U' = 0$. Conseguentemente U' è rappresentata da un integrale esteso soltanto lungo K , epperò è una funzione a un valore e continua in ogni punto di F , ed in particolare nel punto o .

abbia il valore 1; nel punto o essa divenga infinitamente piccola del primo ordine ed in tutti gli altri punti della superficie F rimanga invece diversa da zero. Allora la parte reale di $\log w$ soddisfa a tutte le condizioni poste per ξ , e si può porre:

$$\xi = \log \text{mod } w.$$

Se w' è una seconda funzione di z che soddisfaccia a tutte le condizioni poste per w , $\frac{w'}{w}$ sarà in F ad un valore, nè nulla nè infinita; ed il suo modulo sarà in K eguale ad 1. Quindi ogni ramo della funzione $\log \frac{w'}{w}$ è in F monodromo e continuo, ed in K puramente immaginario. La sua parte reale è perciò nel contorno di F eguale a zero, nell'interno nè polidroma (*mehrdrig*) nè discontinua, e quindi dappertutto in F eguale a zero. Per conseguenza $\log \frac{w'}{w}$ è costante e puramente immaginario, $= \gamma i$. Da ciò si ricava $w' = e^{\gamma i} w$, cioè w per le antecedenti condizioni è determinata fino ad un fattore costante di modulo 1, e quindi ξ è determinata completamente.

III.

Se ora si scompone la funzione w nelle sue parti reali:

$$w = u + iv,$$

siccome lungo K è $\text{mod } w = 1$ e nel punto o di F si ha $w = 0$, così ne emerge che i piani della z e della w si devono corrispondere in modo, che alla data area F esistente nel primo piano corrisponda nell'altro piano il cerchio $u^2 + v^2 < 1$, al punto o il centro di quest'ultimo, ed al contorno K di F il contorno del cerchio. La determinazione di w coincide quindi colla soluzione della questione: rappresentare l'area data F sul piano della w , trasformandola in un cerchio di raggio 1, in modo che nel centro di quest'ultimo riesca rappresentato un punto o scelto ad arbitrio in F .

Dalla conclusione del precedente articolo risulta che questo problema è pienamente determinato, in quanto che due rappresentazioni circolari di F , l'una delle quali si ottiene dall'altra facendola rotare di un angolo γ , non possono essere considerate come essenzialmente diverse.

Questo risultato ed in pari tempi il dimostrare che il presente problema ammette una soluzione per ciascuna forma di F , sono com-

presi come caso particolare nella proposizione generale sopra le superficie semplicemente connesse, che Riemann ha sviluppata nella sua dissertazione inaugurale, p. 30.*)

IV.

Per le ricerche ulteriori, conviene sostituire al problema dell'articolo antecedente un altro che dipenda da condizioni più facili ad essere soddisfatte.

Poichè $\text{mod}(s - s_0)$ non è altro che la distanza rettilinea dei due punti s e s_0 , così il luogo di tutti i punti s , i quali soddisfanno alla condizione $\text{mod}(s - s_0) = \text{mod}(s - s_1)$, è la retta perpendicolare nel punto di mezzo a quella che congiunge i punti s_0 e s_1 . Quindi se si assume per s_1 l'espressione $s_0' = x_0 - iy_0$ coniugata di $s_0 = x_0 + iy_0$, ne segue per y_0 positivo che la funzione:

$$\frac{s - s_0}{s - s_0'}$$

nella metà $y > 0$ del piano, diventa infinitamente piccola nel solo punto o e propriamente del primo ordine; nel resto rimane continua e nel contorno di questa superficie raggiunge il modulo 1. Per questa superficie è quindi conosciuta anche ξ .

Se ora si è in grado di rappresentare il piano della $Z = X + iY$ sul piano della s , in modo che al mezzo piano $Y > 0$, che in seguito si indicherà con E , ed al suo contorno (chiuso all'infinito) $Y = +0$ corrisponda nel piano della s un'area F col proprio contorno dato K , ed a ciascun punto dell'una superficie corrisponda un punto unico dell'altra; e se in questa supposizione Z_0 è il valore di Z nel punto o di F , e Z_0' il suo coniugato, allora ciascun punto del piano s corrispondente a Z_0' giace fuori di F , perchè Z_0' è situato fuori di E . Inoltre Z è soltanto nel punto o di F eguale a Z_0 , perchè a ciascun punto Z_0 di E corrisponde un punto unico o di F . Assumendo quindi:

$$(a) \quad w = \frac{Z - Z_0}{Z - Z_0'},$$

w diventerà nel punto o di F infinitamente piccola del primo ordine e nel resto di F si conserverà ad un valore, continua e diversa da zero, ed acquisterà nel contorno K di F , il quale corrisponde al contorno di E , il modulo 1. Quindi per la superficie F è:

$$(b) \quad \xi = \log \text{mod} \frac{Z - Z_0}{Z - Z_0'}.$$

*) *Annali di Matematica*, t. 2 (I^a serie).

Essendo ds , dX gli elementi corrispondenti dei contorni di F ed E , così pure dp , dY i corrispondenti elementi delle loro normali, si avrà:

$$\frac{\partial \xi}{\partial p} = - \frac{\partial \xi}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial p},$$

perchè a cagione della somiglianza delle parti infinitamente piccole, alla direzione di dp corrisponde la direzione delle Y decrescenti. Qui $\frac{\partial Y}{\partial p}$, come rapporto di elementi lineari corrispondenti, è eguale a mod $\frac{\partial Z}{\partial s} = \frac{\partial X}{\partial s}$, dunque $\frac{\partial Y}{\partial p} ds = dX$. Allora $\frac{\partial \xi}{\partial Y}$ è la parte reale di $\frac{\partial \log w}{\partial Y}$ per $Y=0$. Quindi per l'elemento ds di K corrispondente al dX , si ottiene:

$$(c) \quad \frac{\partial \xi}{\partial p} ds = \frac{2 Y_0 dX}{(X - X_0)^2 + Y_0^2},$$

ed ecco allora stabilite tutte le espressioni richieste nell'art. 1, tosto che la superficie E sia rappresentata semplicemente sopra F .

V.

Poligoni ad un solo strato.

Sia F un poligono ad un solo strato, composto di un sol pezzo cogli n vertici $s_1, s_2, \dots s_n$, che si succedono in un giro positivo intorno ad F nell'ordine dei loro indici. L'angolo interno nel vertice s_i sia indicato con λ_i , in modo che sarà:

$$(1) \quad \sum (\pi - \lambda_i) = 2\pi.$$

Noi ci proponiamo la questione di rappresentare semplicemente la superficie E su questo poligono.

Siano $a_1, a_2, \dots a_n$ i punti dell'asse delle X corrispondenti ai vertici $s_1, s_2, \dots s_n$ del poligono. Questi punti si seguiranno l'un l'altro nella direzione delle X crescenti, nello stesso ordine dei loro indici, e quindi fra due di essi il passaggio si dovrà fare pel punto infinitamente lontano dell'asse. Noi supporremo che questi sieno i punti a_n, a_1 , onde fra le quantità reali a avrà luogo la successione:

$$a_1 < a_2 < a_3 \dots < a_n.$$

Il punto giacente sul contorno del poligono fra s_n e s_1 , che corrisponde al punto infinitamente lontano dell'asse delle X , verrà indicato con s' .

Ciò posto, si tratta di stabilire una tale dipendenza fra le quantità s e Z che: 1) ad un giro positivo intorno all'una delle due superficie F, E corrisponda un giro positivo intorno all'altra; 2) che i

punti s , Z durante il giro passino contemporaneamente per i punti s_1 , a_1 ; 3) che s percorra una linea retta ogni qual volta Z descrive uno dei segmenti $a_{i-1}a_i$; finalmente 4) che nella rappresentazione di E su F , nell'interno delle due superficie esista perfetta eguaglianza di angoli, cioè ne sia esclusa qualunque diramazione (*Versweigung*).

Mentre s e Z percorrono i corrispondenti segmenti rettilinei $s_{i-1}s_i$, $a_{i-1}a_i$ in direzione positiva, rimane inalterata la parte imaginaria di $\log \frac{\partial s}{\partial Z}$ dipendente soltanto da queste direzioni. Nello stesso momento però in cui s piega intorno al vertice s_i , e quindi Z nel suo giro positivo intorno ad E oltrepassa il punto a_i , ds ruota dell'angolo $\pi - \lambda_i$ in direzione positiva, mentre dZ conserva la sua direzione. Quindi in un mezzo giro negativo intorno ad a_i , $\log \frac{\partial s}{\partial Z}$ cresce di $(\pi - \lambda_i)i$, cioè in un intero giro positivo cresce di

$\frac{\lambda_i - \pi}{\pi} \cdot 2\pi i$; epperò $(Z - a_i)^{\frac{\pi - \lambda_i}{\pi}} \cdot \frac{\partial s}{\partial Z}$ è in a_i monodroma, nè nulla nè infinita. Di qui segue che il prodotto

$$(Z - a_1)^{\frac{\pi - \lambda_1}{\pi}} \cdot (Z - a_2)^{\frac{\pi - \lambda_2}{\pi}} \cdots (Z - a_n)^{\frac{\pi - \lambda_n}{\pi}} \cdot \frac{\partial s}{\partial Z} = \chi$$

lungo l'asse delle X non ha punti di diramazione (*Versweigungspunkte*), nè di valor zero, nè di discontinuità, perchè altrimenti K avrebbe od altri vertici o vertici d'altra natura. Inoltre $\frac{\partial s}{\partial Z}$, (e quindi per la relazione (1) anche χ) dev'essere in tutta la superficie E monodroma, continua e diversa da zero; perchè altrimenti la sua rappresentazione od avrebbe diramazioni e quindi non sarebbe ad un solo strato, oppure si estenderebbe all'infinito.

La funzione χ adunque non è mai in E polidroma o discontinua, e deve inoltre essere tale che in ciascun segmento $a_{i-1}a_i$ dell'asse delle X il rapporto $\frac{ds}{\text{mod } ds}$ sia costante, perchè questi segmenti devono essere rappresentati linearmente. Siccome per $Y = 0$ è $dZ = dX$, per la realtà delle quantità a_i , il precedente prodotto sta in rapporto costante col suo modulo; perciò

$$\frac{\chi}{\text{mod } \chi}$$

deve essere costante in ciascun segmento $a_{i-1}a_i$, quindi per la sua continuità avrà lo stesso valore costante in tutto l'asse delle X . Indicando questo valore con c , si ha per $Y = 0$:

$$\log \chi = \log \text{mod } \chi + \log c;$$

adunque nell'asse delle X la parte imaginaria di $\log \chi$ è costante; ed essendo χ in E monodroma, continua e diversa da zero, ciò non è altrimenti possibile se non quando $\log \chi$, e quindi anche χ , ha dappertutto lo stesso valor costante. Designando con A questo valore, si ha:

$$(1') \quad ds = A (Z - a_1)^{\frac{\lambda_1}{\pi} - 1} \cdot (Z - a_2)^{\frac{\lambda_2}{\pi} - 1} \cdots (Z - a_n)^{\frac{\lambda_n}{\pi} - 1} \cdot dZ,$$

dove ora il rapporto della costante A al suo modulo deve essere scelto in modo, che $\frac{ds}{\text{mod } ds}$ ottenga nel punto s' il valore che corrisponde alla data direzione da s_n a s_1 .

Se α è l'angolo di questa direzione con quella delle x crescenti e c una costante positiva, si otterrà:

$$(2) \quad ds = ce^{\alpha i} (a_1 - Z)^{\frac{\lambda_1}{\pi} - 1} \cdot (a_2 - Z)^{\frac{\lambda_2}{\pi} - 1} \cdots (a_n - Z)^{\frac{\lambda_n}{\pi} - 1} \cdot dZ,$$

supposto che la variabile venga limitata alla superficie E , e ciascun fattore

$$(a_i - Z)^{\frac{\lambda_i}{\pi} - 1},$$

venga definito colla condizione di rimanere positivo nell'asse delle X finchè sia $X < a_i$. Ponendo con queste limitazioni:

$$(3) \quad ce^{\alpha i} (a_1 - Z)^{\frac{\lambda_1}{\pi} - 1} \cdot (a_2 - Z)^{\frac{\lambda_2}{\pi} - 1} \cdots (a_n - Z)^{\frac{\lambda_n}{\pi} - 1} = z,$$

si ottiene mediante l'equazione:

$$(4) \quad s - s' = \int_{-\infty}^z z dZ,$$

la richiesta rappresentazione di E sopra F .

Indicando il lato del poligono fra i vertici s_i, s_{i+1} con L_i^{*+1} , si ha

$$(5) \quad L_1^* = \int_{a_1}^{a_2} \text{mod } z dX, \quad L_2^* = \int_{a_2}^{a_3} \text{mod } z dX, \dots, \quad L_{n-1}^* = \int_{a_{n-1}}^{a_n} \text{mod } z dX$$

$$L_n^* = \int_{a_n}^{\infty} \text{mod } z dX + \int_{-\infty}^{a_1} \text{mod } z dX,$$

se dappertutto in $\text{mod } z$ vien posto $Y = 0$.

Siccome z in E non presenta nè diramazioni nè discontinuità,

così $\int z dZ$ preso lungo l'intero contorno di E è nullo, cioè avuto riguardo alla (1):

$$\int_{-\infty}^{\infty} z dX = 0,$$

ove si integri lungo la linea $Y = +0$. Di qui si hanno due equazioni fra i lati L e gli angoli λ , che non sono altro che le condizioni conosciute perchè il poligono K sia chiuso.

VI.

Per gli antecedenti risultati è risoluto il problema dell'art. IV per ciascun poligono F , di rappresentare cioè semplicemente E su F in modo che a ciascun punto dell'una superficie corrisponda un punto unico dell'altra.

Siccome per ogni posizione del punto Z in E è dato il corrispondente punto z di F , così si può in particolare per l'espressione:

$$w = \frac{Z - Z_0}{Z - Z'_0},$$

dell'art. IV, sempre assegnare il punto z_0 di F corrispondente a Z_0 , per il quale l'ultima formula dell'art. I offra il valore cercato di U . In questo senso adunque (e la più parte delle soluzioni di tali questioni non vanno più oltre) la questione di determinare U si può considerare come risolta per tutti i poligoni F .

Affatto diversamente si presenta la questione quando non si voglia contentarsi di ciò, ma invece si domandi che la quantità Z_0 , che occorre per la formazione di w , venga determinata per ciascuna qualsivoglia posizione del punto o di F .

Infatti questa domanda non altro significa se non che, mediante la inversione dell'equazione (4), Z sia presentata come funzione di z .

Un esame più diligente mostra che sono solamente quattro i poligoni F per i quali questa quistione può essere posta senza ulteriori modificazioni, vale a dire il rettangolo, il triangolo equilatero, e due triangoli rettangoli, l'isoscele cioè e quello i cui angoli all'ipotenusa sono di 30° e 60° .

In tutti gli altri casi o deve essere limitata la variabilità di z e Z nelle superficie F ed E , onde non si ottiene alcuna semplificazione, mentre va perduta l'importanza analitica del problema; oppure, ove si richieda la inversione con variabili illimitate, il problema della rappresentazione dev'essere posto altrimenti.

Ed invero, se in F i rapporti angolari sono tutti razionali, e

quindi z è una funzione algebrica di Z , si può facilmente per questa funzione determinare la superficie T rappresentante il suo modo di diramazione (*Verscheidungsart*), e l'ordine $2p + 1$ della sua connessione (*Zusammenhang*), ed allora per conseguire l'inversione dell'equazione $ds = z dZ$, devonsi aggiungere a questa, come è noto, ancora $p - 1$ altre equazioni $dz_\sigma = z_\sigma dZ_\sigma$, dove tutte le z_σ sono funzioni algebriche diramate come T , e tutte le z_σ sono integrali di prima specie non aventi tra loro relazioni lineari, alla quale ultima condizione in virtù dell'equazione (1) dell'art. precedente soddisfa anche z .

In termini più semplici, ciò significa doversi in questo caso rappresentare simultaneamente E su p superficie, una delle quali è la stessa F , e le altre dipendono da F . Il caso di $p = 1$ mostra già che da questo punto di vista il problema primitivo si decompone in infiniti gruppi di casi particolari.

Del resto, da queste considerazioni risulta che i risultati dell'articolo precedente insegnano in ciascun caso a conoscere la classe di funzioni alla quale appartengono w e ξ , anche quando l'espressione di U sia stata trovata per altra via.

VII.

Ormai non rimane che a render possibile, collo svolgimento di un esempio trattato anche con altri metodi, il confronto fra questi ed il processo qui esposto. Noi scegliamo per brevità il più semplice di tutti, cioè il caso che la superficie F sia un rettangolo. Assumendo nell'art. I, la funzione arbitraria $\varphi = 0$, si può assai facilmente determinare per questa superficie la U col metodo dato da Fourier (cfr. Lamé *Leçons sur les fonctions inverses des transcendentes*, XIV), ma il principale risultato della ricerca, cioè la determinazione della specie di funzioni dalla quale dipende la soluzione, non si potrebbe riconoscere per questa via che a stento, sebbene la posteriore verifica del medesimo non offra alcuna difficoltà.

Siano a e b i lati del rettangolo F , posti rispettivamente sugli assi delle x , y positive. Noi possiamo allora porre:

$$z_1 = a, \quad z_2 = a + bi, \quad z_3 = bi, \quad z_4 = 0,$$

ed otteniamo:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = 0,$$

quindi:

$$z = C : \sqrt{(a_1 - Z)(a_2 - Z)(a_3 - Z)(a_4 - Z)},$$

dove la radice è definita come dianzi.

La superficie T è a due strati (*zweiblättrig*), coi punti di diramazione $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ situati sull'asse delle X . Assumendo, ciò che è lecito, per limiti ai quali si estendono i due strati di T gli orli delle rette congiungenti a_1 con a_2 , ed a_3 con a_4 , fra questi limiti gli strati saranno connessi, ed E sarà la metà positiva (corrispondente ad $Y > 0$) del primo strato.

Per questa connessione di T e per le condizioni imposte all'espressione z , questa ottiene 1) valori contrari in due punti di T situati l'un sopra l'altro, ed invece 2) valori coniugati in due punti coniugati dello stesso strato.

Facendo inoltre nella solita maniera, a partire da un punto in E , un taglio trasversale (*Querschnitt*) intorno ad $a_1 a_2$, e l'altro intorno ad $a_3 a_4$, ne viene che Z per l'equazione $ds = z dZ$ è determinata come una funzione di s ad un solo valore, avente i due periodi $2a$, $2bi$, i cui valori emergono anche da ciò che segue.

Trasportando in a_2 il punto d'incontro dei due tagli trasversali, e riducendo quest'ultimi a linee rette, la connessione del primo strato col secondo tra a_1 e a_2 , ed in ciascuno strato la connessione della metà positiva colla metà negativa fra a_2 ed a_3 , sarà tolta. La rappresentazione della superficie T' così modificata, sul piano s , diviene un rettangolo Π , i cui lati $2a$, $2b$ sono paralleli agli assi delle x , y , e le cui diagonali s'incontrano nell'origine $s_4 = 0$, e del quale adunque F è quella quarta parte che cade nel quadrante positivo.

Per dimostrarlo, si tiri anzitutto in ciascuno strato da a_4 al corrispondente punto Z una linea, in modo che le due linee così ottenute

si coprano; allora la somma degli integrali $\int_{a_1}^Z z dZ$, presi lungo queste due linee, sarà nulla, quindi a due punti di T' giacenti l'uno sull'altro corrisponderanno due valori contrari di s , cioè due punti del piano s la cui congiungente passa per l'origine $s_4 = 0$ ed è ivi divisa per metà.

Tirando inoltre da a_4 sullo stesso strato di T' due linee simmetriche rispetto all'asse delle X , cioè congiungenti soltanto punti coniugati e terminate in siffatti punti, si otterranno mediante l'integrazione valori coniugati di s anche nei punti estremi. Due punti coniugati dello stesso strato di T' vengono dunque rappresentati nel piano s in due punti coniugati, cioè situati simmetricamente rispetto all'asse delle x .

Da ciò risulta subito che Π è la rappresentazione di T' . Se i rettangoli nei quali vien diviso Π dagli assi coordinati nell'ordine con

cui si succedono in un giro positivo intorno all'origine, si denotano con F, F_1, F_2, F_3 , possiamo concludere, siccome per le condizioni del problema E è di già rappresentato su F , che la parte positiva del secondo strato coperta da E sarà rappresentata su F_2 , la metà negativa del primo strato su F_3 , e quella del secondo su F_1 . Contemporaneamente è dimostrato che $2a, 2bi$ sono i moduli di periodicità di s .

Questi risultati sono sufficienti per esprimere la funzione:

$$w = e^{\gamma t} \frac{Z - Z_0}{Z - Z_0'}$$

mediante s . In fatti se s_0 è quel punto di F che corrisponde al punto Z_0 di E , allora $Z - Z_0$ diventa in Π nei due punti $s_0, -s_0$ infinitamente piccola del primo ordine, ma fuori di questi diversa da zero. Se s_0' è coniugato a s_0 , $Z - Z_0'$ non è mai in Π eguale a zero, fuorchè nei punti $s_0', -s_0'$, nei quali è infinitamente piccola del primo ordine. Quindi w è una funzione di s ad un valore, coi periodi $2a, 2bi$, la quale nel rettangolo Π dei periodi è infinitamente piccola solamente per $s = (s_0, -s_0)$, infinitamente grande solamente per $s = (s_0', -s_0')$, e sempre del primo ordine; e per $Z = \infty$ si riduce a $e^{\gamma t}$. Di qui segue che mediante la funzione di Jacobi:

$$\theta_1(x) = 2q^{\frac{1}{4}} \operatorname{sen} x - 2q^{\frac{9}{4}} \operatorname{sen} 3x + 2q^{\frac{25}{4}} \operatorname{sen} 5x \dots$$

la w si può esprimere nella forma:

$$w = C \frac{\theta_1\left(\frac{\pi(s-s_0)}{2bi}\right) \cdot \theta_1\left(\frac{\pi(s+s_0)}{2bi}\right)}{\theta_1\left(\frac{\pi(s-s_0')}{2bi}\right) \cdot \theta_1\left(\frac{\pi(s+s_0')}{2bi}\right)}, \quad q = e^{-\frac{\pi a}{b}},$$

dove C è una costante.

Se s' è il punto fra s_1 e s_1 , che corrisponde al punto di E infinitamente lontano, si ha:

$$e^{\gamma t} = C \frac{\theta_1\left(\frac{\pi(s'-s_0)}{2bi}\right) \cdot \theta_1\left(\frac{\pi(s'+s_0)}{2bi}\right)}{\theta_1\left(\frac{\pi(s'-s_0')}{2bi}\right) \cdot \theta_1\left(\frac{\pi(s'+s_0')}{2bi}\right)}.$$

Siccome s' è reale, nel fattore di C il denominatore è coniugato al numeratore, onde il modulo di questo fattore sarà $= 1$. Quindi, se la quantità $e^{\gamma t}$, soggetta soltanto a quest'ultima condizione, si assume eguale al fattore di C , riescirà $C = 1$, epperò:

$$w = \frac{\theta_1\left(\frac{\pi(z-z_0)}{2bi}\right) \cdot \theta_1\left(\frac{\pi(z+z_0')}{2bi}\right)}{\theta_1\left(\frac{\pi(z-z_0')}{2bi}\right) \cdot \theta_1\left(\frac{\pi(z+z_0)}{2bi}\right)}, \quad q = e^{-\frac{\pi a}{b}}.$$

Moltiplicando quest'espressione di w , coll'espressione che ne risulta per il valore coniugato w' , si otterrà il quadrato del mod w , e quindi per la determinazione di U nel punto z_0 di F :

$$e^{2\xi} = ww', \quad \xi = \frac{1}{2} \log ww'.$$

Decomponendo w in $u + iv$ si risolve inoltre il problema di rappresentare il rettangolo F sul cerchio $u^2 + v^2 < 1$, in modo che il centro del cerchio corrisponda al punto z_0 di F , da scegliersi arbitrariamente.

I tre altri problemi accennati nell'art. VI, per i quali soltanto è ancora possibile la rappresentazione di w per mezzo di z , si possono del pari risolvere facilmente coi mezzi qui adoperati.

Zurigo, 25 marzo 1867.

XIII.

Ueber einige allgemeine Eigenschaften der Minimumsflächen.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 67, 1867, S. 218—228.)

Die sogenannten Minimumsflächen besitzen eine merkwürdige Eigenschaft, welche ich bei Gelegenheit meiner Abhandlung über die Bestimmung krummer Oberflächen durch locale Messungen auf denselben (dieses Journal Band 64*) Herrn Weierstrass mitgetheilt habe. Dieselbe besteht in Folgendem.

1. Seien S und S' zwei Minimumsflächen, d. h. solche, für welche die Summe der beiden Hauptkrümmungen in jedem Punkte $= 0$ ist. Nachdem jede von diesen Flächen in eine beliebige Lage gebracht worden ist, wähle man auf ihnen Flächenstücke T, T' so aus, dass
1) auf keinem von beiden dieselbe Normalenrichtung zweimal, dagegen
2) jede auf dem einen stattfindende Normalenrichtung auch auf dem andern vorkommt.

Betrachtet man unter diesen Voraussetzungen einen Punkt m' von T' als Bild desjenigen Punktes m von T , für welchen die gleiche Normalenrichtung stattfindet, so wird T' ein in den kleinsten Theilen ähnliches Bild von T .

Bei diesem Satze ist der Fall nicht ausgeschlossen, dass die Flächen S, S' sich nur durch ihre Lage im Raume von einander unterscheiden. Durch blosse Drehung einer Minimumsfläche kann man also beliebig viele Abbildungen derselben auf sich selbst erhalten.

2. Der obige Satz bleibt bestehen, wenn eine der Flächen S, S' durch eine Kugel ersetzt wird.

Aus diesem zweiten Satze folgt der erste durch Wiederholung. Da ausserdem alle Abbildungen einer Kugelfläche auf einer Ebene bekannt sind, so sind es auch alle Abbildungen einer Minimumsfläche, wie zuerst von Herrn Weingarten gefunden worden ist.¹⁾

1) Vergl. die reichhaltige Abhandlung: Ueber die Oberflächen, für welche einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser eine Function des andern ist. Dieses Journal Band 62, p. 164, 165.

*) Im vorliegenden Band S. 162.

Ich habe mich veranlasst gesehen, diesen Gegenstand weiter zu verfolgen, und namentlich zu untersuchen, welche Flächen T überhaupt die Eigenschaft haben, dass sich ihnen eine zweite T' zuordnen lässt, welche, ohne zu T homothetisch zu sein, ein in den kleinsten Theilen ähnliches Bild von T liefert, wenn sie nach obigem Princip auf T bezogen wird. Von dieser Untersuchung sind selbstverständlich alle diejenigen Flächen T ausgeschlossen, auf denen jede überhaupt vorhandene Normalenrichtung eine Linie bestimmt, also die auf eine Ebene abwickelbaren Flächen.

Es hat sich herausgestellt, dass die verlangte Eigenschaft eine Flächenfamilie begründet, welche sich auch als das System derjenigen Flächen definiren lässt, die ein ebenes Bild gestatten, in welchem ihre Krümmungslinien durch zwei Schaaren zu einander senkrechter Geraden dargestellt werden. Es besitzt hiernach jede Fläche, an welcher die zuerst erwähnte Eigenschaft nachgewiesen ist, auch die zweite, und umgekehrt.

Diese Flächenfamilie ist sehr umfassend; mittelst der Formel B. des art. V., welche das Kriterium derselben enthält, findet man leicht, dass zu ihr nicht bloss die Minimumsflächen im gewöhnlichen Sinne, sondern allgemein diejenigen gehören, deren mittlere Krümmung constant ist, also die Minimumsflächen über gegebenem Volumen; ausserdem gehören hierhin alle Flächen zweiten Grades, alle Rotationsflächen, u. s. w.

In dieser Familie entspricht jeder Fläche T eine andere T' , und im Allgemeinen auch nur eine nebst ihren homothetischen, welche durch T ihrer Gestalt und Lage nach bestimmt ist, wenn von Translationen ohne Drehungen abgesehen wird, die an der Abbildung nichts ändern. Die einzige Ausnahme hiervon bildet die Kugel, für welche die Aufgabe, T' zu finden, unbestimmt ist, weil sie selbst jeder beliebigen Minimumsfläche entspricht.

Da die einfachen Hilfsmittel, welche ich bei dieser Untersuchung benutzt habe, sich auch bei anderen Gelegenheiten als brauchbar erweisen, so erlaube ich mir, im Folgenden zu zeigen, wie sich im Anschlusse an einen directen Beweis der obigen Sätze über Minimumsflächen die übrigen Resultate ergeben haben. Jene Sätze selbst habe ich ursprünglich aus dem art. IV. meiner oben erwähnten Arbeit erhalten.

I.

Wir beginnen unsere Untersuchung mit der Aufstellung der geometrischen Bedingungen, welche erforderlich sind, damit zwei Flächen T, T' einander ähnlich werden, wenn jedem Punkte m von T sein Bild

m' auf T' durch die Bedingung gleicher Normalenrichtung zugeordnet wird, in welchem Falle m und m' entsprechende Punkte heissen sollen.

Zu dem Zwecke bestimme man nach Gauss (Disqu. gen. circa superf. c. I.) eine Richtung im Raume mit Hilfe einer Kugel K vom Halbmesser 1 durch den Punkt, in welchem ein gleichgerichteter Halbmesser auf der Kugelfläche endigt. Sind also N, N' die Normalen der Flächen T, T' in den Punkten m, m' , so werden diese Punkte einander entsprechen, sobald beide Normalen dem nämlichen Punkte $\mathfrak{N}$ von K entsprechen. Damit ferner zwei von entsprechenden Punkten m, m' ausgehende Linienelemente $\partial s, \partial s'$ der Flächen T, T' in entsprechenden Punkten endigen, müssen auch in ihren Endpunkten die Normalen dem nämlichen Punkte $\mathfrak{P}$ von K entsprechen. Der unendlich kleine sphärische Bogen $\mathfrak{N}\mathfrak{P} = \angle$ giebt dann den Winkel an, um den sich die Normale N dreht, wenn ihr Fusspunkt von m aus ∂s beschreibt.

Wir haben nun zu untersuchen, welche Bedingungen erforderlich sind, damit das Verhältniss der entsprechenden Linienelemente $\partial s, \partial s'$ von der Lage des ihre Endpunkte bestimmenden Punktes $\mathfrak{P}$ unabhängig wird.

Seien $\partial N_1, \partial N_2$ in m beginnende Bogenelemente der beiden Krümmungslinien von T , ϱ_1, ϱ_2 die ihnen entsprechenden Krümmungshalbmesser der Fläche. Ferner sei δ_2 der Winkel, um den sich ϱ_1 dreht, wenn sein Fusspunkt ∂N_1 durchläuft, ebenso δ_1 der Winkel, um den sich ϱ_2 dreht, wenn sein Fusspunkt ∂N_2 durchläuft, also abgesehen vom Zeichen $\partial N_1 = \varrho_1 \delta_2$, $\partial N_2 = \varrho_2 \delta_1$ und $\partial s^2 = \varrho_1^2 \delta_2^2 + \varrho_2^2 \delta_1^2$. Haben $\varrho'_1, \varrho'_2, \delta'_1, \delta'_2$ dieselbe Bedeutung für die Fläche T' im Punkte m' , so wird $\partial s'^2 = \varrho_1'^2 \delta_2'^2 + \varrho_2'^2 \delta_1'^2$ und mithin das zu untersuchende Verhältniss

$$\left(\frac{\partial s'}{\partial s}\right)^2 = \frac{\varrho_1'^2 \delta_2'^2 + \varrho_2'^2 \delta_1'^2}{\varrho_1^2 \delta_2^2 + \varrho_2^2 \delta_1^2}.$$

Daraus ergeben sich die Sätze über die Minimumsflächen sofort. Nimmt man nämlich $\varrho_1'^2 = \varrho_2'^2$, $\varrho_1^2 = \varrho_2^2$, d. h. für T und T' Minimums- oder Kugelflächen, so heben die Drehungswinkel sich weg, indem aus der Betrachtung der Kugel K $\angle^2 = \delta_1^2 + \delta_2^2 = \delta_1'^2 + \delta_2'^2$ folgt.

Ist nun, um zur allgemeinen Untersuchung überzugehen, o das Centrum der Kugel K und sind $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}'_1, \mathfrak{N}'_2$ diejenigen Punkte des durch $\mathfrak{N}$ als Pol bestimmten Aequators, welche den Richtungen $\partial N_1, \partial N_2, \partial N'_1, \partial N'_2$ der Krümmungslinien von T und T' entsprechen, so folgt, weil der Punkt $\mathfrak{P}$ von K sowohl dem Endpunkte von ∂s , als auch dem von $\partial s'$ entspricht, dass der Uebergang von $\mathfrak{N}$ nach $\mathfrak{P}$ auf folgende zwei Arten bewirkt werden kann:

1. indem man zwei unendlich kleine Drehungen um die Axen $o\mathfrak{N}_1$, $o\mathfrak{N}_2$ zusammensetzt, von denen die erste den Winkel δ_1 , die andere den Winkel δ_2 beträgt;

2. indem man zwei die Winkel δ'_1 , δ'_2 betragende Drehungen um die Axen $o\mathfrak{N}'_1$, $o\mathfrak{N}'_2$ zusammensetzt.

Dies festgestellt, zählen wir auf dem Aequator von $\mathfrak{N}_1$ aus Längen, die nach $\mathfrak{N}_2$ hin wachsen, und setzen fest, was offenbar gestattet ist, dass von den Punkten $\mathfrak{N}'_1$, $\mathfrak{N}'_2$ der zweite die grössere Länge hat. Ist alsdann α die Länge von $\mathfrak{N}'_1$, λ die Länge des Meridians $\mathfrak{N}\mathfrak{P}$, so wird, weil alle Bogen δ unendlich klein sind, $\delta_1 = \mathcal{A} \sin \lambda$, $\delta_2 = \mathcal{A} \cos \lambda$, $\delta'_1 = \mathcal{A} \sin(\lambda - \alpha)$, $\delta'_2 = \mathcal{A} \cos(\lambda - \alpha)$, mithin

$$\left(\frac{\partial s'}{\partial s}\right)^2 = \frac{\varrho_1'^2 \cos^2(\lambda - \alpha) + \varrho_2'^2 \sin^2(\lambda - \alpha)}{\varrho_1^2 \cos^2 \lambda + \varrho_2^2 \sin^2 \lambda},$$

sobald ∂s , $\partial s'$ in entsprechenden Punkten anfangen und endigen.

Dieser Ausdruck soll nun von der Lage des Punktes $\mathfrak{P}$, d. h. von λ unabhängig sein. Man erkennt ohne Mühe, dass diese Bedingung für jeden beliebigen Werth von α , d. h. unabhängig von den Richtungen, in denen die Krümmungslinien der Flächen T , T' von m , m' ausgehen, nur dann erfüllt wird, wenn zugleich $\varrho_1'^2 - \varrho_2'^2$, $\varrho_1^2 - \varrho_2^2$ ist, was den bereits oben erledigten Fall liefert.

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so kann das Verhältniss der beiden Linienelemente nur noch in dem Falle von λ unabhängig sein, wenn $\alpha = 0$ oder ein Vielfaches von 90° ist. In allen diesen Fällen wird jedem der beiden von m ausgehenden Krümmungslinienelemente eines der beiden von m' ausgehenden parallel; wir schliessen daher keinen Fall aus, wenn wir

$$\alpha = 0$$

setzen, d. h. fordern, dass $\partial N'_1$ mit ∂N_1 , $\partial N'_2$ mit ∂N_2 gleiche Richtung habe. Dann wird

$$\left(\frac{\partial s'}{\partial s}\right)^2 = \frac{\varrho_1'^2 \cos^2 \lambda + \varrho_2'^2 \sin^2 \lambda}{\varrho_1^2 \cos^2 \lambda + \varrho_2^2 \sin^2 \lambda},$$

und dies wird nur dann von λ unabhängig, wenn $\varrho_1'^2 : \varrho_1^2 = \varrho_2'^2 : \varrho_2^2$, d. h. entweder $\frac{\varrho'_1}{\varrho_1} = \frac{\varrho'_2}{\varrho_2}$, oder $\frac{\varrho'_1}{\varrho_1} = -\frac{\varrho'_2}{\varrho_2}$ wird.

Die zweite von diesen beiden Lösungen liefert den allgemeinen Satz:

Wenn zwei Flächen T und T' in der Beziehung zu einander stehen, dass in je zwei durch gleiche Normalenrichtung einander entsprechenden Punkten m , m' derselben 1) auch die Hauptschnitte beider Flächen einander parallel werden, und 2) zwischen den Verhältnissen der Krümmungen paralleler Hauptschnitte die Relation

$$\frac{\varrho'_1}{\varrho_1} + \frac{\varrho'_2}{\varrho_2} = 0$$

stattfindet, so wird T' ein in den kleinsten Theilen ähnliches Bild von T , wenn jeder Punkt m' als das Bild des entsprechenden Punktes m angesehen wird.

In diesem Satze sind die auf die Minimumsflächen bezüglichen ebenfalls enthalten. Nimmt man nämlich für T' eine Minimumsfläche, so folgt aus der zweiten Bedingung, dass T eine Kugelfläche sein muss, und diese genügt offenbar auch der ersten Bedingung.

Die erste Lösung führt auf ganz elementare Resultate, die hauptsächlich als Vervollständigung des vorigen Satzes aufzufassen sind. In der That fordert dieselbe, wie leicht zu sehen ist, und auch aus den folgenden Untersuchungen hervorgeht, nichts anderes, als dass T und T' homothetisch sind, woraus dann freilich, da die Aehnlichkeit für beliebig grosse perspectivisch liegende Theile vorhanden ist, auch die Aehnlichkeit der kleinsten Theile folgt.

Es ergibt sich aber hieraus, dass ausser den durch den ersten Satz bestimmten Flächenpaaren und ihren homothetischen keine andern existiren, welche die von uns geforderten Eigenschaften besitzen.

II.

Es wirft sich jetzt die Frage auf, wie und unter welchen Voraussetzungen die Bedingungen des obigen Satzes befriedigt werden können.

Zu dem Zwecke bemerken wir zunächst, was aus der zweiten Bedingung folgt, dass in entsprechenden Punkten nothwendig die eine Fläche gewölbt, die andere sattelförmig gebogen sein muss. Um über bestimmte Vorstellungen zu verfügen, wollen wir daher, was auf den schliesslichen Verlauf der Untersuchung keinen Einfluss mehr haben wird, festsetzen, es seien $\varrho_1, \varrho_2, \varrho'_1$ positiv, ϱ'_2 dagegen sei negativ.

Wir bezeichnen nun die rechtwinkligen Coordinaten von m durch x, y, z , durch x', y', z' diejenigen von m' , ausserdem die Richtungs-cosinus der Normale, der ersten und zweiten Krümmungslinie in m , also wegen des geforderten Parallelismus auch in m' durch $a, b, c; a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2$, wobei die Vorzeichen der Grössen a, b, c so gewählt sein sollen, dass die durch sie bestimmte Richtung der Normale derjenigen entgegengesetzt wird, in welcher von der Oberfläche aus die positiven Krümmungshalbmesser aufgetragen werden.

In Folge des Parallelismus der Krümmungslinien werden auch die Drehungswinkel um die zu ihren Tangenten parallelen Axen für beide Flächen gleich, also $\delta'_1 = \delta_1, \delta'_2 = \delta_2$.

Wir bestimmen nun zunächst die Grössen, um welche die Coordinaten von m und m' und die Richtungscosinus der Normale in Folge dieser Drehungen zunehmen.

Dreht man die Normale um eine zur Tangente der zweiten Krümmungslinie parallele und durch das Krümmungscentrum des ersten Hauptschnitts gehende Axe herum, bis der Drehungswinkel δ_2 geworden ist, so durchläuft ihr Fusspunkt auf beiden Flächen die erste Krümmungslinie, und weil ϱ_1, ϱ'_1 positiv sind, beide in derselben Richtung. Die zurückgelegten Wege sind $\partial N_1 = \varrho_1 \delta_2$, $\partial N'_1 = \varrho'_1 \delta_2$, mithin die Zunahmen von x und x' :

$$\partial_1 x = a_1 \varrho_1 \delta_2, \quad \partial_1 x' = a_1 \varrho'_1 \delta_2,$$

vorausgesetzt, dass man den Drehungswinkel δ_2 positiv oder negativ nimmt, jenachdem m sich in der Richtung $a_1 b_1 c_1$, oder ihr entgegen bewegt.

Nach der Lehre von der Krümmung der Flächen ist aber auch $\partial_1 x = \varrho_1 \partial_1 a$, $\partial_1 x' = \varrho'_1 \partial_1 a$, woraus in beiden Fällen

$$\partial_1 a = a_1 \delta_2$$

folgt.

Dreht man die Normale um eine zur Anfangsrichtung der ersten Krümmungslinie parallele und durch das Krümmungscentrum des zweiten Hauptschnittes gehende Axe herum, bis der Drehungswinkel δ_1 geworden ist, so durchläuft ihr Fusspunkt auf beiden Flächen die zweite Krümmungslinie, aber in entgegengesetzten Richtungen. Sind $\partial N_2, \partial N'_2$ die wirklich zurückgelegten Wege, so nimmt x um $a_2 \partial N_2$ zu, x' um $a_2 \partial N'_2$ ab. Nun ist $\partial N_2 = \varrho_2 \delta_1$, $\partial N'_2 = -\varrho'_2 \delta_1$, also wachsen x und x' um

$$\partial_2 x = a_2 \varrho_2 \delta_1, \quad \partial_2 x' = a_2 \varrho'_2 \delta_1,$$

wieder vorausgesetzt, dass δ_1 positiv oder negativ genommen wird, jenachdem m sich in der Richtung $a_2 b_2 c_2$ oder ihr entgegen bewegt.

Da ausserdem $\partial_2 x = \varrho_2 \partial_2 a$, $\partial_2 x' = \varrho'_2 \partial_2 a$ ist, so folgt

$$\partial_2 a = a_2 \delta_1.$$

Daraus ergeben sich für die vollständigen Differentiale die folgenden wichtigen Formeln:

$$\begin{aligned} \partial x &= a_1 \varrho_1 \delta_2 + a_2 \varrho_2 \delta_1, & \partial y &= b_1 \varrho_1 \delta_2 + b_2 \varrho_2 \delta_1, & \partial z &= c_1 \varrho_1 \delta_2 + c_2 \varrho_2 \delta_1, \\ \partial a &= a_1 \delta_2 + a_2 \delta_1, & \partial b &= b_1 \delta_2 + b_2 \delta_1, & \partial c &= c_1 \delta_2 + c_2 \delta_1, \\ \partial x' &= a_1 \varrho'_1 \delta_2 + a_2 \varrho'_2 \delta_1, & \partial y' &= b_1 \varrho'_1 \delta_2 + b_2 \varrho'_2 \delta_1, & \partial z' &= c_1 \varrho'_1 \delta_2 + c_2 \varrho'_2 \delta_1, \end{aligned}$$

von denen die auf die Fläche T allein bezüglichen für jede beliebige

Fläche gelten. Aus den bei ihrer Herleitung unterschiedenen Fällen ergibt sich übrigens, dass diese Formeln von den zu Eingange über die Vorzeichen der Krümmungshalbmesser gemachten Voraussetzungen unabhängig, also auf beide Fälle des vorigen art. anwendbar sind.

III.

Setzt man nun, um die erste Lösung des art. I zu befriedigen, $\varphi'_1 = k\varphi_1$, $\varphi'_2 = k\varphi_2$, so wird $\partial x' = k\partial x$, $\partial y' = k\partial y$, $\partial z' = k\partial z$. Damit diese Gleichungen eine Fläche T' bestimmen können, müssen ihre rechten Seiten vollständige Differentiale sein. Betrachtet man s als Function von x, y , so folgt aus der ersten Gleichung, dass k von y , aus der zweiten, dass es von x unabhängig, also constant sein muss. Diese Lösung liefert also, wie schon früher angewandt worden ist, zu jeder beliebigen Fläche ihre sämtlichen homothetischen.

IV.

Zur Befriedigung der zweiten Lösung

$$\frac{\varphi'_1}{\varphi_1} + \frac{\varphi'_2}{\varphi_2} = 0$$

setzen wir $\varphi'_2 = H\varphi_2$, $\varphi'_1 = -H\varphi_1$. Dann wird $\frac{\partial x'}{1} = -\frac{H\partial x}{1}$, $\frac{\partial x'}{2} = \frac{H\partial x}{2}$,
u. s. w.

Nennt man nun diejenige Seite einer Fläche, von welcher ihre Normalen ausgehen, ihre Vorderseite, so ergibt sich aus diesen Formeln zunächst, dass im vorliegenden Falle die Vorderseite von T auf der Rückseite von T' abgebildet wird, und umgekehrt, vorausgesetzt, dass man unter einer Abbildung eine im gewöhnlichen Sinne, also nicht verkehrt ähnliche versteht.

Sodann ergeben sich für die vollständigen Differentiale die Gleichungen

$$\frac{\partial x'}{2} = H\left(\frac{\partial x}{2} - \frac{\partial x}{1}\right), \quad \frac{\partial y'}{2} = H\left(\frac{\partial y}{2} - \frac{\partial y}{1}\right), \quad \frac{\partial z'}{2} = H\left(\frac{\partial z}{2} - \frac{\partial z}{1}\right),$$

von denen zunächst gezeigt werden soll, dass sie aus den Bedingungen unserer Untersuchung nicht bloss folgen, sondern dieselben auch umgekehrt nach sich ziehen.

Sind nämlich a, b, c die Richtungscosinus der Normale von T , so sind sie es auch für T' , weil aus den vorstehenden Gleichungen

$$a\partial x' + b\partial y' + c\partial z' = 0$$

folgt.

Da ferner die Krümmungslinienelemente $\partial N_1, \partial N_2$ auf einander senkrecht stehen, so folgt $\partial s'^2 = H^2(\partial N_1^2 + \partial N_2^2) = H^2\partial s^2$, also ist T' ein in den kleinsten Theilen ähnliches Bild von T .

Auf Grund dieser beiden Folgerungen ergibt sich endlich nach art. I auch der Parallelismus der Krümmungslinien beider Flächen.

Folglich enthalten die vorstehenden Differentialgleichungen alle für die gegenwärtige Aufgabe nothwendigen und ausreichenden Bedingungen.

Setzt man $\frac{e_1 e_2}{e_1 - e_2} H = \Omega$, so lassen die obigen Gleichungen sich in die Form

$$(X.) \quad \begin{cases} \partial x' = \Omega \left[2 \partial a - \left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} \right) \epsilon x \right], \\ \epsilon y' = \Omega \left[2 \epsilon b - \left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} \right) \epsilon y \right], \\ \epsilon s' = \Omega \left[2 \epsilon c - \left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} \right) \partial s \right] \end{cases}$$

bringen. Dieselbe zeigt sofort, dass unsere ursprüngliche Aufgabe, die Bedingungen zu ermitteln, damit zu einer gegebenen Fläche T eine sie in der verlangten Weise abbildende existire, auf die Herstellung und Deutung der Integrabilitätsbedingungen zurückgeführt ist, welche erforderlich sind und hinreichen, damit die drei vorstehenden Ausdrücke zugleich vollständige Differentiale werden.

Es ist indessen zweckmässig, für diese Untersuchung die Differentialgleichungen so viel wie möglich in der ursprünglichen einfachsten Form beizubehalten.

V.

Wir setzen voraus, dass x, y und s als Functionen zweier von einander unabhängiger Variablen u_1, u_2 in der Weise dargestellt sind, dass der Gleichung $\partial u_1 = 0$ diejenige Schaar Krümmungslinien von T entspricht, welcher die vorhin als erste bezeichnete angehört, der Gleichung $\epsilon u_2 = 0$ die andere Schaar. Bezeichnet man daher die Derivten von x, y, s nach u_1, u_2 durch x_1, x_2, x_{12} , u. s. w., so wird

$$\frac{\partial x}{\partial u_1} = x_1, \quad \frac{\partial x}{\partial u_2} = x_2, \quad \text{u. s. w.}$$

Ferner folgt aus den Gleichungen $\partial x = e_1 \partial a$, $\epsilon x = e_2 \epsilon a$, wenn

$$\frac{1}{e_1} = r_1, \quad \frac{1}{e_2} = r_2$$

gesetzt wird,

$$\frac{\partial a}{\partial u_1} = r_1 x_1, \quad \frac{\partial a}{\partial u_2} = r_2 x_2,$$

mithin durch Elimination von a

$$(1.) \quad x_{12} = \frac{1}{r_1 - r_2} \left(\frac{\partial r_2}{\partial u_2} x_1 - \frac{\partial r_1}{\partial u_1} x_2 \right),$$

wozu noch zwei ähnliche Gleichungen für y und z kommen. Ausserdem ist

$$(2.) \quad x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$$

Dies vorausgeschickt, nehmen die Differentialgleichungen des vorigen art. die folgende Form an:

$$(A.) \quad \begin{cases} \partial x' = H(x_2 \partial u_2 - x_1 \partial u_1), \\ \partial y' = H(y_2 \partial u_2 - y_1 \partial u_1), \\ \partial z' = H(z_2 \partial u_2 - z_1 \partial u_1). \end{cases}$$

Für $\log H = Z$ liefert die erste als Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial Z}{\partial u_1} x_2 + \frac{\partial Z}{\partial u_2} x_1 + 2x_{12} = 0,$$

oder wegen (1.)

$$\left[\frac{\partial Z}{\partial u_1} - \frac{2}{r_1 - r_2} \frac{\partial r_1}{\partial u_1} \right] x_2 + \left[\frac{\partial Z}{\partial u_2} + \frac{2}{r_1 - r_2} \frac{\partial r_2}{\partial u_2} \right] x_1 = 0.$$

Mit Rücksicht auf (2.) folgt aus dieser und den beiden hierzu-gehörigen Gleichungen, daß nothwendig

$$\frac{\partial Z}{\partial u_1} = \frac{2}{r_1 - r_2} \frac{\partial r_1}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial Z}{\partial u_2} = - \frac{2}{r_1 - r_2} \frac{\partial r_2}{\partial u_2}$$

sein muss, und umgekehrt sind mit diesen beiden zugleich alle Integrabilitätsbedingungen erfüllt.

Damit aber diese beiden Gleichungen mit einander bestehen können, ist erforderlich und hinreichend, dass

$$(B.) \quad \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{1}{r_1 - r_2} \frac{\partial r_1}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{1}{r_1 - r_2} \frac{\partial r_2}{\partial u_2} \right) = 0$$

sei. Ist diese Bedingung erfüllt, so liefern also die vorstehenden Ausdrücke für ∂Z ein vollständiges Differential, und die so bestimmte Function

$$H = e^Z$$

macht auch die Ausdrücke für $\partial x'$, $\partial y'$, $\partial z'$ zu vollständigen Differentialen. Zugleich ist ersichtlich, dass der letztern Forderung auf keine andere Weise genügt werden kann.

Es bedarf nur noch der geometrischen Interpretation von (B.). Sei

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \xi_1^2, \quad x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = \xi_2^2,$$

so folgt aus (1.) und (2.)

$$(3.) \quad \frac{1}{r_1 - r_2} \frac{\partial r_1}{\partial u_1} = \frac{\partial \log \xi_1}{\partial u_1}, \quad \frac{1}{r_1 - r_2} \frac{\partial r_2}{\partial u_2} = - \frac{\partial \log \xi_2}{\partial u_2},$$

wodurch (B.) in

$$\frac{\partial^2 \log \frac{\xi_1}{\xi_2}}{\partial u_1 \partial u_2} = 0$$

übergeht. Diese Gleichung fordert also, dass $\log \frac{\xi_1}{\xi_2}$ sich als Differenz einer bloss von u_1 und einer bloss von u_2 abhängigen Function darstellen lasse, dass also

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{\varphi(u_1)}{\psi(u_2)}$$

dem Quotienten aus zwei solchen Functionen gleich sei.

Führt man nun, was an den frühern Voraussetzungen nichts ändert, mittelst der Gleichungen $\varphi(u_1)\partial u_1 = \partial u'_1$, $\psi(u_2)\partial u_2 = \partial u'_2$ zwei neue Variablen u'_1 , u'_2 ein, so folgt, dass die Allgemeinheit unseres Resultates nicht geändert wird, wenn wir $\varphi(u_1)$ und $\psi(u_2)$ constant und einander gleich setzen. Dann wird die Lösung von (B.)

$$(4.) \quad \xi_1 = \xi_2.$$

Damit also die Gleichungen (A.) durch passende Wahl von H integrabel gemacht werden können, ist erforderlich und hinreichend, dass das Quadrat des Linienelementes von T sich in die Form $\partial s^2 = \xi_1^2(\partial u_1^2 + \partial u_2^2)$ bringen lasse, während $\partial u_1 = 0$, $\partial u_2 = 0$ die Differentialgleichungen der beiden Schaaren Krümmungslinien von T sind. Wir haben hiernach den Satz:

Damit einer Fläche T eine zweite T' in der oben verlangten Weise zugeordnet werden könne, ist erforderlich und hinreichend, dass T ein in den kleinsten Theilen ähnliches ebenes Bild gestatte, in welchem seine Krümmungslinien durch zwei Schaaren zu einander senkrechter Geraden dargestellt werden.

Und umgekehrt können alle Flächen T , zu denen die Gleichungen (A.) oder (A.) eine zugeordnete T' liefern, in dieser Weise auf einer Ebene abgebildet werden.

Bezeichnet man bei der Abbildung von T auf der Ebene der u_1 , u_2 das Vergrößerungsverhältniss durch $\frac{1}{m}$, so wird

$$\partial s^2 = m^2(\partial u_1^2 + \partial u_2^2),$$

und es ergeben sich für die Familie der Flächen T aus (4.), (2.), (1.) und (3.) die Differentialgleichungen:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = m^2, \quad x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0, \quad x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = m^2,$$

$$x_{12} = \frac{\partial \log m}{\partial u_1} x_2 + \frac{\partial \log m}{\partial u_2} x_1,$$

$$y_{12} = \frac{\partial \log m}{\partial u_1} y_2 + \frac{\partial \log m}{\partial u_2} y_1,$$

$$z_{12} = \frac{\partial \log m}{\partial u_1} z_2 + \frac{\partial \log m}{\partial u_2} z_1.$$

Ist T diesen Gleichungen gemäss bestimmt, so wird

$$\partial Z = -2 \frac{\partial \log m}{\partial u_1} \partial u_1 - 2 \frac{\partial \log m}{\partial u_2} \partial u_2,$$

also $Z = \text{const.} - 2 \log m$,

$$H = \frac{A}{m^2},$$

so dass man zur Bestimmung von T' die integrabeln Gleichungen

$$\partial x' = \frac{A}{m^2} (x_1 \partial u_1 - x_2 \partial u_2),$$

$$\partial y' = \frac{A}{m^2} (y_1 \partial u_1 - y_2 \partial u_2),$$

$$\partial z' = \frac{A}{m^2} (z_1 \partial u_1 - z_2 \partial u_2)$$

erhält.

Es ist hier nicht der Ort, diesen Gegenstand durch Ausführung von Beispielen weiter zu verfolgen.

Zürich, 2. April 1867.

XIV.

Beweis des Fundamentalsatzes der Invariantentheorie.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 68, 1868, S. 246—252.)

In der fundamentalen Begründung der Invariantentheorie, durch welche Herr Aronhold dieses ganze Gebiet auf ein einziges, von jeder Willkürlichkeit befreites und der grössten Ausdehnung fähiges Princip zurückgeführt hat, wirft sich das Hauptgewicht auf die Frage, *wie gross für eine gegebene homogene Function in einem System von Grundformen die Anzahl derselben vorausgesetzt werden darf, wenn dasselbe nur voneinander unabhängige enthalten soll*, weil nur bei gesicherter Kenntniss dieser Fundamentalzahlen beurtheilt werden kann, ob gegebene Functionen F und F' durch lineare Substitutionen ineinander transformirt werden können, und durch wieviel Substitutionen dies erreicht werden kann.

Die Anzahl der voneinander unabhängigen Invarianten einer homogenen Function, mit welcher alle übrigen Fundamentalzahlen gegeben sind, ist bis jetzt auf zwei verschiedenen Wegen bestimmt worden, zuerst durch Abzählung der Transformationsbedingungen und der zu eliminirenden Substitutionscoefficienten, dann mittelst der partiellen Differentialgleichungen der Invariantentheorie. Bemerkenswerthe und den allgemeinen Fall bildende Abweichungen von den bei diesen Beweisen vorausgesetzten Verhältnissen, welche sich mir bei andern Untersuchungen darbieten, haben mir gezeigt, dass beide Beweise unzureichend sind und übereinstimmend das voraussetzen, was sich bei genauerer Betrachtung als die Hauptfrage für den zu leistenden Beweis herausstellt.

Bezeichnet (n, p) die Anzahl der Coefficienten einer homogenen Function F vom p^{ten} Grade und n Variabeln, so ist (n, p) auch die Anzahl der Bedingungen für die Transformation dieser Function in eine andere mittels einer gegebenen linearen Substitution. Durch Elimination der $n \cdot n$ Substitutionscoefficienten ergeben sich die Transformationsrelationen, also die absoluten Invarianten von F .

Nimmt man nun an, unter den ursprünglichen Transformationsbedingungen lasse sich eine Gruppe von $n \cdot n$ Gleichungen auswählen, welche in Bezug auf die Substitutionscoefficienten voneinander unabhängig sind, so wird die Anzahl der Transformationsrelationen, also der absoluten Invarianten

$$\omega = (n, p) - n^2.$$

Wenn aber eine solche Gruppe von $n \cdot n$ Gleichungen nicht existiren sollte, so würde mit Rücksicht auf den Umstand, dass die ursprünglichen Transformationsbedingungen bei der von ihnen geforderten Wahl von F' nie auf einen Widerspruch führen können, folgen, dass bei der Transformation von F in eine mit möglichst viel willkürlichen Coefficienten versehene Function F'

1) nicht alle Substitutionscoefficienten bestimmte Werthe erlangen, sondern eine Anzahl μ derselben willkürlich bleibt, und in Folge dessen

2) die Anzahl der Transformationsrelationen um μ Einheiten grösser ist als die durch Abzählen gefundene normalmässige Anzahl $\omega = (n, p) - n^2$ derselben.

Es würden demnach auch die merkwürdigen Folgerungen wegfallen, oder einer durchgreifenden Modification bedürfen, welche sich in der Lehre von den zugehörigen Formen und den Covarianten an die Voraussetzung knüpfen, dass durch das Resultat der Transformation die anzuwendende Substitution völlig bestimmt sei.

Im 65^{ten} Bande dieses Journals pag. 267 ist die Frage nach der Anzahl voneinander unabhängiger Invarianten von der Untersuchung des Systems partieller Differentialgleichungen

$$D_{ik} \Pi = 0$$

abhängig gemacht worden, denen alle absoluten Invarianten und nur solche genügen, und gezeigt worden, dass jede Gleichung, welche sich aus diesen $n \cdot n$ Gleichungen durch Differentiiren und Elimination der höhern Derivirten ergibt, aus Gleichungen des Systems auch linear zusammengesetzt werden kann. Dieser Nachweis reicht jedoch zu der daraus gezogenen Folgerung nicht aus, indem die übrigen Sätze, auf welche diese sich stützt, eine Bedingung enthalten, welche in jedem besonderen Falle als erfüllt nachgewiesen werden muss.

Wenn ein System linearer und in den Derivirten homogener Differentialgleichungen erster Ordnung, wie das obige, durch Differentiiren und Elimination der höhern Derivirten nur auf Combinationen der ursprünglichen Gleichungen führt, so nenne ich dasselbe ein *vollständiges*, und schliesse dabei absichtlich den Fall nicht aus, wo in dem

System selbst auch noch Gleichungen enthalten sind, welche aus andern linear folgen; solche Gleichungen nenne ich *überzählige*.

Befreit man ein vollständiges System von seinen überzähligen Gleichungen, so hört es nicht auf, ein vollständiges zu sein.

Ein von allen überzähligen Gleichungen befreites vollständiges System hat stets soviel, und niemals mehr voneinander unabhängige Lösungen, als die Anzahl der Variabeln, vermindert um die Anzahl der Gleichungen beträgt.

Ist daher in einem vollständigen System: N die Anzahl der Variabeln, M die Anzahl der Gleichungen überhaupt und μ die Anzahl der überzähligen, so ist die Anzahl seiner voneinander unabhängigen Lösungen $= N - M + \mu$.

Wenn daher in obigem System von Differentialgleichungen die Anzahl der überzähligen μ ist, so folgt:

1) Die Anzahl der voneinander unabhängigen absoluten Invarianten von F , d. i. die Anzahl der Transformationsrelationen ist $(n, p) - n^2 + \mu = \omega + \mu$, also um μ Einheiten grösser als die durch Abzählen gefundene normalmässige;

2) bei der Transformation von F in F' können daher $n^2 - \mu$ Coefficienten von F' willkürlich angenommen werden, und dann schon sind die übrigen bestimmt;

3) bei dieser Transformation bleiben μ Substitutionscoefficienten willkürlich.

Aus diesen Erörterungen in Verbindung mit den vorangehenden ergibt sich zur Genüge nicht bloß die Nothwendigkeit einer genauen Bestimmung der Zahl μ , sondern auch, dass hier der Schwerpunkt aller Zahlenbestimmungen der Invariantentheorie liegt. Auf der andern Seite ist es klar, dass eine besondere Untersuchung über die Zahl μ nur in dem Falle überflüssig sein würde, wo die Grundformen entweder unmittelbar aus den ursprünglichen Transformationsbedingungen, oder durch directe Integration der partiellen Differentialgleichungen abgeleitet werden, weil nur in einem dieser Fälle die genaue Anzahl der Transformationsrelationen sich von selbst ergibt.

Die Zahl μ kann durch die Lösung der Aufgabe gefunden werden, $n \cdot n$ Coefficienten λ so zu bestimmen, dass für jede beliebige Function Π

$$\sum_{ik} \lambda_{ik} D_{ik} \Pi$$

Null wird, indem μ die Anzahl derjenigen λ ist, welche hierbei willkürlich bleiben. Vermöge der Willkürlichkeit von Π ergeben sich hieraus (n, p) Gleichungen, welche man erhält, indem man nacheinander Π durch die verschiedenen Coefficienten von F ersetzt.

Wäre man im Stande, unter diesen (n, p) Gleichungen irgend eine Gruppe von $n \cdot n$ Gleichungen zu ermitteln, von denen sich beweisen lässt, dass ihre Determinante von Null verschieden ist, so würde jedes $\lambda = 0$ folgen, also auf dem directesten Wege bewiesen sein, dass $\mu = 0$ ist.

Bei einer allgemeinen Begründung der Invariantentheorie hindert aber nichts, die auf vorstehende Art definirte Zahl μ vorläufig in der Theorie mitzuführen, bis sich bequeme Hilfsmittel zu ihrer allgemeinen Bestimmung darbieten, und diese finden sich, wie die folgenden Betrachtungen zeigen, für die homogenen Functionen in der Lehre von den zugehörigen Formen, welche den Beweis des Satzes, dass für $p > 2$ stets $\mu = 0$ ist, ohne Schwierigkeit gestattet.

1.

Wir setzen also voraus, dass die Bestimmung der Coefficienten λ auf μ voneinander unabhängige Lösungen

$$\lambda_{ik}^1, \lambda_{ik}^2, \dots, \lambda_{ik}^\mu$$

führt, aus denen sich jede andere nach der Formel

$$\lambda_{ik} = \sum c_e \lambda_{ik}^e$$

zusammensetzt. Diese besonderen Lösungen λ_{ik}^e unterwerfen wir mit Rücksicht auf unsere spätern Untersuchungen der offenbar zulässigen Bedingung, dass sie ausser Coefficienten von F kein anderes willkürliches Element enthalten sollen.

Bei dieser Voraussetzung schliesst man aus der oben nachgewiesenen Anzahl absoluter Invarianten in bekannter Weise, dass die Anzahl voneinander unabhängiger Invarianten überhaupt

$$\eta = (n, p) - n^2 + \mu + 1$$

ist. Dieser Schluss erleidet nur dann eine Ausnahme, wenn gar keine absolute Invariante existirt, also für $p > 2$ nur, wenn $n = 2$, $p = 3$ ist. Für diesen Fall hat Herr Aronhold durch Integration der Differentialgleichungen gezeigt, dass eine einzige Invariante, also keine absolute existirt, weshalb in diesem Falle $\mu = 0$ ist.

2.

Sei, mit den zugehörigen Polynomialcoefficienten $(\alpha_1 \alpha_2 \dots)$ geschrieben,

$$F = S(\alpha_1 \alpha_2 \dots) a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots$$

Um zugehörige Formen mit den Variabeln $u_1, u_2, \dots$ zu finden, erhebt man die lineare Function $U = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots$ in die p^{te} Potenz, und sucht Invarianten der homogenen Function $F + tU^p$, wo t einen con-

stanten Parameter bedeutet. Ist also $\Pi(a_{\alpha_1, \alpha_2, \dots})$ eine Invariante von F , und von den u unabhängig, so wird bekanntermassen

$$\Pi' = \Pi(a_{\alpha_1, \alpha_2, \dots} + t u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \dots)$$

im weitern Sinne eine zugehörige Form, vorausgesetzt, dass Π' nicht von den Variablen u , oder bei willkürlichen u nicht vom Parameter t unabhängig ist.

Nun erkennt man durch Differentiiren sofort, dass, welche Function der Coefficienten von F allein Π immer bedeuten mag, die aus ihr abgeleitete Π' nur dann bei beliebigen Werthen der u von t unabhängig sein kann, wenn Π selbst von allen a unabhängig ist.

Also liefert jede wirkliche Invariante Π von F auch eine wirkliche zugehörige Form Π' .

Die Anzahl der in Bezug auf die n Variablen u voneinander unabhängigen zugehörigen Formen kann niemals grösser als n sein. Um die Frage zu entscheiden, wann diese Zahl erreicht wird, betrachten wir vorläufig den Fall, wo F mindestens n von einander unabhängige Invarianten $\Pi_s(a_{\alpha_1, \alpha_2, \dots})$ hat, $s = 1, 2, \dots, n$. Dann sind die Functionen $\Pi'_s = \Pi_s(a_{\alpha_1, \alpha_2, \dots} + t u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \dots)$ nach dem Vorangehenden wirkliche zugehörige Formen. Wären diese in Bezug auf die Variablen u nicht unabhängig voneinander, so könnte man eine Function f so wählen, dass $f(\Pi'_1, \Pi'_2, \dots, \Pi'_n)$ von den u unabhängig, also $f(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n)$ würde. Dann aber wäre dieser letztere Ausdruck nach dem Früheren von allen Coefficienten der Function F unabhängig, und $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ wären keine voneinander unabhängige Invarianten.

Aus n voneinander unabhängigen Invarianten erhält man also auch n zugehörige Formen, welche in Bezug auf die Variablen u voneinander unabhängig sind.

Dies festgestellt, lässt sich leicht zeigen, dass für $p > 2$, selbst unter der Voraussetzung, μ sei nicht Null, die zugehörigen Formen in der normalmässigen Anzahl n vorhanden sein würden, d. h. dass unter den angegebenen Bedingungen die Anzahl der Invarianten $\eta \geq n$ ist.

Wenn nämlich μ von Null verschieden ist, so tritt der ungünstigste Fall für die Erfüllung der Ungleichheit

$$(n, p) - n^2 + \mu + 1 \geq n$$

ein für $\mu = 1$, was

$$(n, p) \geq (n-1)(n+2)$$

giebt. Da ferner die linke Seite, sobald $n > 1$ ist, wegen der Gleichung $(n, p+1) - (n, p) \left[1 + \frac{n-1}{p+1} \right]$ mit p zugleich wächst, so tritt unter der Voraussetzung, dass $p > 2$ sei, der ungünstigste Fall ein

für $p = 3$, was

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} \geq (n-1)(n+2)$$

giebt. Durch Beseitigung positiver Factoren kann man dieser Bedingung die Form

$$(n-2)(n-3) \geq 0$$

geben, und dies ist für jedes ganzzahlige n der Fall.

3.

Durch Division mit einer Invariante kann man stets bewirken dass eine zugehörige Form beim Uebergange zu den transformirten Coefficienten und Variabeln ganz ungeändert bleibt. Solche zugehörige Formen sind durch das Gleichungssystem

$$D_{ik} \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} u_k = 0$$

bestimmt.

Man überzeugt sich leicht, dass auch diese Gleichungen ein vollständiges System bilden. Ist daher μ_1 die Anzahl der überzähligen Gleichungen dieses Systems, so ist die Anzahl seiner voneinander unabhängigen Lösungen:

$$n + (n, p) - n^2 + \mu_1.$$

Verwendet man aber zu einem vollständigen System voneinander unabhängiger Lösungen der vorstehenden Gleichungen möglichst viel, also $(n, p) - n^2 + \mu$ absolute Invarianten, so bilden die zur Vervollständigung des Systems erforderlichen Lösungen ein System von zugehörigen Formen, welche in Bezug auf die Variabeln u voneinander unabhängig sind, und aus denen sich mit Hinzuziehung von Invarianten jede andere zugehörige Form zusammensetzen lässt.

Die Anzahl der in Bezug auf die Variabeln u voneinander unabhängigen zugehörigen Formen ist demnach:

$$n + \mu_1 - \mu.$$

Wäre nun, immer unter der Voraussetzung $p > 2$, der Fall möglich, dass μ von Null verschieden ist, so würde aus dem Schlusse des vorigen art.

$$\mu_1 = \mu$$

folgen. Lässt sich beweisen, dass hierin ein Widerspruch enthalten ist, so ist bewiesen, dass μ nicht von Null verschieden sein kann.

Der Voraussetzung gemäss ist μ_1 die Anzahl derjenigen λ , welche willkürlich bleiben, wenn man aus dem Ausdrucke

$$\sum_{ik} \lambda_{ik} D_{ik} \Psi + \sum_{ik} \lambda_{ik} \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} u_k$$

alle Derivirten von Ψ eliminirt. Da das erste Glied nur Derivirten nach Coefficienten von F enthält, so muss es für sich verschwinden, also λ_{ik} die in art. 1 angegebene Form

$$\lambda_{ik} = \sum_{\varrho} c_{\varrho} \lambda_{ik}^{\varrho}$$

haben, wo die Grössen λ_{ik}^{ϱ} von allen willkürlichen Elementen, namentlich den u völlig frei sind. Die μ Coefficienten c müssen jetzt so gewählt werden, dass auch das zweite Glied identisch verschwindet. Man erhält also die n Bedingungsgleichungen

$$\sum_{\varrho} c_{\varrho} \sum_k u_k \lambda_{ik}^{\varrho} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

zwischen den μ Grössen c , und es wird jetzt μ_1 die Anzahl derjenigen c , welche hierbei willkürlich bleiben.

Nimmt man aber an, μ sei von Null verschieden, so muss $\mu_1 = \mu$ sein, also jedes c willkürlich bleiben. Dies ist nicht anders möglich, als wenn für jedes i und ϱ

$$\sum_k u_k \lambda_{ik}^{\varrho} = 0$$

ist, und zwar für alle Werthe der unabhängigen Variabeln $u_1, u_2, \dots, u_n$.

Da aber die Coefficienten λ_{ik}^{ϱ} von den u völlig unabhängig sind, so müssen sie alle Null sein, was mit der Annahme, μ sei von Null verschieden, im Widerspruche steht. Folglich ist, für $p > 2$, diese Annahme selbst unzulässig.

Wenn aber $\mu = 0$ ist, so ist umsomehr $\mu_1 = 0$, da $n + \mu_1 - \mu$ nicht grösser als n , also μ_1 nicht grösser als μ sein kann. Da dies offenbar auch für die Differentialgleichungen der Covarianten gilt, haben wir also den zu beweisenden Satz:

Die Anzahl der voneinander unabhängigen Invarianten sowie aller übrigen Grundformen ist für jede homogene Function, deren Grad grösser als 2 ist, die normalmässige.

Zürich, 19. December 1867.

Anmerkung.

In Randbemerkungen seines mehrfach erwähnten Handexemplars weist Christoffel selbst auf die Schwächen des vorstehenden Beweisversuches hin.

XV.

Theorie der bilinearen Functionen.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 68, 1868, S. 253—272.)

Die in meiner vorangehenden Arbeit für die homogenen Functionen bewiesenen Lehrsätze lassen sich mit Leichtigkeit auf den Fall ausdehnen, wo die zu transformirende Function F in Bezug auf p Systeme von je n Variabeln linear und homogen ist, und überdies auf jedes Variabelnsystem dieselbe lineare Substitution angewandt wird.

Setzt man nämlich in F alle diejenigen Variabeln einander gleich, für welche dieselbe Substitution gilt, so geht F in eine homogene Function Φ von der p^{ten} Ordnung und n Dimensionen über, welche, sobald $p > 2$ ist, die normalmässige Anzahl n voneinander unabhängiger zugehöriger Formen besitzt. Diese zugehörigen Formen von Φ sind aber auch zugehörige Formen von F und nur insoweit specialisirt, als sie die Coefficienten von F nur in denjenigen Verbindungen enthalten, zu denen diese sich beim Übergange von der p -fach linearen Function F zur homogenen Function Φ vereinigt haben.

Da hiernach F ebenfalls die normalmässige Anzahl n voneinander unabhängiger zugehöriger Formen besitzt, so ist bei der Transformation von F durch das Resultat derselben die anzuwendende Substitution insofern völlig bestimmt, als sie keine willkürlichen Constanten enthalten kann. Folglich sind auch die übrigen Grundformen in der normalmässigen Anzahl vorhanden, und die Anzahl der voneinander unabhängigen Invarianten ist z. B. $= n^p - n^3 + 1$.

Für den Fall $p = 2$ verlieren diese Sätze ebenso, wie bei den homogenen Functionen ihre Gültigkeit, nur dass die Erscheinungen, welche diese Ausnahmefälle darbieten, und welche über die hier erwähnten Transformationsprobleme hinaus zur allgemeinen Regel werden, bei den bilinearen Functionen vollständiger hervortreten, als bei den homogenen Functionen zweiter Ordnung.

Die Frage nach den Grundformen einer bilinearen Function

$$F = S(gh)x_h y_h; \quad (g, h = 1, 2, \dots, n)$$

erledigt sich am einfachsten durch die wirkliche Darstellung derselben. Wir werden in art. I. für die Function F im Ganzen $\left[\frac{n}{2}\right]$ absolute Invarianten¹⁾, $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ zugehörige Formen und ebensoviel Covarianten darstellen. Aus ihrer Beziehung zum Transformationsprobleme wird dann zunächst der Nachweis geführt, dass diese Formensysteme vollständig sind. Dass sie auch von überzähligen Formen frei sind, also nur voneinander unabhängige enthalten, ergibt sich dann durch folgende Überlegung.

Die wirkliche Anzahl I der voneinander unabhängigen absoluten Invarianten ist unter allen Umständen gleich der normalmässigen, vermehrt um die Anzahl μ von Substitutionscoefficienten, welche bei einer zulässigen Transformation von F willkürlich bleiben; für die bilinearen Functionen ist also $I = \mu$. Die stets zulässige Transformation von F in sich selbst (art. II.) zeigt aber, dass allgemein $\mu = \left[\frac{n}{2}\right]$, also gleich ist der in art. I. gefundenen Anzahl von absoluten Invarianten. Folglich ist dieses Formensystem nicht nur vollständig, sondern auch frei von überzähligen Formen. Daraus ergibt sich dann nach dem in meiner vorigen Arbeit benutzten Prinzip, dass die aus diesem Invariantensysteme hervorgegangenen zugehörigen Formen und Covarianten, soweit sich solche wirklich ergeben konnten, ebenfalls voneinander unabhängig sein müssen.

Dies festgestellt, ergibt sich mittelst des von Herrn Aronhold gelehrten Verfahrens für die absoluten Invarianten Π von F sehr leicht das System von nn Differentialgleichungen

$$(A.) \quad D_{ik} \Pi = 0,$$

wo

$$D_{ik} \Pi = \sum_h \left[\frac{\partial \Pi}{\partial (i h)} (k h) + \frac{\partial \Pi}{\partial (h i)} (h k) \right]$$

ist, und welchem alle absoluten Invarianten und nur solche genügen.

Dieses System ist ein vollständiges. Bezeichnet man nämlich, was bei allen Untersuchungen dieser Art grosse Vortheile gewährt und im Folgenden beibehalten wird, durch das Zeichen

$$\binom{i}{k}$$

die Null oder Eins, jenachdem k von i verschieden oder ihm gleich

1) Unter $\left[\frac{n}{2}\right]$ wird im Folgenden stets die größte in $\frac{n}{2}$ enthaltene ganze Zahl verstanden.

ist, so findet für jede Function der Coefficienten von F die identische Gleichung

$$(B.) \quad D_{gk} D_{ik} \Pi - D_{ik} D_{gk} \Pi = \binom{g}{k} D_{ik} \Pi - \binom{h}{i} D_{gk} \Pi$$

statt, welche Herr Clebsch bereits im 65^{ten} Bande dieses Journals pag. 268 für die homogenen Functionen, wenn auch in verschiedene Fälle zerlegt, aufgestellt hat; dieselbe hat ganz allgemeine Gültigkeit. Sie zeigt, dass jede Gleichung, welche aus dem System (A.) durch Differentiiren und Elimination der höheren Derivirten hervorgeht, auch aus Gleichungen des Systems linear zusammengesetzt werden kann.

Da aber im System (A.) die Anzahl der Variabeln mit der Anzahl der Gleichungen übereinstimmt, so ist die Anzahl μ der überzähligen Gleichungen dieses Systems gleich der Anzahl seiner Lösungen, also

$$\mu = \left[\frac{n}{2} \right],$$

während es für $p > 2$ stets Null ist.

Für die *zugehörigen Formen* Ψ und die *Covarianten* Φ ergeben sich, wenn jede durch eine geeignete Invariante dividirt wird, die Gleichungssysteme

$$(C.) \quad D_{ik} \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial u_i} u_k = 0, \quad D_{ik} \Phi - x_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = 0,$$

deren Vollständigkeit man leicht beweist. Dieselben sind ausserdem von überzähligen Gleichungen frei. In der That ist die Anzahl der Lösungen des ersten Systems, nämlich der absoluten Invarianten und zugehörigen Formen zusammengenommen, $= \left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n+1}{2} \right] = n$, also die normalmässige; dasselbe gilt vom andern System.

Für die *Zwischenformen* Θ erhält man, wenn jede durch eine geeignete Invariante dividirt wird, das Gleichungssystem

$$D_{ik} \Theta + \frac{\partial \Theta}{\partial u_i} u_k - x_i \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} = 0.$$

Dasselbe ist ein vollständiges, und wie aus dem für die Systeme (C.) geführten Beweise hervorgeht, von überzähligen Gleichungen frei; die Anzahl seiner voneinander unabhängigen Lösungen ist daher $2n$.

Verwendet man aber zu einer vollständigen Lösung dieses Systems möglichst viel absolute Invarianten, zugehörige Formen und Covarianten, so bleiben $2n - \left[\frac{n}{2} \right] - 2 \cdot \left[\frac{n+1}{2} \right] = \left[\frac{n}{2} \right]$ eigentliche Zwischenformen übrig, welche

- 1) mit den zugehörigen Formen ein System von n in Bezug auf die Variabeln u ,
- 2) mit den Covarianten ein System von n in Bezug auf die Variabeln x ,

- 3) mit beiden und den absoluten Invarianten ein System von $2n$ in Bezug auf die Coefficienten von F voneinander unabhängigen Functionen bilden.

Diese $\left[\frac{n}{2}\right]$ Zwischenformen bilden also eine selbständige Gattung von Ausdrücken, indem sie sich aus den übrigen Grundformen nicht zusammensetzen lassen, und begründen insofern einen der wesentlichsten Unterschiede zwischen den bilinearen und den Functionen von höhern Ordnungen. In der That besteht auch für jede dieser letztern ein System von $2n$ Zwischenformen, welche in Bezug auf die Variablen x und u voneinander unabhängig sind. Verwendet man aber zu einem solchen System vollständige Systeme von zugehörigen Formen und Covarianten, so bleibt keine Zwischenform mehr übrig, woraus hervorgeht, dass in diesem Falle jede Zwischenform aus zugehörigen Formen und Covarianten zusammengesetzt werden kann, vorausgesetzt, dass diese sämtlichen Formen durch Division mit einer Invariante in der mehrfach erwähnten Weise modificirt worden sind, wozu man stets mit ein und derselben, nicht absoluten Invariante und ihren Potenzen ausreicht.

Der Grund von dieser und jeder andern Abweichung der bilinearen Functionen vom Verhalten der Functionen höherer Ordnungen liegt darin, dass für die letztern die oben durch μ bezeichnete Zahl stets Null ist, und es geht hieraus hervor, dass neben der Herstellung der Grundformen sich bei den bilinearen Functionen noch folgende beiden, bei der hier vorausgesetzten Gattung von Transformationsproblemen für sie allein existirenden Aufgaben darbieten:

1) Die Transformation einer bilinearen Function in sich selbst und der Nachweis der willkürlichen Elemente in der hieraus entspringenden Substitution;

2) der directe Nachweis derjenigen $\left[\frac{n}{2}\right]$ Gleichungen, welche im System (A.) überzählig sind.

Wegen der Hilfsmittel, welche bei der Herstellung der Grundformen benutzt werden, und der Anwendung der zugehörigen Formen zur Bestimmung der Substitution verweise ich auf die fundamentale Abhandlung des Herrn Aronhold im 62^{ten} Bande dieses Journals.

I. Die Grundformen der bilinearen Function F .

Man verificirt leicht, dass die Determinante

$$P = \Sigma \pm (11)(22) \dots (nn)$$

dem Gleichungssystem

$$D_{\alpha} P = 2 \binom{i}{k} P$$

Genüge leistet; also ist P Invariante von F , und wenn r die stets von Null verschiedene Substitutionsdeterminante bedeutet, die Transformirte von P

$$P' = r^2 P.$$

Dies festgestellt, sei $\mathfrak{F}$ die aus F durch Vertauschung der Variabelnsysteme hervorgehende bilineare Function,

$$\mathfrak{F} = S(gh)y_g x_h = S(hg)x_g y_h.$$

Da bei beiden Variabelnsystemen *dieselbe* Substitution vorausgesetzt wird, so hat $\mathfrak{F}$ dieselben Invarianten wie F , und alle simultanen Invarianten von F und $\mathfrak{F}$ sind zugleich Invarianten von F . Dasselbe gilt demnach auch von den Invarianten der Function $\lambda F + \mu \mathfrak{F}$, solange λ, μ constante Werthe haben.

Setzt man daher den Coefficienten von $x_g y_h$ in dieser Function, nämlich

$$\lambda(gh) + \mu(hg) = [gh],$$

so folgt, dass auch

$$\Sigma \pm [11][22] \dots [nn] = \Pi(\lambda, \mu)$$

eine Invariante von F ist, und zwar für alle constanten Werthe von λ und μ .

Für die Anwendungen der zugehörigen Formen ist es nöthig, die einfachen Voraussetzungen der Einleitung zu verlassen, und statt der Variabeln u allein zwei Variabelnsysteme einzuführen. Wir suchen demnach simultane Invarianten von $\lambda F + \mu \mathfrak{F}$ mit dem Producte zweier linearen Functionen $U = \Sigma u_g x_g$, $U' = \Sigma u'_h y_h$, also der bilinearen Function

$$U_1 = \Sigma u_g u'_h x_g y_h.$$

Aus dem Vorangehenden ergibt sich die Invariante

$$\begin{vmatrix} [11] + \alpha u_1 u'_1 & [12] + \alpha u_1 u'_2 & \dots \\ [21] + \alpha u_2 u'_1 & [22] + \alpha u_2 u'_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix},$$

welche für $\alpha = 0$ in $\Pi(\lambda, \mu)$ übergeht. Dieselbe ist in Bezug auf α linear und bleibt ungeändert, wenn man λ mit μ und zugleich das System der Variabeln u mit dem der u' vertauscht. Setzt man sie $= \Pi(\lambda, \mu) + \alpha \Psi(\lambda, \mu; \bar{u}, \bar{u}')$, so hat auch Ψ die zuletzt erwähnte Eigenschaft, und es wird, wenn durch

$$\Pi_{gh}(\lambda, \mu)$$

die aus einer Aenderung des Elementes $[gh]$ entspringende Unterdeterminante von $\Pi(\lambda, \mu)$ bezeichnet wird, die gesuchte zugehörige Form

$$\Psi(\lambda, \mu; \bar{u}, \bar{u}') = S \Pi_{gh}(\lambda, \mu) u_g u'_h,$$

also eine bilineare Function der Variabelnsysteme u, u' . In Determinantenform wird

$$\Psi(\lambda, \mu; \bar{u}, \bar{u}') = \begin{vmatrix} 0 & u'_1 & u'_2 & \dots & u'_n \\ -u_1 & [11] & [12] & \dots & [1n] \\ -u_2 & [21] & [22] & \dots & [2n] \\ \vdots & & & & \vdots \\ -u_n & [n1] & [n2] & \dots & [nn] \end{vmatrix}.$$

Um *bilineare Covarianten* zu erhalten, setzen wir

$$\frac{\partial F}{\partial y_\lambda} = X_\lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial x_\rho} = Y_\rho,$$

und suchen simultane Invarianten von $\lambda F + \mu \bar{Y}$ mit dem Producte der linearen Functionen $\Sigma X_\lambda y_\lambda, \Sigma Y_\rho x_\rho$, indem wir die Coefficienten X, Y wie Constanten behandeln. Das Vorgehende zeigt, dass die hieraus fließenden Covarianten erhalten werden, wenn man in Ψ jedes u, u' durch das entsprechende Y, X ersetzt; also ergibt sich die Covariante

$$\Phi(\lambda, \mu; \bar{x}, \bar{y}) = \Psi(\lambda, \mu; \bar{Y}, \bar{X}).$$

Was die Beziehung zwischen diesen und ihren Transformirten betrifft, so folgt aus der Grundeigenschaft von P , aus welchem die Vorstehenden als Entwicklungscoefficienten entspringen,

$$\Pi' = r^3 \Pi, \quad \Psi' = r^3 \Psi, \quad \Phi' = r^3 \Phi.$$

Wir werden nun zunächst zeigen, dass diese Gleichungen für die Möglichkeit der Transformation von F in F' und die Bestimmung der dies leistenden Substitutionen nicht bloss erforderlich sind, sondern auch hinreichen, sobald sie für alle Werthe von λ und μ erfüllt sind, d. h. dass die vermöge der Willkürlichkeit von λ und μ aus Π, Ψ, Φ hervorgehenden Formen hinreichen, um aus ihnen jede andere Form derselben Art zusammenzusetzen.

In der That wird für $\lambda = 1, \mu = 0$ identisch $\Phi = \Pi(1, 0)F$, also $\Phi' = \Pi'(1, 0)F'$ und $\Pi'(1, 0)F' = r^3 \Pi(1, 0)F$, endlich, weil $\Pi'(1, 0) = r^3 \Pi(1, 0)$ ist, $F' = F$, w. z. b. w.

Dass in der Gleichung $P' \Pi = P \Pi'$ alle für die Möglichkeit der Transformation von F in F' erforderlichen Bedingungen enthalten sind, hat zuerst Herr Kronecker in seiner Abhandlung über die bilinearen Functionen von gerader Dimension $n^1)$ durch directe Transformation derselben in eine Normalform bewiesen.

1) Monatsberichte der Berliner Akademie, Sitzung v. 15. October 1866, pag. 601 u. f.

Um die Anzahl der Formen zu übersehen, welche in obigen Ausdrücken wegen der Willkürlichkeit von λ und μ enthalten sind, setzen wir

$$\frac{(ik) + (ki)}{2} = \sigma_{ik}, \quad \frac{(ik) - (ki)}{2} = \delta_{ik},$$

woraus allgemein

$$(ik) = \sigma_{ik} + \delta_{ik}, \quad \sigma_{ki} = \sigma_{ik}, \quad \delta_{ki} = -\delta_{ik}$$

folgt. Wird alsdann noch

$$\lambda + \mu = s, \quad \lambda - \mu = t,$$

also

$$[ik] = s\sigma_{ik} + t\delta_{ik}$$

gesetzt, so wird

$$\Psi = \begin{vmatrix} 0 & u'_1 & u'_2 & \dots \\ -u_1 & s\sigma_{11} & s\sigma_{12} + t\delta_{12} & \dots \\ -u_2 & s\sigma_{12} - t\delta_{12} & s\sigma_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix},$$

woraus Π durch Weglassung des aus den u und u' gebildeten Randes erhalten wird.

Vertauscht man nun λ mit μ , und jedes u mit dem entsprechenden u' , so wechselt t sein Zeichen, s , Π und Ψ bleiben ungeändert. Da nun Π von den Variablen u , u' unabhängig ist, so hat seine Entwicklung die Form

$$\Pi = s^n \Pi_0 + s^{n-2} t^2 \Pi_2 + s^{n-4} t^4 \Pi_4 + \dots,$$

während, wenn entwickelt

$$\Psi = s^{n-1} \Psi_1 + s^{n-3} t \Psi_3 + s^{n-5} t^3 \Psi_5 + \dots$$

ist, die Entwicklungskoeffizienten Ψ_σ bilineare Functionen der Variablen u , u' sind, welche bei der Vertauschung der beiden Variabelnsysteme entweder ungeändert bleiben, oder nur ihre Zeichen wechseln, ersteres bei ungeradem, letzteres bei geradem σ .

Setzt man daher, um den in der Einleitung vorausgesetzten Fall zu erhalten, jedes u' dem entsprechenden u gleich, so fallen alle Ψ_σ mit geradem Index weg, und es ergeben sich nun $\left[\frac{n+2}{2}\right]$ Invarianten, $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ zugehörige Formen mit einem einzigen Variabelnsystem, also ebensoviel Covarianten derselben Art, aus denen alle Formen gleicher Gattung zusammengesetzt werden können. Dass sie auch voneinander unabhängig sind, lässt sich aus der Einrichtung der Elemente von Ψ erkennen, wird sich aber auch im folgenden art. ergeben.

Von den besonderen Fällen, welche sich hier darbieten, und welche alle auf bekannte Determinantensätze hinauskommen, heben wir einen

des Folgenden wegen hervor. Für ein ungerades n wird nämlich Ψ_n , wie man aus dem Ausdrucke für Ψ erkennt, wenn man $s = 0$, $t = 1$ setzt, das Product aus einer linearen Function der u und der nämlichen Function mit den Variablen u' . Folglich kann die bilineare zugehörige Form Ψ_n durch eine in den u lineare ersetzt werden, welche wir durch $\psi(u)$ bezeichnen werden, so dass $\Psi_n = \psi(u)\psi(u')$ wird.

II. Transformation der bilinearen Function F in sich selbst.

Sei

$$x_i = \sum_k \alpha_{ik} \xi_k, \quad y_i = \sum_k \alpha_{ik} \eta_k$$

die Substitution, durch welche F in

$$F' = S(gh)' \xi_p \eta_h$$

übergeführt wird, und

$$v_k = \sum_i \alpha_{ki} u_i$$

die in den zugehörigen Formen auszuführende transponirte Substitution, welche für beide Variabelnsysteme der u und u' gilt.

Soll nun allgemein

$$(gh)' = (gh)$$

sein, also durch die vorausgesetzte Substitution F in sich selbst mit andern Variablen transformirt werden, so folgt aus der Gleichung $\Pi' = r^2 \Pi$, dass

$$r^2 = 1$$

sein muss.

Der bessern Uebersicht wegen setzen wir von hier an

$$\lambda + \mu = s = 1, \quad \lambda - \mu = t,$$

wodurch die Grundformen $\Pi(\lambda, \mu)$, $\Psi(\lambda, \mu; \bar{u}, \bar{u}')$, $\Phi(\lambda, \mu; \bar{x}, \bar{y})$ in Functionen von t übergehen, welche wir durch $\Pi(t)$, $\Psi(t; \bar{u}, \bar{u}')$, $\Phi(t; \bar{x}, \bar{y})$ bezeichnen, und von denen die erste eine gerade Function von t ist.

Beim obigen Werthe von r^2 ergibt sich für die zugehörigen Formen die Gleichung

$$(1.) \quad \Psi(t; \bar{v}, \bar{v}') = \Psi(t; \bar{u}, \bar{u}')$$

oder

$$\sum_{p,h} \Pi_{p,h}(t) v_p v'_h = \sum_{p,h} \Pi_{p,h}(t) u_p u'_h,$$

welche für jedes t erfüllt sein muss.

Wir beweisen zunächst, dass aus dieser Gleichung stets $r^2 = 1$ folgt. Vergleicht man nämlich beiderseits die Coefficienten von $u_i u'_k$, so folgt

$$\sum_{p,h} \Pi_{p,h}(t) \alpha_{pi} \alpha_{hk} = \Pi_{ik}(t),$$

und wenn man mittelst dieses Ausdrucks die von Null verschiedene Determinante $\Sigma \pm \Pi_{11} \Pi_{22} \dots \Pi_{nn}$ bildet, $r^2 = 1$, wie erforderlich ist.

Dies festgestellt, ist es nothwendig, die beiden Fälle zu unterscheiden, wo n gerade oder ungerade ist.

Im ersten Falle, $n = 2m$, ist der Grad von Ψ in Bezug auf t um eine Einheit kleiner, als der Grad von Π . Schliesst man nun den Fall aus, wo nicht alle Coefficienten von F willkürliche und voneinander unabhängige Werthe haben, so hat die Gleichung $\Pi(t) = 0$ m Lösungen $t^2 = \omega_1^2, t^2 = \omega_2^2, \dots, t^2 = \omega_m^2$, die alle voneinander verschieden sind.

Dividirt man jetzt die Gleichung (1.) durch $\Pi(t)$, so ergeben sich aus ihr durch Zerlegung in Partialbrüche zwei Systeme von je m Gleichungen, welche den Wurzelfactoren $t - \omega_i, t + \omega_i$ entsprechen, und die Gleichung (1.) völlig ersetzen. Der erste Wurzelfactor liefert die Gleichung

$$\sum_{g,h} \Pi_{g,h}(\omega_i) v_g v'_h = \sum_{g,h} \Pi_{g,h}(\omega_i) u_g u'_h;$$

beachtet man, dass $\Pi_{g,h}(-\omega_i) = -\Pi_{h,g}(\omega_i)$ ist, so ergibt sich aus dem andern Wurzelfactor die Gleichung

$$\sum_{g,h} \Pi_{h,g}(\omega_i) v_g v'_h = \sum_{g,h} \Pi_{h,g}(\omega_i) u_g u'_h.$$

Multiplirt man mit $\Pi_{k,k}(\omega_i)$, wo k einen beliebigen Index bedeutet, so zerfallen die vorstehenden Ausdrücke in Linearfactoren

$$(2.) \quad \sum_g \Pi_{g,k}(\omega_i) v_g \cdot \sum_h \Pi_{k,h}(\omega_i) v'_h = \sum_g \Pi_{g,k}(\omega_i) u_g \cdot \sum_h \Pi_{k,h}(\omega_i) u'_h,$$

$$(3.) \quad \sum_g \Pi_{g,g}(\omega_i) v_g \cdot \sum_h \Pi_{k,h}(\omega_i) v'_h = \sum_g \Pi_{k,g}(\omega_i) u_g \cdot \sum_h \Pi_{k,h}(\omega_i) u'_h.$$

Da jedes v_g lineare Function der u allein, und jedes v'_g dieselbe Function der u' allein ist, so folgt aus (2.)

$$\sum_g \Pi_{g,k}(\omega_i) v_g = a_k \sum_g \Pi_{g,k}(\omega_i) u_g,$$

$$\sum_h \Pi_{k,h}(\omega_i) v'_h = \frac{1}{a_k} \sum_h \Pi_{k,h}(\omega_i) u'_h,$$

wo alle a willkürliche Constanten und offenbar von k unabhängig sind.

Vertauscht man hier die Variablen u und u' , so vertauschen sich auch die v und v' , und es folgt, dass die Gleichungen (3.) von selbst befriedigt sind.

Also haben wir zur Bestimmung der gesuchten Substitutionen, durch welche bei geradem $n = 2m$ die Function F in sich selbst transformirt wird, die $2m$ Gleichungen

$$\sum_p \Pi_{pk}(\omega_k)(v_p - a_p u_p) = 0,$$

$$\sum_p \Pi_{kp}(\omega_k)(u_p - a_p v_p) = 0,$$

in denen der Index k gleichgültig ist, und durch jeden andern ersetzt werden kann.

Zur Bestimmung der inversen Substitution erhält man ähnliche Gleichungen. Da die Determinante dieser Gleichungen, wie man durch Bildung derselben leicht findet, von Null verschieden ist, so sind die Unbekannten v als lineare Functionen der u mit den $m - \left[\frac{n}{2}\right]$ willkürlichen Constanten a bestimmt.

Für ein ungerades $n = 2m + 1$ sind Ψ und Π vom nämlichen Grade in t . Folglich liefert die Partialbruchzerfällung in diesem Falle 1) ein System von $2m$ Gleichungen der nämlichen Form wie das vorstehende, und 2) nach der Bezeichnung am Schlusse des vorigen art. noch die Bedingung $\Psi_n(\bar{v}, \bar{v}') = \Psi_n(\bar{u}, \bar{u}')$, welche durch die einfachere $\psi(\bar{v}) = r \cdot \psi(\bar{u})$ ersetzt werden kann, und daher keine willkürliche Constante in die gesuchte Substitution einführt. Folglich ist in dieser die Anzahl der willkürlichen Elemente wieder $m - \left[\frac{n}{2}\right]$.

Die Anzahl der willkürlichen Substitutionselemente stimmt daher in allen Fällen mit der Anzahl von absoluten Invarianten überein, die sich im vorigen art. ergeben haben, und es ist hiernach dieses Invariantensystem nicht bloss vollständig, sondern auch frei von überzähligen Formen. Dasselbe gilt daher auch, wie schon bemerkt wurde, von den übrigen Formensystemen.

III. Transformation von F in spezielle Formen.

Für die Transformation von F in irgend eine gegebene Form F' haben wir demnach die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen

$$\Pi'(\lambda, \mu) = r^2 \Pi(\lambda, \mu),$$

$$\Psi'(\lambda, \mu; \bar{v}, \bar{v}') = r^2 \Psi(\lambda, \mu; \bar{u}, \bar{u}'),$$

$$\Phi'(\lambda, \mu; \bar{\xi}, \bar{\eta}) = r^2 \Phi(\lambda, \mu; \bar{x}, \bar{y}),$$

von denen die erste die sämtlichen Bedingungen für die Möglichkeit der Transformation enthält, die zweite die directe und die dritte die inverse Substitution liefert.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die Substitution so zu bestimmen, dass F' in eine Summe von m bilinearen Functionen

$$\begin{aligned} f_1' &= S(gh)' \xi_p \eta_h, & (g, h = 1, 2, \dots n_1) \\ f_2' &= S(gh)' \xi_p \eta_h, & (g, h = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots n_2) \\ . & \\ f_m' &= S(gh)' \xi_p \eta_h, & (g, h = n_{m-1} + 1, n_{m-1} + 2, \dots n) \end{aligned}$$

zerfällt, welche so gewählt sind, dass ein Variabelnpaar ξ, η , welches in eine von diesen speciellen Functionen eingeht, in keiner von den übrigen mehr vorkommt.

Auf dieselbe Weise, wie in art. I. $\Pi(\lambda, \mu)$ aus F , $\Psi(\lambda, \mu, \bar{u}, \bar{u'})$ und $\Phi(\lambda, \mu, \bar{x}, \bar{y})$ aus $\Pi(\lambda, \mu)$ abgeleitet wurde, leite man aus jeder der vorstehenden, einer geringern Anzahl von Variabelnpaaren entsprechenden Functionen eine Invariante, zugehörige Form und Covariante ab, welche für die Function f'_s durch $\pi_s(\lambda, \mu)$, $\psi_s(\lambda, \mu, \bar{v}, \bar{v'})$, $\varphi_s(\lambda, \mu, \bar{\xi}, \bar{\eta})$ bezeichnet werden sollen.

Dann wird offenbar für die Function

$$F' = f_1' + f_2' + \cdots + f_n'$$

die Invariante

$$P'(\lambda, \mu) = \pi_1(\lambda, \mu) \pi_2(\lambda, \mu) \dots \pi_m(\lambda, \mu),$$

während die Herleitung von Ψ und Φ aus Π sofort erkennen lässt, dass

$$\frac{\Phi'(\lambda, \mu; \bar{v}, \bar{v}')}{\Pi'(\lambda, \mu)} = \sum_j \frac{\psi_j(\lambda, \mu; \bar{v}, \bar{v}')}{\pi_j(\lambda, \mu)},$$

$$\frac{\Phi'(\lambda, \mu; \bar{\xi}, \bar{\eta})}{\Pi'(\lambda, \mu)} = \sum_j \frac{\varphi_j(\lambda, \mu; \bar{\xi}, \bar{\eta})}{\pi_j(\lambda, \mu)}$$

ist.

Setzt man diese Ausdrücke den der ursprünglichen Function F entsprechenden gleich, und zerfällt beiderseits in Partialbrüche, so zerfallen die hier auftretenden besondern Werthe der Functionen $\psi, \varphi, \Psi, \Phi$ nach dem vorigen art. in Linearfactoren, und es muss nun jeder solche Linearfactor der einen Seite einem durch die Bedingung eines gleichen Nenners und entsprechender Variabeln völlig bestimmten Linearfactor auf der andern Seite proportional gesetzt werden.

Wir verfolgen dies nicht weiter, und ziehen aus dem Vorangehenden nur noch die folgende Bestimmung über die zulässigen Dimensionen der einzelnen Functionen f' :

Setzt man wieder $\lambda + \mu = s = 1$, $\lambda - \mu = t$, so werden beide Seiten der für die Möglichkeit der Transformation nothwendigen und ausreichenden Bedingungsgleichung

$$r^3 \Pi(\lambda, \mu) = \pi_1(\lambda, \mu) \pi_2(\lambda, \mu) \dots \pi_m(\lambda, \mu)$$

ganze Functionen von t , und die linke Seite sowie die aufeinander-

folgenden Factoren der rechten in Bezug auf t^2 vom Grade $\left[\frac{n}{2}\right]$, $\left[\frac{n_1}{2}\right]$, $\left[\frac{n_2 - n_1}{2}\right]$, ..., $\left[\frac{n - n_{m-1}}{2}\right]$. Damit diese Gleichung bei willkürlichem t durch geeignete Wahl der Functionen f'_i befriedigt werden könne, ist es also erforderlich, dass beide Seiten in Bezug auf t^2 vom nämlichen Grade sind, also

$$\left[\frac{n_1}{2}\right] + \left[\frac{n_2 - n_1}{2}\right] + \dots + \left[\frac{n - n_{m-1}}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right]$$

ist. Bezeichnet aber α die Anzahl derjenigen Functionen f'_i , welche von ungerader Dimension sind, so ist die linke Seite offenbar

$$\frac{n - \alpha}{2},$$

und daraus folgt, dass unter den Functionen $f'_1, f'_2, \dots, f'_m$ sich für ein gerades n keine, für ein ungerades n nur eine einzige von ungerader Dimension befinden darf. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist die verlangte Transformation von F stets möglich.

Nimmt man daher, um die grösste Vereinfachung zu erhalten, die Dimensionen sämtlicher Functionen f'_i so klein wie möglich, so zerfällt F' für ein gerades n in eine Summe von $\left[\frac{n}{2}\right]$ binären Functionen, wozu für ein ungerades n noch ein eingliedriger Ausdruck kommt. Der erste von diesen Fällen liefert die von Herrn Kronecker in der oben erwähnten Abhandlung zuerst eingeführte Normalform.

IV. Die Zwischenformen und die überschüssigen Differentialgleichungen der absoluten Invarianten.

Um eine grössere Anzahl von Zwischenformen zu erhalten, aus denen sich dann die vorzugsweise charakteristischen zusammensetzen lassen, suchen wir mit Ausscheidung von früher bestimmten Formen simultane Invarianten von

$$\lambda F + \mu \mathfrak{F} - S[gh]x_y y_x$$

mit den linearen Functionen

$$U = \Sigma u_g x_g, \quad V = \Sigma X_g y_g, \quad W = \Sigma \mathfrak{X}_g y_g,$$

indem wir schliesslich

$$X_g = \frac{\partial F}{\partial y_g}, \quad \mathfrak{X}_g = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y_g}$$

setzen, wodurch V und W in F und $\mathfrak{F}$ übergehen. Vermehrt man also in $\Pi(\lambda, \mu)$ jedes Element $[gh]$ um

$$\omega_{gh} = \alpha u_g X_h + \beta u_g \mathfrak{X}_h + \gamma u_h \mathfrak{X}_g + \delta u_h X_g,$$

entwickelt dann nach Potenzen von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so ergibt sich

$$\Pi(\lambda, \mu) + \alpha \Theta_1 + \beta \Theta_2 + \gamma \Theta_3 + \delta \Theta_4 + \dots,$$

wo die Entwicklungscoefficienten der linearen Glieder, welche wir allein berücksichtigen, die Ausdrücke

$$\Theta_1 = S \Pi_{\rho\lambda} \cdot u_\rho X_\lambda,$$

$$\Theta_2 = S \Pi_{\rho\lambda} \cdot u_\rho X_\lambda,$$

$$\Theta_3 = S \Pi_{\rho\lambda} \cdot u_\lambda X_\rho,$$

$$\Theta_4 = S \Pi_{\rho\lambda} \cdot u_\lambda X_\rho,$$

haben und eigentliche Zwischenformen sind. Zwischen diesen vier Formen bestehen einfache Beziehungen.

Zunächst bemerkt man leicht, dass durch Vertauschung von λ mit μ Θ_1 mit Θ_4 , Θ_2 mit Θ_3 vertauscht wird. Sodann ergibt sich

$$\lambda \Theta_1 + \mu \Theta_2 = \Pi \cdot U,$$

$$\lambda \Theta_3 + \mu \Theta_4 = \Pi \cdot U.$$

Setzt man daher

$$\lambda \Theta_1 + \mu \Theta_4 = \Pi U + \Theta,$$

so wird

$$\lambda \Theta_3 + \mu \Theta_2 = \Pi U - \Theta,$$

und Θ eine neue Zwischenform, welche auf doppelte Weise dargestellt werden kann

$$\Theta = \lambda(\Theta_1 - \Theta_2) = \mu(\Theta_4 - \Theta_3),$$

also durch $\lambda\mu$ theilbar ist, und überdies durch Vertauschung von λ mit μ nicht geändert wird.

Hieran knüpfen sich nun merkwürdige Resultate. Ersetzt man allgemein $x_i u_k$ durch

$$D_{ik} F = x_i \frac{\partial F}{\partial x_k} + y_i \frac{\partial F}{\partial y_k},$$

(vergl. die Einleitung), und bezeichnet das, was hierdurch aus Θ_i wird, durch $\Theta_i(F)$, so folgt, weil U in $2F$ übergeht,

$$\lambda \Theta_1(F) + \mu \Theta_4(F) = 2 \Pi F + \Theta(F),$$

$$\lambda \Theta_3(F) + \mu \Theta_2(F) = 2 \Pi F - \Theta(F).$$

Nun ist in $\lambda \Theta_1 + \mu \Theta_4$ der Factor von $\Pi_{\rho\lambda}$ gleich

$$\lambda u_\rho X_\lambda + \mu u_\lambda X_\rho = \sum_i \lambda(ih) x_i u_\rho + \mu(ig) x_i u_\lambda;$$

derselbe geht durch die angegebene Substitution über in

$$\sum_i \lambda(ih) D_{i\rho} F + \mu(ig) D_{i\lambda} F.$$

In diesem Ausdrucke findet sich der Factor von $x_i y_k$ ohne Schwierig-

keit $-(ih)[gk] + (ig)[kh]$; also ist in $\lambda \Theta_1(F) + \mu \Theta_4(F)$ der Factor von $x_i y_k$ gleich

$$S \Pi_{gk}((ih)[gk] + (ig)[kh]) - 2 \Pi \cdot (ik),$$

mithin

$$\lambda \Theta_1(F) + \mu \Theta_4(F) = 2 \Pi F,$$

$$\Theta(F) = 0,$$

$$\lambda \Theta_3(F) + \mu \Theta_2(F) = 2 \Pi F.$$

Die zweite von diesen Gleichungen liefert den Satz:

Ist die obige Zwischenform:

$$\Theta = \sum \lambda_{ik} x_i u_k,$$

so ist identisch

$$\sum \lambda_{ik} D_{ik} F = 0,$$

also auch für jede beliebige Function P der Coefficienten von F

$$\sum \lambda_{ik} D_{ik} P = 0.$$

Diese Gleichung enthält die vollständige Lösung der Aufgabe, die überzähligen Differentialgleichungen der absoluten Invarianten zu bestimmen. Da nämlich

$$\Theta_1 - \Theta_3 = S(\Pi_{ik} X_k - \Pi_{ik} \tilde{X}_k) u_i,$$

und $\Theta = \lambda(\Theta_1 - \Theta_3)$ ist, so folgt

$$\lambda_{ik} = \lambda \sum_{\mathbf{A}} ((ih) \Pi_{ik} - (hi) \Pi_{ik}).$$

Einen andern Ausdruck erhält man aus der Gleichung $\Theta = \mu(\Theta_4 - \Theta_2)$, nämlich

$$\lambda_{ik} = \mu \sum_{\mathbf{A}} ((ih) \Pi_{ik} - (hi) \Pi_{ik}).$$

Die halbe Summe beider ergibt endlich die symmetrische Darstellung

$$\lambda_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{A}} \left((ih) \frac{\partial \Pi}{\partial (k\bar{h})} - (hi) \frac{\partial \Pi}{\partial (h\bar{k})} \right).$$

Setzt man nun

$$\Pi = \Pi_0 \lambda^n + \Pi_1 \lambda^{n-1} \mu + \Pi_2 \lambda^{n-2} \mu^2 + \dots + \Pi_n \mu^n,$$

so fallen aus λ_{ik} die mit λ^n und μ^n multiplicirten Glieder fort, wie man leicht verificirt, und auch aus dem Umstande schliesst, dass Θ , mithin auch λ_{ik} durch $\lambda \mu$ theilbar ist, so dass in der Entwicklung von λ_{ik} nur $(n-1)$ Glieder übrig bleiben. Da aber allgemein $\Pi_{n-1} = \Pi$, ist, so erhält man nur $\frac{n-1}{2}$ verschiedene Glieder, wenn $(n-1)$ gerade, und nur $\frac{n}{2}$ Glieder, wenn $(n-1)$ ungerade ist, also all-

gemein $\left[\frac{n}{2}\right]$ verschiedene Lösungen der Aufgabe, die $n \cdot n$ Coefficienten λ_{ik} so zu bestimmen, dass

$$\sum \lambda_{ik} D_{ik} P$$

für jede beliebige Function P verschwindet.

Dadurch sind ebensoviel Gleichungen des Systems

$$D_{ik} P = 0$$

als lineare Folge der übrigen nachgewiesen, was direct bestätigt werden sollte.

V. Eigenschaften der λ_{ik} .

Durch das Schlussresultat des vorigen art. erlangen die Coefficienten der speciellen Zwischenform Θ ein selbständiges Interesse, weshalb wir zum Nachweise ihrer Eigenschaften übergehen.

Da $\Theta(\bar{x}, \bar{u})$ Entwicklungsglied einer Zwischenform Π ist, welche der Gleichung $\Pi' = r^2 \Pi$ genügt, so ist unter Voraussetzung der in art. II. angegebenen Substitution

$$\Theta'(\bar{\xi}, \bar{v}) = r^2 \Theta(\bar{x}, \bar{u}),$$

und es genügt hiernach Θ dem System partieller Differentialgleichungen

$$D_{ik} \Theta + \frac{\partial \Theta}{\partial u_i} u_k = x_i \frac{\partial \Theta}{\partial x_k} = 2 \binom{i}{k} \Theta;$$

dasselbe gilt von jeder der vier Zwischenformen, aus denen Θ zusammengesetzt wurde.

Sei nun λ'_{ik} das, was aus λ_{ik} wird, wenn jeder Coefficient von F durch den entsprechenden Coefficienten der transformirten F' ersetzt wird, also $\Theta'(\bar{x}, \bar{u}) = \sum \lambda'_{ik} x_i u_k$; dann folgt aus der ersten Gleichung

$$\sum \lambda'_{ik} \xi_i v_k = r^2 \sum \lambda_{\rho k} x_\rho u_k.$$

Nimmt man beiderseits die Derivirte nach ξ_i und v_k , so folgt, weil $\frac{\partial x_\rho}{\partial \xi_i} = \alpha_{i\rho}$, $\frac{\partial u_k}{\partial v_k} = \frac{\partial \log r}{\partial \alpha_{kh}}$ ist,

$$\lambda'_{ik} = r^2 \sum_{\rho, h} \alpha_{i\rho} \frac{\partial \log r}{\partial \alpha_{kh}} \lambda_{\rho k}.$$

Setzt man sodann den Ausdruck von Θ in die Differentialgleichungen ein, so folgt

$$D_{ik} \lambda_{\rho k} = 2 \binom{i}{k} \lambda_{\rho k} - \binom{h}{k} \lambda_{\rho i} + \binom{g}{i} \lambda_{kh}.$$

Ist daher P irgend eine Function der λ , also auch der Coefficienten

von F , so folgt

$$D_{ik}P = 2 \binom{i}{k} \sum_{p,h} \frac{\partial P}{\partial \lambda_{ph}} \lambda_{ph} + \sum_h \left(\frac{\partial P}{\partial \lambda_{ih}} \lambda_{kh} - \lambda_{ih} \frac{\partial P}{\partial \lambda_{hk}} \right).$$

Wenn daher P homogen ist und dem Gleichungssystem

$$\sum_h \left(\frac{\partial P}{\partial \lambda_{ih}} \lambda_{kh} - \lambda_{ih} \frac{\partial P}{\partial \lambda_{hk}} \right) = 0$$

genügt, so ist es eine Invariante von F . Die Bedeutung dieses Resultates wird sich aus dem Folgenden ergeben.

VI. Ueber die den Zwischenformen eigenthümliche Substitution.

Nach dem Vorangehenden ist $\Theta(\bar{x}, \bar{u})$ eine bilineare Function, deren Transformation sich von der früher betrachteten dadurch unterscheidet, dass die auf die beiden Variabelnsysteme anzuwendenden Substitutionen nicht übereinstimmen, sondern zueinander transponirt sein sollen. Sei allgemein

$$G = S l_{ph} x_p u_h$$

eine solche Function, welche durch die beiden Substitutionen

$$x_i = \sum_k \alpha_{ki} \xi_k, \quad v_k = \sum_i \alpha_{ki} u_i$$

in

$$G' = S l'_{ph} \xi_p v_h$$

übergeführt wird.

Vermöge der Gleichung $G' = G$ folgt aus der Lehre von den Zwischenformen, weil

$$D_{ik}G' = \sum_h \frac{\partial G'}{\partial \alpha_{ih}} \alpha_{kh}$$

ist,

$$\sum_h \frac{\partial G'}{\partial \alpha_{ih}} \alpha_{kh} = \xi_i \frac{\partial G'}{\partial \xi_k} - \frac{\partial G'}{\partial v_i} v_k.$$

Dies festgestellt, sei Π eine Function der Coefficienten von G ; dann ist

$$\begin{aligned} \sum_h \frac{\partial \Pi'}{\partial \alpha_{ih}} \alpha_{kh} &= S \frac{\partial \Pi'}{\partial l'_{ab}} \left[\sum_h \frac{\partial G'}{\partial \alpha_{ih}} \alpha_{kh} \right]_{\xi_a v_b} \\ &= S \frac{\partial \Pi'}{\partial l'_{ab}} \left[\xi_i \frac{\partial G'}{\partial \xi_k} - \frac{\partial G'}{\partial v_i} v_k \right]_{\xi_a v_b} \\ &= \sum_h \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial l'_{ia}} l'_{kh} - l'_{ih} \frac{\partial \Pi'}{\partial l'_{ka}} \right). \end{aligned}$$

Wenn daher die rechte Seite dieser Gleichung für jedes i und k verschwindet, so ist Π absolute Invariante von G , und umgekehrt.

Die absoluten Invarianten von G , unter Voraussetzung obiger Transformation, sind also durch das Gleichungssystem

$$(A.) \quad \delta_{ik} \Pi = \sum_{\lambda} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial l_{i\lambda}} l_{k\lambda} - l_{i\lambda} \frac{\partial \Pi}{\partial l_{\lambda k}} \right) = 0$$

definiert, und es lässt sich nun zunächst leicht zeigen, dass G bei obiger Transformation auch *nur* absolute Invarianten besitzt.

Um dies zu beweisen, setze man die rationale Function Π gleich dem Quotienten aus zwei von gemeinsamen veränderlichen Factoren befreiten ganzen Functionen. Dann erhält man nach bekannten Schlüssen für diese ein System von Differentialgleichungen

$$\delta_{ik} P = \varrho_{ik} P,$$

wo die Factoren ϱ sämmtlich constant sind. Wir werden nun zeigen, dass dieselben alle Null sein müssen, woraus dann der vorstehende Satz folgt.

Aus der Definitionsgleichung

$$\delta_{ik} G = x_i \frac{\partial G}{\partial x_k} - \frac{\partial G}{\partial u_i} u_k$$

zieht man leicht die folgende

$$(B.) \quad \delta_{\rho\lambda} \delta_{ik} G = \delta_{ik} \delta_{\rho\lambda} G = \binom{g}{k} \delta_{i\lambda} G - \binom{h}{i} \delta_{\rho k} G,$$

welche nun auch für jede beliebige Function P gilt. Aus den obigen Differentialgleichungen folgt jetzt $0 = \binom{g}{k} \varrho_{i\lambda} P - \binom{h}{i} \varrho_{\rho k} P$, also, wenn nicht $P = 0$ ist, was wir ausschliessen, $\binom{g}{k} \varrho_{i\lambda} = \binom{h}{i} \varrho_{\rho k}$, woraus allgemein $\varrho_{ik} = \binom{i}{k} \varrho$, mithin $\delta_{ik} P = \binom{i}{k} \varrho P$ folgt. Da aber identisch $\sum \delta_{ii} P = 0$ ist, so folgt endlich $\varrho = 0$, w. z. b. w.

Vergleicht man diese Resultate mit dem Schlusse des vorigen art., so folgt, dass jede Invariante einer bilinearen Zwischenform von F , mit Rücksicht auf die den Zwischenformen eigenthümliche Transformation gebildet, auch Invariante von F selbst ist.

Es ist sehr leicht, Invarianten von G zu erhalten. Sei

$$H = S \mathfrak{S}_{\rho\lambda} x_{\rho} u_{\lambda}$$

eine derselben Transformation wie G unterworfenen Function oder $= G$ selbst. Dann ist nach art. V.

$$\ell'_{ik} = S l_{gk} \alpha_{ig} \frac{\partial \log r}{\partial \alpha_{kh}},$$

$$\mathfrak{G}'_{ik} = S \mathfrak{G}_{gk} \alpha_{ig} \frac{\partial \log r}{\partial \alpha_{kh}},$$

mithin

$$(C.) \quad \sum_a \ell'_{ia} \mathfrak{G}'_{ak} = S \left(\sum_{g,h} l_{ga} \mathfrak{G}_{ah} \right) \cdot \alpha_{ig} \frac{\partial \log r}{\partial \alpha_{kh}}.$$

Wenn daher eine bloss aus Coefficienten von G gebildete Function $f(\overline{\ell'_{ik}})$ die Eigenschaft hat, dass

$$f(\overline{\ell'_{ik}}) = f(\overline{\ell_{ik}})$$

ist, so ist auch

$$f\left(\overline{\sum_a \ell'_{ia} \mathfrak{G}'_{ak}}\right) = f\left(\overline{\sum_a \ell_{ia} \mathfrak{G}_{ak}}\right).$$

Nun findet man leicht, dass $\sum \ell'_{ii} = \sum \ell_{ii}$ ist; nimmt man daher das erstemal $H = G$, und dann neue, sich von selbst ergebende Formen für H , so erhält man folgende Reihe von Invarianten von G , die nach dem Obigen sämmtlich absolute sind:

$$(D.) \quad \begin{cases} \sum_i \ell_{ii} \\ \sum_i \sum_a \ell_{ia} \ell_{ai} \\ \sum_i \sum_{ab} \ell_{ia} \ell_{ab} \ell_{bi} \\ \sum_i \sum_{abc} \ell_{ia} \ell_{ab} \ell_{bc} \ell_{ci} \end{cases}$$

u. s. w.

Ein zweites Verfahren ergibt sich aus den Differentialgleichungen (A.). Da nämlich aus diesen

$$\frac{\partial \delta_{ik} \Pi}{\partial \ell_{ab}} = \delta_{ik} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \ell_{ab}} \right) + \binom{a}{k} \frac{\partial \Pi}{\partial \ell_{ib}} - \binom{b}{i} \frac{\partial \Pi}{\partial \ell_{ak}}$$

folgt, so ist identisch

$$\sum_a \frac{\partial \delta_{ik} \Pi}{\partial \ell_{aa}} = \delta_{ik} \left(\sum_a \frac{\partial \Pi}{\partial \ell_{aa}} \right).$$

Wenn daher Π eine Lösung des Systems (A.) ist, so ist auch

$$\theta \Pi = \sum_a \frac{\partial \Pi}{\partial \ell_{aa}}$$

eine solche, und hieraus können durch Wiederholung noch weitere Lösungen $\theta \theta \Pi = \theta^2 \Pi$, $\theta^3 \Pi$ u. s. w. folgen.

Nun bestätigt man ohne Weiteres, dass $\mathcal{A} = \sum \pm l_{11} l_{22} \dots l_{nn}$ den

Gleichungen (A.) genügt. Folglich werden dieselben für jeden constanten Werth von α auch befriedigt durch

$$\begin{vmatrix} l_{11} - \alpha & l_{12} & \dots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} - \alpha & \dots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} - \alpha \end{vmatrix} = \mathcal{A}(\alpha),$$

worin n offenbar voneinander unabhängige Lösungen enthalten sind.

Die Wurzeln der Gleichung $\mathcal{A}(\alpha) = 0$ sind ebenfalls Invarianten von G , wie man mittelst der Differentialgleichungen (A.), denen $\mathcal{A}(\alpha)$ und seine nach α genommenen Derivirten für jedes α genügen, leicht bestätigt. Zwischen diesen Wurzeln und den unter (D.) angegebenen Invarianten besteht ein sehr einfacher Zusammenhang, den zuerst Herr Borchardt (Bd. 30 dieses Journals pag. 38) gefunden hat, und welcher sich auch aus dem Folgenden ergibt.

Wir werden nämlich zeigen, dass die vorausgesetzte Substitution stets so gewählt werden kann, dass G' die Form

$$G' = \sum \omega_i \xi_i v_i$$

annimmt, und dass alsdann die Coefficienten ω die Wurzeln der Gleichung $\mathcal{A}(\alpha) = 0$ werden. Ist dies bewiesen, so wird $l'_{ii} = \omega_i$, $l'_{ik} = 0$, und die unter (D.) gegebenen Invarianten werden:

$$\sum l_{ii} = \sum l'_{ii} = \sum \omega, \quad \sum_{ia} l_{ia} l_{ai} = \sum \omega^2, \quad \sum_{ia} l_{ia} l_{ab} l_{bi} = \sum \omega^3, \quad \text{u. s. w.}$$

Da allgemein

$$\sum_k l_{ik} \alpha_{kh} = \sum_g \alpha_{ig} l_{gh}$$

ist, so ist zur Ausführbarkeit obiger Transformation von G für jedes i das Gleichungssystem

$$\sum_g \alpha_{ig} l_{gh} = \alpha_{ih} \omega_i$$

erforderlich. Also müssen die Grössen ω die Wurzeln der Gleichung $\mathcal{A}(\alpha) = 0$, oder es muss identisch

$$\mathcal{A}(\alpha) = (\omega_1 - \alpha)(\omega_2 - \alpha) \dots (\omega_n - \alpha)$$

sein. Sind die ω dieser Bedingung gemäss gewählt, so lassen sich die Transformationsbedingungen für jedes i befriedigen. Daraus folgt aber, dass in $\mathcal{A}(\alpha)$ alle voneinander unabhängigen Invarianten von G enthalten sind und die Anzahl derselben n ist. Endlich folgt für das System (A.), dessen Vollständigkeit durch die Gleichung (B.) nach-

gewiesen ist, dass dasselbe genau n überzählige Gleichungen enthält. In der That findet man leicht, dass der Ausdruck

$$\sum \mu_{ik} \delta_{ik} \Pi$$

für jede Function Π verschwindet, wenn man die Coefficienten μ aus einer der folgenden Gleichungen wählt:

$$\mu_{ik} = \binom{i}{k}$$

$$\mu_{ik}^{(1)} = l_{ik}$$

$$\mu_{ik}^{(2)} = \sum_a l_{ia} l_{ak}$$

$$\mu_{ik}^{(3)} = \sum_{ab} l_{ia} l_{ab} l_{bk}$$

u. s. w.

Die invariantiven Eigenschaften dieser ebenfalls zuerst von Herrn Borchardt (in der oben erwähnten Abhandlung) eingeführten Ausdrücke ergeben sich ohne Weiteres aus (C.). Mittelst derselben findet man leicht, dass allgemein $\mu_{ik}^{(m)}$ der Coefficient von $\frac{1}{x^{m+1}}$ in der absteigenden Entwicklung von

$$-\frac{\partial \log \mathcal{A}(x)}{\partial l_{ki}}$$

ist. Bei der Wichtigkeit der Ausdrücke μ_{ik} für die Untersuchung der Gleichung $\mathcal{A}(x) = 0$ war es nicht ohne Interesse, die eigenthümliche Bedeutung nachzuweisen, welche ihnen in der Theorie der bilinearen Functionen zukommt.

Zürich, 27. December 1867.

XVI.

Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke.

(Mathematische Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1868, S. 119—176.)

Die vorliegende Abhandlung beschäftigt sich mit der allgemeinen Theorie geodätischer Dreiecke, ohne irgend eine beschränkende Voraussetzung über die Länge ihrer Seiten oder die Oberfläche, in welcher sie enthalten sind. Die Untersuchung solcher Dreiecke ist bisher nur für die beiden besondern Fälle ausgeführt worden, welche sich in der praktischen Geodäsie darbieten, nämlich hauptsächlich in einer sehr umfangreichen Literatur für das von der Kugel nur wenig abweichende abgeplattete Rotationssphäroid, für welches namentlich Gauß, Bessel, Jacobi und in der neuesten Zeit General Baeyer und Hansen Annäherungsformeln abgeleitet haben, die für numerische Zwecke nichts zu wünschen übrig lassen. Der zweite Fall, welcher noch behandelt worden ist, betrifft die unendlich kleinen geodätischen Dreiecke auf beliebigen Oberflächen, deren Theorie Gauß in seinen *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (art. XXIII bis Ende) entwickelt hat.

Die allgemeine Frage, welche im Folgenden behandelt wird, ist dagegen noch nicht berücksichtigt worden, obgleich der genaue Zusammenhang derselben mit der Lehre von den aufeinander abwickelbaren Flächen, und die Aufforderung von Gauß selbst zur weitem Ausbildung dieser Theorie (l. c. art. XIII) wohl geeignet sein konnten, die Aufmerksamkeit auf ein Problem zu lenken, welchem, für einen besondern Fall, ein großer Theil jener berühmten Abhandlung gewidmet ist.

Daß gleichwohl der Versuch einer an keinerlei Einschränkungen gebundenen Begründung der höhern Geodäsie bisher unterblieben ist, dürfte sich zum Theil dadurch erklären, daß die bisherigen Untersuchungen von zu specieller und im Zusammenhange damit von zu verwickelter Natur gewesen sind, um die Möglichkeit einer gesetzmäßigen Behandlung dieser Fragen erkennen zu lassen. In der That geht aus diesen Untersuchungen zwar hervor, welche Größen — näm-

lich die Seiten und ihre Azimuthe an den Ecken — zur vollständigen Kenntniß eines geodätischen Dreiecks erforderlich sind, aber nicht, welche mit diesen Gröſsen verbundenen Functionen eingeführt werden müssen, um zu den Grundformeln für eine Trigonometrie beliebiger krummer Oberflächen zu gelangen.

Ich betrachte es nun als das Hauptresultat der folgenden Untersuchungen, daſs, ebenso wie die Lehre von den nach dem Newton'schen Gesetze wirkenden Anziehungskräften von einer einzigen Function, dem Potential abhängt, die Geodäsie einer beliebigen krummen Oberfläche auf die Theorie einer einzigen Function von vier Variabeln zurückkommt, welche ich die reducirte Länge eines geodätischen Bogens nenne und durch $(o\ o_1)$ bezeichne, wenn o und o_1 die Endpunkte dieses Bogens sind.

Ist diese Gröſse als Function der Coordinaten von o und o_1 bestimmt, so liefern meine Untersuchungen unmittelbar die endlichen Formeln für sämmtliche Winkel und Azimuthe eines geodätischen Dreiecks, und die vollständigen Differentiale dieser nämlichen Gröſsen so wie der drei Seiten (Abschnitt IV. art. 23).

Diese Function wird, mit Ausnahme eines besonders zu erledigenden Falles, auſser den zugehörigen Grenz- und Stetigkeitsbedingungen durch eine partielle Differentialgleichung dritter Ordnung bestimmt, welche nicht linear ist, und demnach bei dem gegenwärtigen Standpunkte der Lehre von den partiellen Differentialgleichungen allerdings einer allgemeinen Behandlung kaum zugänglich sein wird. Gleichwohl dürften sich auf dem durch die gegenwärtigen Untersuchungen eröffneten Wege selbst für die Ableitung von angenäherten Resultaten Vortheile darbieten, wenn man, statt auf diese Differentialgleichung, direct auf das System von Gleichungen operirt, aus welchem sie hervorgeht (Abschn. III. art. 20. A. B. C.).

Die Function $(o\ o_1)$, welche hier reducirte Länge genannt wird, ist nun, bis auf die Variabeln, von denen sie abhängt, nichts anderes als die Gröſse, welche Gauß (l. c. XIX) durch m bezeichnet, und von welcher beim Übergange von beliebigen Coordinaten p, q zu geodätischen Polarcoordinaten r, φ (art. XXII) beiläufig bemerkt wird, daſs man sie ebenfalls erhalten kann, sobald r und φ als Functionen von p und q bestimmt sind. Hierzu ist nur die Integration zweier partiellen Differentialgleichungen der ersten Ordnung erforderlich, von denen die eine in den Derivirten vom zweiten Grade, die andere linear ist. Weingarten hat zuerst bemerkt (Borchardt's Journal LXII. pag. 63), daſs die erste von diesen Gleichungen mit derjenigen übereinstimmt, von welcher in der Jacobi-Hamilton'schen Theorie die Bestimmung der

geodätischen Linien abhängig gemacht wird, und man aus einer sogenannten vollständigen Lösung derselben eine vollständige Lösung der zweiten Gleichung erhält, indem man nach der willkürlichen Constante differentiirt und mit einer neuen Constante multiplicirt.

Es kann demnach den Anschein haben, als ob durch die Zurückführung von m auf eine nicht lineare partielle Differentialgleichung dritter Ordnung die Einfachheit der Bedingungen ohne Noth geopfert werde. Dies ist indessen nur solange der Fall, als man, wie am angeführten Orte, statt der beiden Endpunkte o und o_1 nur den ersten und das Azimuth der geodätischen Linie oo_1 in ihm als gegeben betrachtet. Will man die unter dieser Voraussetzung gefundenen Resultate für den Zweck der gegenwärtigen Untersuchung brauchbar machen, so muß m als Function der Coordinaten von o und o_1 dargestellt, also das Azimuth in o eliminirt werden, und dies wird gerade durch, die erwähnte Differentialgleichung dritter Ordnung geleistet.

Zu dieser und den übrigen Differentialgleichungen, welche sich in den folgenden Untersuchungen darbieten, gehören Stetigkeitsbedingungen, welche aus der Lehre von den geodätischen Linien abgeleitet werden müssen. Aus diesem Grunde wurde es nothwendig, die Bedingungen, welche zum Verschwinden der ersten Variation eines Bogens erforderlich sind, vollständig herzustellen. Dieselben bestehen 1) in der bekannten Differentialgleichung und 2) in den Stetigkeitsbedingungen, welche erforderlich sind, damit der vom Integralzeichen freie Theil der ersten Variation für sich $= 0$ werde. Untersuchungen über die zum Verschwinden dieses Theiles der ersten Variation erforderlichen Stetigkeitsbedingungen und die mit demselben verträglichen Unstetigkeiten habe ich bisher nirgendwo gefunden, obgleich die vollständige Kenntniss dieser Verhältnisse für Probleme der Variationsrechnung von der größten Wichtigkeit ist, und ihre Nichtberücksichtigung zu Widersprüchen führen kann.

Da außerdem im Folgenden die Differentialgleichungen für geodätische Linien in drei verschiedenen Formen benutzt werden, und zwei derselben von den sonst üblichen abweichen, so mußte eine möglichst gedrängte Ableitung derselben vorangeschickt werden.

Inhalt.

Erster Abschnitt. Über die geodätischen Linien im Allgemeinen.

1. Coordinatensysteme im Raume und auf der Fläche S . Stetigkeitsbedingung für das letztere. Die Richtungen in der Tangentialebene werden durch Azimuthe bestimmt.
2. Allgemeine Form der Differentialgleichungen für geodätische Linien. Hilfsgrößen und Formeln.
3. Die vollständigen Bedingungen für geodätische Linien: Stetigkeitsbedingung, Theorem von Gauß.
4. Geodätische Polarcoordinaten. Die reducirte Länge eines geodätischen Bogens. Stetigkeitsbedingungen für dieselbe.

Zweiter Abschnitt. Theorie der geodätischen Dreiecke.

5. Bezeichnungen für die Seiten, Winkel und die Azimuthe an den Ecken.
6. Die Derivirten nach der Richtung von ∂b_a .
7. Die Derivirten nach der Richtung von ∂c_a .
8. Relationen 1) zwischen den Ortsänderungen in den Seiten und den Differentialen der unabhängigen Variablen, 2) zwischen den partiellen und den Richtungsderivirten. Das vollständige Differential ausgedrückt durch Richtungsderivirten. Die vollständigen Differentiale der Länge eines geodätischen Bogens und seiner Azimuthe in den Endpunkten.
9. Die partiellen Differentialgleichungen für die nämlichen Größen. Integrabilitätsbedingungen für den Bogen. Theorem über die reducirte Länge.
10. Integrabilitätsbedingung für die Azimuthe. Differentialgleichung für die reducirte Länge; das Krümmungsmaß.
11. Die übrigen Integrabilitätsbedingungen für die Azimuthe. Einfachste Form derselben.
12. Entwickelte Form der Integrabilitätsbedingungen.
13. Aufgabe der weitem Theorie.

Dritter Abschnitt. Theorie der reducirten Länge eines geodätischen Bogens.

14. Lehrsatz von Gauß über das Krümmungsmaß. Dasselbe Theorem und seine Umkehrung für die reducirte Länge.
15. Definition der reducirten Abscisse.
16. Allgemeine Eigenschaften derselben.
17. Über das Verschwinden der reducirten Abscisse. Geometrische Deutung der Resultate.
18. Unterscheidung der Fälle, wo das Krümmungsmaß negativ oder positiv ist. Theoreme von Jacobi.
19. Differentialgleichung dritter Ordnung für die Wurzeln der Gleichung $[\alpha\beta] = 0$. Integration derselben.
20. Bedingungen für die reducirte Länge, welche nur die Coordinaten der Endpunkte enthalten. Ausnahmefall.
21. Der Ausnahmefall wird durch das Verschwinden der Invariante bedingt.
22. Bestimmung der Flächengattungen, bei denen dieser Ausnahmefall eintritt.

Vierter Abschnitt. Geodätische Classification der krummen Oberflächen.

23. Die Grundformeln.
24. Stetige Ortsänderung eines geodätischen Dreiecks ohne Änderung seiner Elemente.
25. Vereinfachung der Bedingungen für dieselbe.
26. Die erste Flächengattung.
27. Die zweite Flächengattung.
28. Die dritte Flächengattung.
29. Die vierte Flächengattung. Sie bildet den Ausnahmefall des dritten Abschnittes.

Erster Abschnitt.

Über die geodätischen Linien im Allgemeinen.

1.

Ich setze voraus, daß der Raum auf drei rechtwinklige Axen der x, y, z bezogen ist, welche in völlig bestimmter Weise orientirt sind, etwa dadurch, daß außer dem Anfangspuncte noch die drei Puncte gegeben werden, in welchen die unendlich entfernte Himmelskugel von den Richtungen der wachsenden x, y und z getroffen wird.

Sodann sei eine krumme Oberfläche S vorgelegt. Da die hier beabsichtigten Untersuchungen sich nur auf solche Verhältnisse beziehen, welche ungeändert bestehen bleiben, wenn S ohne Dehnung beliebig verbogen wird, so würde es unzulänglich sein, diese Oberfläche durch eine einzige Gleichung zwischen x, y und z darzustellen. Wir setzen voraus, daß S durch drei Gleichungen

$$x = \varphi(p, q), \quad y = \psi(p, q), \quad z = \chi(p, q)$$

gegeben ist, in welchen p, q voneinander unabhängige Variablen bedeuten. Dann entsprechen jedem Puncte von S bestimmte Werthe von p, q , welche wir ebenfalls die Coordinaten dieses Punctes nennen, und umgekehrt entspricht jedem Werthepaar p, q ein bestimmter Punct von S , wenn, was bei Erörterungen dieser Art nothwendige Voraussetzung ist, mehrdeutige Ausdrücke durch Trennung ihrer Zweige auf eindeutige zurückgeführt werden.

Den Gleichungen $\partial p = 0, \partial q = 0$ entsprechen zwei sich gegenseitig durchdringende und die Oberfläche stetig bedeckende Kurvensysteme. Ich setze, was freisteht, voraus, daß jede Kurve dieser Systeme ihre Richtung nach der Stetigkeit ändert, solange S stetig gebogen ist, oder allgemeiner, um den Fall, wo S Kanten darbietet, mit zu umfassen, daß die beiden Scheitelwinkel, unter denen ein Linienelement der Oberfläche von einer solchen Kurve geschnitten wird, nie voneinander verschieden sein sollen.

Um die in der Tangentialebene eines Punctes von demselben ausgehenden Richtungen voneinander zu unterscheiden, zählen wir in dieser Ebene um den Berührungspunkt herum Azimuthe, deren fester Schenkel die Richtung der von dort aus wachsenden p ist, und welche für alle Puncte der Oberfläche in der nämlichen Richtung wachsen.

2.

Dies festgestellt, bezeichnen wir 1) durch ω das Azimuth der wachsenden q , 2) durch $e\partial p$, $g\partial q$ die Wege, welche der Punct p, q zurücklegen würde, wenn nur eine seiner beiden Coordinaten p, q um ihr Differential wächst, so daß e, g positive Größen werden, endlich 3) durch ∂s das Linienelement, welches der Punct p, q beschreibt, wenn beide Änderungen zugleich stattfinden, und durch θ sein Azimuth. Dann folgt

$$\partial s^2 = e^2 \partial p^2 + 2eg \cos \omega \partial p \partial q + g^2 \partial q^2,$$

$$e \partial p = \frac{\sin(\omega - \theta)}{\sin \omega} \partial s,$$

$$g \partial q = \frac{\sin \theta}{\sin \omega} \partial s.$$

Wir werden nun aus den in der Einleitung angegebenen Gründen in verschiedenen Formen die Bedingungen dafür herstellen, daß ∂s die Fortsetzung einer bis an den Punct p, q reichenden geodätischen Linie wird.

Betrachtet man zunächst p und q als Functionen des Bogens s dieser Linie, so erhält man durch eine Rechnung, die wir übergehen dürfen, zwei Differentialgleichungen von der Form:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial s^2} = - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)^2 - 2 \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial q}{\partial s} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left(\frac{\partial q}{\partial s} \right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial s^2} = - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)^2 - 2 \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial q}{\partial s} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \left(\frac{\partial q}{\partial s} \right)^2,$$

von denen eine Lösung, nämlich die Gleichung

$$e^2 \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)^2 + 2eg \cos \omega \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial q}{\partial s} + g^2 \left(\frac{\partial q}{\partial s} \right)^2 = 1$$

bekannt ist. In Wirklichkeit liefert die Integration auf der rechten Seite eine willkürliche Constante; dieselbe muß aber $= 1$ gesetzt werden, wenn s die Bogenlänge der geodätischen Linie sein soll.

Die Coefficienten dieser Differentialgleichungen bilden ein System von Hülfsgrößen, welche bei jeder Untersuchung über geodätische Verhältnisse an Stelle der ersten Derivirten von e, g, ω eingeführt werden müssen; wir geben daher ihre Werthe in zwei Formen, indem wir in der zweiten Columnne

$$E = e^2, \quad F = eg \cos \omega, \quad G = g^2, \quad \Delta = EG - F^2$$

voraussetzen:

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{e} \frac{\partial e}{\partial p} + \frac{\cos \omega}{g \sin \omega} \left(\frac{\partial e}{\partial q} - \frac{\partial g \cos \omega}{\partial p} \right) = \frac{1}{2 \Delta} \left(G \frac{\partial E}{\partial p} + F \frac{\partial E}{\partial q} - 2 F \frac{\partial F}{\partial p} \right) \\
\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} &= \frac{e}{g \sin \omega} \left(\frac{\partial g \cos \omega}{\partial p} - \frac{\partial e}{\partial q} \right) = \frac{1}{2 \Delta} \left(2 E \frac{\partial F}{\partial p} - F \frac{\partial E}{\partial p} - E \frac{\partial E}{\partial q} \right) \\
\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{e \sin \omega} \left(\frac{\partial e}{\partial q} - \cos \omega \frac{\partial g}{\partial p} \right) = \frac{1}{2 \Delta} \left(G \frac{\partial E}{\partial q} - F \frac{\partial G}{\partial p} \right) \\
\left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{g \sin \omega} \left(\frac{\partial g}{\partial p} - \cos \omega \frac{\partial e}{\partial q} \right) = \frac{1}{2 \Delta} \left(E \frac{\partial G}{\partial p} - F \frac{\partial E}{\partial q} \right) \\
\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} &= \frac{g}{e \sin \omega} \left(\frac{\partial e \cos \omega}{\partial q} - \frac{\partial g}{\partial p} \right) = \frac{1}{2 \Delta} \left(2 G \frac{\partial F}{\partial q} - F \frac{\partial G}{\partial q} - G \frac{\partial G}{\partial p} \right) \\
\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial q} + \frac{\cos \omega}{e \sin \omega} \left(\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial e \cos \omega}{\partial q} \right) = \frac{1}{2 \Delta} \left(E \frac{\partial G}{\partial q} + F \frac{\partial G}{\partial p} - 2 F \frac{\partial F}{\partial q} \right).
\end{aligned}$$

Vertauscht man daher die Richtungen der wachsenden p und q mit einander, so vertauschen sich in den Coefficienten der Differentialgleichungen die Indices 1 und 2, e vertauscht sich mit g , und das von ∂p aus gezählte Azimuth θ von e vertauscht sich mit dem von ∂q aus gezählten Azimuth $\theta - \omega$.

Durch Umkehrung folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e}{\partial p} &= e \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} + g \cos \omega \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} & \frac{\partial e}{\partial q} &= e \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} + g \cos \omega \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\} \\
\frac{\partial g}{\partial p} &= e \cos \omega \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} + g \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\} & \frac{\partial g}{\partial q} &= e \cos \omega \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} + g \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \\
\frac{\partial \omega}{\partial p} &= -\sin \omega \left[\frac{e}{g} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \frac{g}{e} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right] & \frac{\partial \omega}{\partial q} &= -\sin \omega \left[\frac{g}{e} \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \frac{e}{g} \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right].
\end{aligned}$$

Aus den beiden letzten Formeln ziehen wir noch für eine spätere Anwendung (Zweiter Abschnitt, art. 10) die identische Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{g \sin \omega}{e} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right] - \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{g \sin \omega}{e} \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right] = \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{e \sin \omega}{g} \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right] - \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{e \sin \omega}{g} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right].$$

Wir benutzen endlich die obigen Formeln zur Herstellung der zweiten Derivirte einer beliebigen Function m von p und q nach s . Wird der Punkt p, q auf die oben bestimmte geodätische Linie beschränkt, so ergibt sich mit Rücksicht auf die Werthe von $\frac{\partial p}{\partial s}, \frac{\partial q}{\partial s}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial m}{\partial s} &= \frac{\sin(\omega - \theta)}{e \sin \omega} \frac{\partial m}{\partial p} + \frac{\sin \theta}{g \sin \omega} \frac{\partial m}{\partial q}, \\
\frac{\partial^2 m}{\partial s^2} &= \left(\frac{\sin(\omega - \theta)}{e \sin \omega} \right)^2 \left[\frac{\partial^2 m}{\partial p^2} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial m}{\partial p} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial m}{\partial q} \right] \\
&\quad + 2 \frac{\sin(\omega - \theta) \sin \theta}{e g \sin \omega} \left[\frac{\partial^2 m}{\partial p \partial q} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial m}{\partial p} - \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial m}{\partial q} \right] \\
&\quad + \left(\frac{\sin \theta}{g \sin \omega} \right)^2 \left[\frac{\partial^2 m}{\partial q^2} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial m}{\partial p} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial m}{\partial q} \right],
\end{aligned}$$

wozu wir noch die Identität

$$e^2 \left(\frac{\sin(\omega - \theta)}{e \sin \omega} \right)^2 + 2eg \cos \omega \frac{\sin(\omega - \theta) \sin \omega}{eg \sin \omega^2} + g^2 \left(\frac{\sin \theta}{g \sin \omega} \right)^2 = 1$$

fügen.

3.

Wir nehmen die vorangehende Untersuchung, welche die Bedingungen für geodätische Linien nicht vollständig enthält, von einem zweiten Gesichtspunkte auf, indem wir (vergl. Disqu. g. c. s. XVIII) nach den Gesetzen fragen, nach denen sich, an einer geodätischen Linie entlang, das Azimuth θ derselben ändert.

Für die erste Variation des Linienelementes erhält man, wenn ∂p , ∂q durch θ ausgedrückt werden,

$$\partial \delta s = e \cos \theta \partial \delta p + g \cos(\omega - \theta) \partial \delta q + \{ \sin(\omega - \theta) \cos \theta \delta \log e + \sin \theta \cos(\omega - \theta) \delta \log g - \sin \theta \sin(\omega - \theta) \delta \omega \} \frac{\partial s}{\sin \omega}.$$

Ist aber $\delta \sigma$ der Weg, um welchen der Punkt p , q bei der Variation verschoben wurde, ψ sein Azimuth, also

$$g \delta q = \frac{\sin \psi}{\sin \omega} \delta \sigma, \quad e \delta p = \frac{\sin(\omega - \psi)}{\sin \omega} \delta \sigma,$$

so wird

$$e \cos \theta \delta p + g \cos(\omega - \theta) \delta q = \cos(\psi - \theta) \delta \sigma,$$

mithin

$$\partial \delta s = \partial [\cos(\psi - \theta) \delta \sigma] - \delta p \cdot \partial e \cos \theta - \delta q \cdot \partial g \cos(\omega - \theta) + \{ \sin(\omega - \theta) \cos \theta \delta \log e + \sin \theta \cos(\omega - \theta) \delta \log g - \sin \theta \sin(\omega - \theta) \delta \omega \} \frac{\partial s}{\sin \omega}.$$

Soll nun die Verbindungslinie s zweier festen Punkte o , o_1 eine geodätische sein, so muß das von o bis o_1 erstreckte Integral dieses Ausdrucks bei jeder Wahl von δp , δq verschwinden, durch welche der Zusammenhang der Verbindungslinie nicht aufgehoben wird. Daraus folgt zunächst

$$0 = -\delta p \cdot \frac{\partial e \cos \theta}{\partial s} - \delta q \cdot \frac{\partial g \cos(\omega - \theta)}{\partial s} + \frac{\sin(\omega - \theta) \cos \theta}{\sin \omega} \delta \log e + \frac{\sin \theta \cos(\omega - \theta)}{\sin \omega} \delta \log g - \frac{\sin \theta \sin(\omega - \theta)}{\sin \omega} \delta \omega,$$

für jedes δp , δq .

Ist diese Bedingung erfüllt, so wird die Variation des Bogens oo_1 :

$$\delta s = [\cos(\psi - \theta) \delta \sigma]_o^{o_1},$$

wo die Zeichen an den Klammern andeuten, daß man zu den Grenzen der Integration übergehen soll. An diesen Grenzen ist $\delta \sigma = 0$. Aber dies reicht zum Verschwinden des vorstehenden Ausdrucks nicht aus,

sondern es ist hierzu noch außerdem erforderlich, daß $\cos(\psi - \theta) \delta\sigma$ zwischen den Grenzen stetig sei, und zwar für jede zulässige Variation der Linie oo_1 .

Wir legen nun, wo s eine Kante der Oberfläche überschreitet, $\delta\sigma$ in dieselbe, und nehmen $\delta\sigma$ und ψ allenthalben stetig an, wodurch mit Rücksicht auf die stetige Richtungsänderung der Linien $\partial q = 0$, von denen aus das Azimuth ψ gezählt wird, alle bei der Variation zu berücksichtigenden Bedingungen in hinreichender Allgemeinheit befriedigt sind. Dann erkennt man sofort, daß zum Verschwinden der ersten Variation noch die Stetigkeit von θ an s entlang erforderlich ist. Da nun nach art. 1 der eine Schenkel $e\partial p$ von θ stets einer Kurve angehört, welche kein Linienelement von S anders als unter beiderseits gleichen Scheitelwinkeln schneidet, so gilt dasselbe auch vom andern Schenkel ∂s .

Eine geodätische Linie ändert daher, solange S stetig gebogen ist, ihre Richtung ebenfalls nach der Stetigkeit, und bildet beim Übergange über eine Kante von S mit derselben beiderseits gleiche Scheitelwinkel.

Setzt man nun in der obigen allgemeinen Bedingungsgleichung den Factor von δp gleich Null, und schafft dann die Derivirten von e, g und ω mittelst der in art. 2 gegebenen Ausdrücke weg, so erhält man nach einer einfachen Reduction

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{g}{e^2} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \sin(\theta - \omega) - \frac{1}{e} \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\} \sin \theta,$$

mithin durch Vertauschung der Richtungen von ∂p und ∂q die übrigens nicht wesentlich verschiedene Formel

$$\frac{\partial(\theta - \omega)}{\partial s} = \frac{e}{g^2} \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \sin \theta - \frac{1}{g} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \sin(\theta - \omega),$$

welches die verlangten Bedingungsgleichungen in einer für die folgenden Anwendungen geeigneten Form sind.

Von den verschiedenen Folgerungen, welche sich an den oben stehenden Ausdruck von δs knüpfen lassen, müssen wir noch eine hervorheben. Ersetzt man den geodätischen Bogen oo_1 , was ebenfalls eine Variation desselben ist, durch einen unendlich benachbarten geodätischen Bogen oo^1 , und ist ψ das Azimuth des Weges $o_1 o^1$, so wächst oo_1 um $\delta s = \cos(\psi - \theta) \cdot o_1 o^1$. Soll' daher oo_1 ungeändert bleiben, so muß $\cos(\psi - \theta) = 0$, also $o_1 o^1$ in o_1 zu oo_1 senkrecht sein. Daraus ergibt sich der schöne Satz, den Gauß im art. XV

seiner Disquis. gen. c. s. c. auf zwei Arten abgeleitet hat, und der zu den Fundamenten unserer Untersuchungen gehört:

Dreht sich eine geodätische Linie von unveränderlicher Länge um einen festen Endpunct, so bleibt sie fortwährend senkrecht zu der vom beweglichen Endpuncte beschriebenen Kurve.

Diese Kurve nennen wir einen geodätischen Kreis, und den festen Endpunct der geodätischen Linie sein Centrum.

4.

Werden von einem festen Punkte o auf S unter allen Azimuthen geodätische Linien gezogen, so ist durch die Angabe des Azimuthes φ und der von o aus gezählten Länge r einer solchen Linie die Lage ihres Endpunctes o_1 auf S völlig bestimmt. Betrachtet man nach Gauß (Disqu. g. XV. XVI) diese beiden voneinander unabhängig veränderlichen Größen als Coordinaten des Punctes o_1 , so entspricht der Gleichung $\partial\varphi = 0$ die Schaar aller von o ausgehenden geodätischen Linien, und der Gleichung $\partial r = 0$ das System aller geodätischen Kreise, deren Centrum der feste Punkt o ist.

Von diesen beiden Kurvenschaaren hat nach dem vorigen art. die erste, und weil beide sich unter rechten Winkeln durchdringen, auch die zweite die in art. 1 von den Kurvenschaaren $\partial p = 0$, $\partial q = 0$ geforderte Eigenschaft, kein Linienelement von S anders als unter beiderseits gleichen Scheitelwinkeln zu schneiden.

Wir zählen nun auf jedem geodätischen Kreise von dem $\varphi = 0$ entsprechenden Punkte aus Bögen σ , die auf allen Kreisen in der nämlichen Richtung wachsen, und wählen diese Richtung so, daß sie für unendlich kleine Werthe von r mit der Richtung der wachsenden φ übereinstimmt. Dann wird σ für jeden geodätischen Kreis eine Function von φ , und wenn ihre Derivirte

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = m$$

gesetzt wird, m der Factor, mit welchem man den Centriwinkel $\partial\varphi$ multipliciren muß, um das ihm gegenüberliegende Element $\partial\sigma$ des geodätischen Kreises vom Halbmesser r zu erhalten.

Diese Größe m nennen wir, was sich durch die Eigenschaften derselben (Zweiter Abschn., art. 9 und dritter Abschnitt) rechtfertigen wird, die reducirte Länge des geodätischen Bogens r , und bezeichnen sie, wo das Centrum o vom beschreibenden Punkte o_1 unterschieden werden muß, durch

$$(o o_1),$$

so daß also $(o_1 o)$ die reducirte Länge von r unter der umgekehrten Voraussetzung sein wird, daß r sich um o_1 als festen Endpunct dreht, und der vorhin unbewegliche Punct o einen geodätischen Kreis beschreibt.

Jedem bestimmten Werthe von r entspricht ein endlicher Werth von m , und beide ändern sich zugleich nach der Stetigkeit. Würde nämlich $m = \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}$ irgendwo unendlich, so müßte dort entweder der geodätische Kreis den Leitstrahl r berühren, statt ihn senkrecht zu schneiden, oder es würde die geodätische Linie r von einer unendlich benachbarten in o berührt, und dann wäre an r entlang stets $m = \infty$. Würde m in einem Puncte π von r unstetig, so würde diese geodätische Linie, wenn sie unendlich wenig um o gedreht wird, in zwei bei π getrennte Stücke zerfallen, also das bis o reichende Stück nicht über sein bei π stattfindendes Ende hinaus als geodätische Linie fortgesetzt werden können.

Das Quadrat des Linienelementes wird jetzt

$$\partial s^2 = \partial r^2 + m^2 \partial \varphi^2;$$

ist Θ das Azimuth von ∂s , und in der Weise gezählt, daß die Azimuthe der Linienelemente, welche den wachsenden r und φ entsprechen, beziehungsweise 0 und $\frac{\pi}{2}$ werden, so wird

$$\partial r = \cos \Theta \cdot \partial s, \quad m \partial \varphi = \sin \Theta \cdot \partial s.$$

Soll endlich ∂s die Fortsetzung einer bis an o_1 reichenden geodätischen Linie sein, welche dort unter dem Azimuth Θ eintrifft, so ergibt sich am einfachsten auf directem Wege die Zunahme dieses Azimuths bis zum Endpuncte von ∂s

$$\partial \Theta = - \sin \Theta \frac{\partial \log m}{\partial r} \partial s,$$

(Disqu. g. c. s. c. XIX).

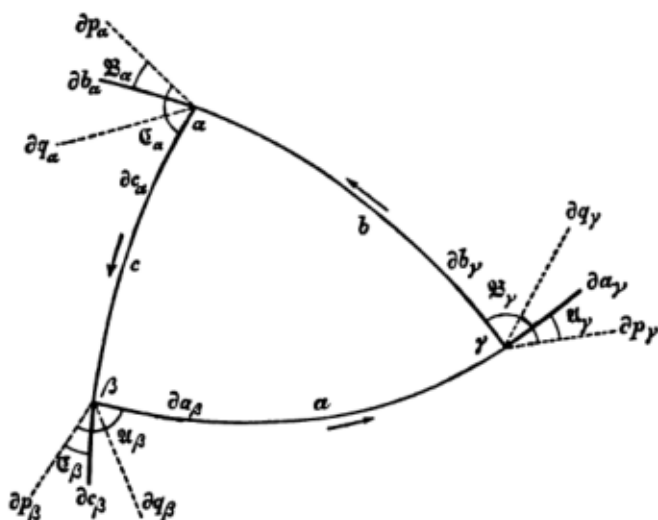
Die Untersuchung der zweiten Variation zeigt ferner, daß ein wenn auch noch so kleines Stück von r niemals die kürzeste Verbindungslinie seiner Endpuncte sein kann, wenn es einen Punct enthält, in welchem $\frac{1}{m} \frac{\partial m}{\partial r}$ unstetig wird. Eine kürzeste Verbindungslinie zweier Puncte geht also an jedem Puncte der bezeichneten Art vorbei; trifft eine geodätische Linie in ihrem Verlaufe auf einen solchen Punct, so wird durch die hier geforderte Stetigkeit von $\frac{1}{m} \frac{\partial m}{\partial r}$ ihre weitere Fortsetzung ausgeschlossen (III. Abschnitt, artt. 15. 16).

Zweiter Abschnitt.

Theorie der geodätischen Dreiecke.

5.

Auf der Oberfläche S sei ein geodätisches Dreieck vorgelegt, dessen Seiten a, b, c sind. Von den beiden Theilen der Fläche, welche an diese Figur angrenzen, nennen wir einen das Innere des Dreiecks, und bezeichnen nun die im Innern des Dreiecks den Seiten a, b, c gegenüberliegenden Winkel durch α, β, γ die Coordinaten ihrer Ecken durch $p_\alpha, q_\alpha; p_\beta, q_\beta; p_\gamma, q_\gamma$, überhaupt den Werth, welchen eine veränderliche Gröfse in einer dieser Ecken annimmt, durch Anhängung des Index α, β, γ .



Wir zählen ferner auf jeder Seite von einem willkürlichen Anfangspunkte aus Abscissen, welche in derjenigen Richtung wachsen, für welche das Innere des Dreiecks auf der Seite der wachsenden Azimuthe liegt. Sind auf der Seite a die Abscissen von β und γ gleich a_β, a_γ ;

„ b „ „ γ „ α „ b_γ, b_α ;
 „ c „ „ α „ β „ c_α, c_β ;

ferner die Azimuthe ihrer positiven Incremente

$$\partial a_\beta, \partial a_\gamma, \partial b_\gamma, \partial b_\alpha, \partial c_\alpha, \partial c_\beta$$

gleich

$$U_\beta, U_\gamma, B_\gamma, B_\alpha, U_\alpha, U_\beta,$$

so bestehen zwischen diesen und den Winkeln des Dreiecks die Relationen:

$$U_\alpha - B_\alpha + \alpha = \pi, \quad U_\beta - U_\beta + \beta = \pi, \quad B_\gamma - U_\gamma + \gamma = \pi$$

so daß die Winkel des Dreiecks mit den Azimuthen zugleich gegeben sind. Endlich werden die reducirten Längen der Seiten a, b, c (art. 4) durch

$$(\beta\gamma), (\gamma\alpha), (\alpha\beta) \text{ oder durch } (\gamma\beta), (\alpha\gamma), (\beta\alpha)$$

bezeichnet, jenachdem diese Seiten sich um die Punkte β, γ, α oder um γ, α, β drehen.

Abgesehen von den reducirten Längen der Seiten, mit denen wir uns im folgenden Abschnitte beschäftigen werden, sind hiernach für die vollständige Kenntniss eines geodätischen Dreiecks 9 Elemente erforderlich, nämlich die 6 Azimuthe an den Ecken und die drei Seiten.

Diese 9 Gröfsen sind Functionen der Coordinaten der drei Ecken, und wir stellen uns die Aufgabe, ihre partiellen Derivirten nach diesen Variabeln zu bestimmen, deren Anzahl = 54 ist.

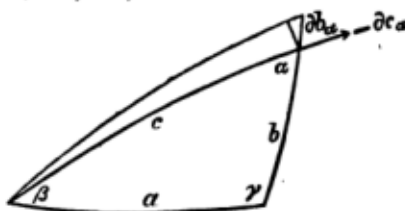
Diese Aufgabe wird gelöst sein, wenn wir die Derivirten nach den 6 Abscissen $a_\beta, a_\gamma, \dots$ ermittelt haben, da jene sich aus diesen zusammensetzen lassen (artt. 8. 9).

In Folge unserer Bezeichnungen reicht es aber für diesen Zweck aus, die Derivirten nach b_α und c_α herzustellen, da aus diesen die übrigen sich durch cyklische Vertauschung ergeben.

6.

Wächst b_α um ∂b_α , so bleiben $\mathfrak{A}_\beta, \mathfrak{A}_\gamma, \mathfrak{B}_\gamma, \gamma$ und a ungeändert; c dreht sich um die Ecke β und überstreicht dort einen Winkel, der $\partial\varphi$ heißen mag.

Die Zunahmen von $b, \beta, \mathfrak{C}_\beta$ werden $\partial b_\alpha, \partial\varphi, \partial\varphi$; ferner wird $(\beta\alpha)\partial\varphi = \partial b_\alpha \cdot \sin \alpha, \partial c = \partial b_\alpha \cdot \cos \alpha$, und weil c_α gegen die Richtung vom Drehungspuncte β nach dem beschreibenden Punkte α wächst,



$$\partial c_\alpha = \partial \mathfrak{B}_\alpha - \partial \mathfrak{C}_\alpha = \sin \alpha \frac{\partial \log(\beta\alpha)}{\partial c_\alpha} \partial b_\alpha.$$

Endlich wird nach art. 3 die Zunahme des Azimuthes $\mathfrak{B}_\alpha$, vom Anfang bis zum Ende des Elementes ∂b_α von b :

$$\partial \mathfrak{B}_\alpha = \left[\frac{g_\alpha}{e_\alpha^2} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}_\alpha \sin(\mathfrak{B}_\alpha - \omega_\alpha) - \frac{1}{e_\alpha} \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\}_\alpha \sin \mathfrak{B}_\alpha \right] \partial b_\alpha,$$

woraus $\partial \mathfrak{C}_\alpha$ sofort folgt.

Durch Elimination von $\partial\varphi$ ergibt sich also:

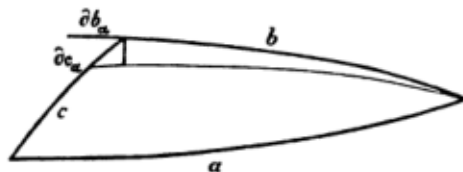
$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathfrak{A}_\beta}{\partial b_\alpha} &= 0 & \frac{\partial \mathfrak{B}_\gamma}{\partial b_\alpha} &= 0 & \frac{\partial \mathfrak{C}_\alpha}{\partial b_\alpha} &= \frac{g_\alpha}{e_\alpha^2} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}_\alpha \sin(\mathfrak{B}_\alpha - \omega_\alpha) - \frac{1}{e_\alpha} \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\}_\alpha \sin \mathfrak{B}_\alpha - \sin \alpha \frac{\partial \log(\beta\alpha)}{\partial c_\alpha} \\ \frac{\partial \mathfrak{A}_\gamma}{\partial b_\alpha} &= 0 & \frac{\partial \mathfrak{B}_\alpha}{\partial b_\alpha} &= \frac{g_\alpha}{e_\alpha^2} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}_\alpha \sin(\mathfrak{B}_\alpha - \omega_\alpha) - \frac{1}{e_\alpha} \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\}_\alpha \sin \mathfrak{B}_\alpha & \frac{\partial \mathfrak{C}_\beta}{\partial b_\alpha} &= \frac{\sin \alpha}{(\beta\alpha)} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial b_\alpha} &= \sin \alpha \frac{\partial \log(\beta\alpha)}{\partial c_\alpha} & \frac{\partial \beta}{\partial b_\alpha} &= \frac{\sin \alpha}{(\beta\alpha)} & \frac{\partial \gamma}{\partial b_\alpha} &= 0 \\ \frac{\partial a}{\partial b_\alpha} &= 0 & \frac{\partial b}{\partial b_\alpha} &= 1 & \frac{\partial c}{\partial b_\alpha} &= \cos \alpha.\end{aligned}$$

Wir haben hier, wie auch im Folgenden, die Dreieckswinkel α, β, γ noch nebenbei berücksichtigt, da wir ihre vollständigen Differentiale bei einer spätern Untersuchung gebrauchen werden.

7.

Wächst c_α um ∂c_α , so bleiben $\mathfrak{A}_\gamma, \mathfrak{A}_\beta, \mathfrak{C}_\beta, \beta$ und a ungeändert; b dreht sich um die Ecke γ und überstreicht dort einen Winkel, der $\partial\psi$ heißen mag.

Die Zunahmen von $c, \gamma, \mathfrak{B}_\gamma$ sind $-\partial c_\alpha, -\partial\psi, +\partial\psi$; ferner wird $(\gamma\alpha)\partial\psi = \partial c_\alpha \cdot \sin \alpha$, $\partial b = -\partial c_\alpha \cdot \cos \alpha$, und die Zunahme des Winkels zwischen ∂b_α und ∂c_α (art. 4)



$$\partial(\pi - \alpha) = -\sin \alpha \frac{\partial \log(\gamma\alpha)}{\partial b_\alpha} \partial c_\alpha$$

oder

$$\partial \alpha = \partial \mathfrak{B}_\alpha - \partial \mathfrak{C}_\alpha = \sin \alpha \frac{\partial \log(\gamma\alpha)}{\partial b_\alpha} \partial c_\alpha.$$

Endlich wird die Zunahme des Azimuths $\mathfrak{C}_\alpha$, vom Anfange bis zum Ende des Elementes ∂c_α von c

$$\partial \mathfrak{C}_\alpha = \left[\frac{g_\alpha}{e_\alpha^2} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}_\alpha \sin(\mathfrak{C}_\alpha - \omega_\alpha) - \frac{1}{e_\alpha} \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\}_\alpha \sin \mathfrak{C}_\alpha \right] \partial c_\alpha,$$

woraus $\partial \mathfrak{B}_\alpha$ sofort folgt.

Durch Elimination von $\partial\psi$ ergibt sich also:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathfrak{A}_\beta}{\partial c_\alpha} &= 0 & \frac{\partial \mathfrak{B}_\gamma}{\partial c_\alpha} &= \frac{\sin \alpha}{(\gamma\alpha)} & \frac{\partial \mathfrak{C}_\alpha}{\partial c_\alpha} &= \frac{g_\alpha}{e_\alpha^2} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}_\alpha \sin(\mathfrak{C}_\alpha - \omega_\alpha) - \frac{1}{e_\alpha} \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\}_\alpha \sin \mathfrak{C}_\alpha \\ \frac{\partial \mathfrak{A}_\gamma}{\partial c_\alpha} &= 0 & \frac{\partial \mathfrak{B}_\alpha}{\partial c_\alpha} &= \frac{g_\alpha}{e_\alpha^2} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}_\alpha \sin(\mathfrak{C}_\alpha - \omega_\alpha) - \frac{1}{e_\alpha} \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\}_\alpha \sin \mathfrak{C}_\alpha + \sin \alpha \frac{\partial \log(\gamma\alpha)}{\partial b_\alpha} & \frac{\partial \mathfrak{C}_\beta}{\partial c_\alpha} &= 0 \\ \frac{\partial \alpha}{\partial c_\alpha} &= \sin \alpha \frac{\partial \log(\gamma\alpha)}{\partial b_\alpha} & \frac{\partial \beta}{\partial c_\alpha} &= 0 & \frac{\partial \gamma}{\partial c_\alpha} &= -\frac{\sin \alpha}{(\gamma\alpha)} \\ \frac{\partial a}{\partial c_\alpha} &= 0 & \frac{\partial b}{\partial c_\alpha} &= -\cos \alpha & \frac{\partial c}{\partial c_\alpha} &= -1.\end{aligned}$$

8.

Durch cyklische Vertauschung ergeben sich aus den vorangehenden Formeln die noch fehlenden Richtungsderivirten, und dieselben müssen nun in die partiellen Derivirten nach den Coordinaten p, q der drei Ecken umgesetzt werden.

Zwischen den Ortsänderungen $\partial b_a, \partial c_a, \partial c_\beta$ u. s. w. und den Differentialen der unabhängigen Variablen p_a, q_a, p_β u. s. w. bestehen die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 & \text{Ecke } \alpha: \\
 & \sin \alpha \partial b = \sin \mathfrak{C} \cdot e \partial p + \sin (\mathfrak{C} - \omega) g \partial q \quad \sin \omega \cdot e \partial p = -\sin (\mathfrak{B} - \omega) \partial b - \sin (\mathfrak{C} - \omega) \partial c \\
 & \sin \alpha \partial c = -\sin \mathfrak{B} \cdot e \partial p - \sin (\mathfrak{B} - \omega) g \partial q \quad \sin \omega \cdot g \partial q = \sin \mathfrak{B} \cdot \partial b + \sin \mathfrak{C} \partial c \\
 & \text{Ecke } \beta: \\
 (a) \quad & \sin \beta \partial c = \sin \mathfrak{A} \cdot e \partial p + \sin (\mathfrak{A} - \omega) g \partial q \quad \sin \omega \cdot e \partial p = -\sin (\mathfrak{C} - \omega) \partial c - \sin (\mathfrak{A} - \omega) \partial a \\
 & \sin \beta \partial a = -\sin \mathfrak{C} \cdot e \partial p - \sin (\mathfrak{C} - \omega) g \partial q \quad \sin \omega \cdot g \partial q = \sin \mathfrak{C} \partial c + \sin \mathfrak{A} \partial a \\
 & \text{Ecke } \gamma: \\
 & \sin \gamma \partial a = \sin \mathfrak{B} \cdot e \partial p + \sin (\mathfrak{B} - \omega) g \partial q \quad \sin \omega \cdot e \partial p = -\sin (\mathfrak{A} - \omega) \partial a - \sin (\mathfrak{B} - \omega) \partial b \\
 & \sin \gamma \partial b = -\sin \mathfrak{A} \cdot e \partial p - \sin (\mathfrak{A} - \omega) g \partial q \quad \sin \omega \cdot g \partial q = \sin \mathfrak{A} \partial a + \sin \mathfrak{B} \partial b.
 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die folgenden Beziehungen zwischen den partiellen und den Richtungsderivirten einer beliebigen Function Ω :

$$\begin{aligned}
 & \text{Ecke } \alpha: \\
 & \sin \omega \frac{\partial \Omega}{\partial b} = -\sin (\mathfrak{B} - \omega) \frac{\partial \Omega}{e \partial p} + \sin \mathfrak{B} \frac{\partial \Omega}{g \partial q} \quad \sin \alpha \frac{\partial \Omega}{e \partial p} = \sin \mathfrak{C} \frac{\partial \Omega}{\partial b} - \sin \mathfrak{B} \frac{\partial \Omega}{\partial c} \\
 & \sin \omega \frac{\partial \Omega}{\partial c} = -\sin (\mathfrak{C} - \omega) \frac{\partial \Omega}{e \partial p} + \sin \mathfrak{C} \frac{\partial \Omega}{g \partial q} \quad \sin \alpha \frac{\partial \Omega}{g \partial q} = \sin (\mathfrak{C} - \omega) \frac{\partial \Omega}{\partial b} - \sin (\mathfrak{B} - \omega) \frac{\partial \Omega}{\partial c} \\
 & \text{Ecke } \beta: \\
 (b) \quad & \sin \omega \frac{\partial \Omega}{\partial c} = -\sin (\mathfrak{C} - \omega) \frac{\partial \Omega}{e \partial p} + \sin \mathfrak{C} \frac{\partial \Omega}{g \partial q} \quad \sin \beta \frac{\partial \Omega}{e \partial p} = \sin \mathfrak{A} \frac{\partial \Omega}{\partial c} - \sin \mathfrak{C} \frac{\partial \Omega}{\partial a} \\
 & \sin \omega \frac{\partial \Omega}{\partial a} = -\sin (\mathfrak{A} - \omega) \frac{\partial \Omega}{e \partial p} + \sin \mathfrak{A} \frac{\partial \Omega}{g \partial q} \quad \sin \beta \frac{\partial \Omega}{g \partial q} = \sin (\mathfrak{A} - \omega) \frac{\partial \Omega}{\partial c} - \sin (\mathfrak{C} - \omega) \frac{\partial \Omega}{\partial a} \\
 & \text{Ecke } \gamma: \\
 & \sin \omega \frac{\partial \Omega}{\partial a} = -\sin (\mathfrak{A} - \omega) \frac{\partial \Omega}{e \partial p} + \sin \mathfrak{A} \frac{\partial \Omega}{g \partial q} \quad \sin \gamma \frac{\partial \Omega}{e \partial p} = \sin \mathfrak{B} \frac{\partial \Omega}{\partial a} - \sin \mathfrak{A} \frac{\partial \Omega}{\partial b} \\
 & \sin \omega \frac{\partial \Omega}{\partial b} = -\sin (\mathfrak{B} - \omega) \frac{\partial \Omega}{e \partial p} + \sin \mathfrak{B} \frac{\partial \Omega}{g \partial q} \quad \sin \gamma \frac{\partial \Omega}{g \partial q} = \sin (\mathfrak{B} - \omega) \frac{\partial \Omega}{\partial a} - \sin (\mathfrak{A} - \omega) \frac{\partial \Omega}{\partial b}.
 \end{aligned}$$

Setzt man nun in das vollständige Differential von Ω statt der partiellen Derivirten ihre vorstehenden Ausdrücke durch die Richtungsderivirten ein, so ergibt sich vermöge der Gleichungen (a)

$$\partial \Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial b_a} \cdot \partial b_a + \frac{\partial \Omega}{\partial c_a} \cdot \partial c_a + \frac{\partial \Omega}{\partial c_\beta} \cdot \partial c_\beta + \dots,$$

also die nämliche Form, wie wenn die Ortsänderungen $\partial b_a, \partial c_a, \partial c_\beta, \dots$ die vollständigen Differentiale voneinander unabhängiger Functionen von $p_a, q_a, p_\beta, \dots$ wären.

Auf diese Weise erhält man die vollständigen Differentiale zunächst in der Form:

$$\begin{aligned}\partial \mathfrak{A}_\beta &= \left[\frac{g}{e^2} \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \sin(\mathfrak{C} - \omega) - \frac{1}{e} \begin{Bmatrix} 21 \\ 2 \end{Bmatrix} \sin \mathfrak{C} - \sin \beta \frac{\partial \log(\gamma \beta)}{\partial a_\beta} \right]_\beta \partial c_\beta \\ &\quad + \left[\frac{g}{e^2} \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \sin(\mathfrak{A} - \omega) - \frac{1}{e} \begin{Bmatrix} 21 \\ 2 \end{Bmatrix} \sin \mathfrak{A} \right]_\beta \partial a_\beta + \frac{\sin \gamma}{(\beta \gamma)} \partial b_\gamma \\ \partial \mathfrak{A}_\gamma &= \left[\frac{g}{e^2} \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \sin(\mathfrak{B} - \omega) - \frac{1}{e} \begin{Bmatrix} 21 \\ 2 \end{Bmatrix} \sin \mathfrak{B} + \sin \gamma \frac{\partial \log(\beta \gamma)}{\partial a_\gamma} \right]_\gamma \partial b_\gamma \\ &\quad + \left[\frac{g}{e^2} \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \sin(\mathfrak{A} - \omega) - \frac{1}{e} \begin{Bmatrix} 21 \\ 2 \end{Bmatrix} \sin \mathfrak{A} \right]_\gamma \partial a_\gamma + \frac{\sin \beta}{(\gamma \beta)} \partial c_\beta \\ \partial a &= \cos \beta \partial c_\beta - \partial a_\beta - \cos \gamma \partial b_\gamma + \partial a_\gamma \\ \partial \alpha &= \frac{\sin \gamma}{(\alpha \gamma)} \partial a_\gamma - \frac{\sin \beta}{(\alpha \beta)} \partial a_\beta + \sin \alpha \left[\frac{\partial \log(\beta \alpha)}{\partial c_a} \partial b_a + \frac{\partial \log(\gamma \alpha)}{\partial b_a} \partial c_a \right],\end{aligned}$$

und wenn man aus den drei ersten Gleichungen die Ortsänderungen ∂a_β u. s. w. fortschafft:

$$\begin{aligned}\partial \mathfrak{A}_\beta &= - \frac{g_\beta \sin \omega_\beta}{e_\beta} \left[\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \partial p + \begin{Bmatrix} 21 \\ 2 \end{Bmatrix} \partial q \right]_\beta - \frac{\partial \log(\gamma \beta)}{\partial a_\beta} \left[\sin \mathfrak{A} e \partial p \right. \\ &\quad \left. + \sin(\mathfrak{A} - \omega) g \partial q \right]_\beta - \frac{1}{(\beta \gamma)} \left[\sin \mathfrak{A} e \partial p + \sin(\mathfrak{A} - \omega) g \partial q \right]_\gamma \\ \partial \mathfrak{A}_\gamma &= - \frac{g_\gamma \sin \omega_\gamma}{e_\gamma} \left[\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \partial p + \begin{Bmatrix} 21 \\ 2 \end{Bmatrix} \partial q \right]_\gamma - \frac{\partial \log(\beta \gamma)}{\partial a_\gamma} \left[\sin \mathfrak{A} e \partial p \right. \\ &\quad \left. + \sin(\mathfrak{A} - \omega) g \partial q \right]_\gamma + \frac{1}{(\gamma \beta)} \left[\sin \mathfrak{A} e \partial p + \sin(\mathfrak{A} - \omega) g \partial q \right]_\beta \\ \partial a &= \cos \mathfrak{A}_\gamma \cdot e_\gamma \partial p_\gamma + \cos(\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma) g_\gamma \partial q_\gamma - \cos \mathfrak{A}_\beta \cdot e_\beta \partial p_\beta \\ &\quad - \cos(\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta) g_\beta \partial q_\beta.\end{aligned}$$

Wenn nun in diesen Gleichungen die Functionen $(\beta \gamma)$, $(\gamma \beta)$ ihrer ursprünglichen Definition gemäß bestimmt wären, so würden die Bedingungen der Integrabilität nothwendig identisch erfüllt sein. Folglich müssen wir umgekehrt durch die Integrabilitätsbedingungen zu den charakteristischen Eigenschaften dieser Functionen gelangen.

Die vorstehenden Gleichungen lösen die Aufgabe, zu bestimmen, wie sich die Länge einer geodätischen Linie und ihre Azimuthe in den Endpunten ändern, wenn letztere unendlich wenig verschoben werden.

9.

Für die Länge einer durch die Coordinaten ihrer Endpunkte gegebenen geodätischen Linie und ihre Azimuthe in den Endpunkten erhalten wir demnach das folgende System von partiellen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
 \text{I.} \quad & \begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{A}_\beta}{\partial p_\beta} = -\frac{g_\beta \sin \omega_\beta}{e_\beta} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}_\beta - e_\beta \sin \mathfrak{A}_\beta \frac{\partial \log(\gamma\beta)}{\partial a_\beta} & \frac{\partial \mathfrak{A}_\beta}{\partial p_\gamma} = -e_\gamma \frac{\sin \mathfrak{A}_\gamma}{(\beta\gamma)} \\ \frac{\partial \mathfrak{A}_\beta}{\partial q_\beta} = -\frac{g_\beta \sin \omega_\beta}{e_\beta} \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\}_\beta - g_\beta \sin(\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta) \frac{\partial \log(\gamma\beta)}{\partial a_\beta} & \frac{\partial \mathfrak{A}_\beta}{\partial q_\gamma} = -g_\gamma \frac{\sin(\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma)}{(\beta\gamma)} \end{cases} \\
 \text{II.} \quad & \begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{A}_\gamma}{\partial p_\gamma} = -\frac{g_\gamma \sin \omega_\gamma}{e_\gamma} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}_\gamma - e_\gamma \sin \mathfrak{A}_\gamma \frac{\partial \log(\beta\gamma)}{\partial a_\gamma} & \frac{\partial \mathfrak{A}_\gamma}{\partial p_\beta} = e_\beta \frac{\sin \mathfrak{A}_\beta}{(\gamma\beta)} \\ \frac{\partial \mathfrak{A}_\gamma}{\partial q_\gamma} = -\frac{g_\gamma \sin \omega_\gamma}{e_\gamma} \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\}_\gamma - g_\gamma \sin(\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma) \frac{\partial \log(\beta\gamma)}{\partial a_\gamma} & \frac{\partial \mathfrak{A}_\gamma}{\partial q_\beta} = g_\beta \frac{\sin(\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta)}{(\gamma\beta)} \end{cases} \\
 \text{III.} \quad & \begin{cases} \frac{\partial a}{\partial p_\beta} = -e_\beta \cos \mathfrak{A}_\beta & \frac{\partial a}{\partial p_\gamma} = e_\gamma \cos \mathfrak{A}_\gamma \\ \frac{\partial a}{\partial q_\beta} = -g_\beta \cos(\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta) & \frac{\partial a}{\partial q_\gamma} = g_\gamma \cos(\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Zu jeder von diesen drei Gleichungsgruppen gehören 6 Integrabilitätsbedingungen, welche aber aus bekannten Gründen nicht alle voneinander unabhängig sind. Außerdem ist zu bemerken, daß in den Integrabilitätsbedingungen die Derivirte eines Azimuths stets durch ihren vorstehenden Werth ersetzt werden muß, und in Folge dessen eine Anzahl derselben identisch wird. Dies bezieht sich vorzugsweise auf die Gleichungen III., mit denen wir beginnen.

Man erhält

$$\frac{\partial^2 a}{\partial p_\beta \partial p_\gamma} = e_\beta \sin \mathfrak{A}_\beta \frac{\partial \mathfrak{A}_\beta}{\partial p_\gamma} = -e_\gamma \sin \mathfrak{A}_\gamma \frac{\partial \mathfrak{A}_\gamma}{\partial p_\beta};$$

setzt man hier für die Derivirten ihre Werthe ein, so folgt

$$-e_\beta \sin \mathfrak{A}_\beta \cdot e_\gamma \frac{\sin \mathfrak{A}_\gamma}{(\beta\gamma)} = -e_\gamma \sin \mathfrak{A}_\gamma \cdot e_\beta \frac{\sin \mathfrak{A}_\beta}{(\gamma\beta)},$$

also ist

$$(\beta\gamma) = (\gamma\beta),$$

d. h. die reducirte Länge einer geodätischen Linie bleibt ungeändert, wenn man Anfangs- und Endpunkt derselben vertauscht. Wir haben also den Satz:

Man drehe eine geodätische Linie ohne Änderung ihrer Länge unendlich wenig aus ihrer ursprünglichen Lage, einmal um den einen, das anderemal um den andern Endpunkt.

Sind alsdann die Drehungswinkel am festen Endpunkte einander gleich, so sind es auch die vom beweglichen Endpunkte beschriebenen Wege.

In Folge dieses Resultates ist es bei der reducirten Länge eines geodätischen Bogens überflüssig, anzugeben, welches der feste und welches der bewegliche Endpunkt desselben sein soll, und wir setzen daher von hier ab:

$$(\beta\gamma) = (\gamma\beta) = (a), \quad (\gamma\alpha) = (\alpha\gamma) = (b), \quad (\alpha\beta) = (\beta\alpha) = (c).$$

Wir werden im Folgenden für die reducirte Länge (a) , als Function einer der beiden Abscissen a_β , a_γ betrachtet, Differentialgleichungen finden, und die zugehörigen Grenzbedingungen aufstellen. Bei diesen ist es wegen der Voraussetzung, daß $a_\gamma > a_\beta$ sei, nicht mehr gleichgültig, welcher von den beiden Punkten β , γ der feste, welches der bewegliche ist. In der That wird, wenn a_β constant ist und γ in unendliche Nähe von β rückt, $(\beta\gamma) = a_\gamma - a_\beta$, d. h. an der Grenze, wo beide Punkte zusammenfallen,

$$(\beta\gamma) = 0, \quad \frac{\partial(\beta\gamma)}{\partial a_\gamma} = 1.$$

Nimmt man dagegen a_γ constant, und läßt β unendlich nahe an γ rücken, so wird $(\gamma\beta) = a_\gamma - a_\beta$, also an der Grenze

$$(\gamma\beta) = 0, \quad \frac{\partial(\gamma\beta)}{\partial a_\beta} = -1.$$

Um bei der allgemeinen Untersuchung über die Function, welche wir reducirte Länge nennen, diese Ungleichförmigkeit in den Grenzbedingungen zu vermeiden, werden wir sie (art. 15) durch eine andere, die reducirte Abscisse, ersetzen, bei welcher die Grenzbedingungen immer die nämlichen sind.

Mit Berücksichtigung des obigen Resultates geben die übrigen Integrabilitätsbedingungen für die Gleichungen III. nichts Neues.

10.

Bei den Integrabilitätsbedingungen für die Azimuthe ist hervorzuheben, daß diejenigen, welche keine zweite Derivirte der reducirten Länge (a) enthalten, identisch werden, wenn man aus ihnen die Derivirten der Azimuthe wegschafft. Wir unterscheiden nun die beiden Fälle, wo eine Integrabilitätsbedingung sich durch doppelte Darstellung der zweiten Derivirte eines Azimuths nach den Coordinaten derselben oder verschiedener Ecken ergibt.

Der erste Fall führt für jedes Azimuth auf zwei Bedingungen, von denen aber nach der eben gemachten Bemerkung die eine iden-

tisch erfüllt ist. Die andere darf nur für ein Azimuth, z. B. für $\mathfrak{A}_\gamma$, aufgesucht werden, da die entsprechende sich für $\mathfrak{A}_\rho$ offenbar durch Vertauschung von γ , ∂a_γ mit β , ∂a_β ergibt.

Setzt man die beiden Ausdrücke, welche sich für $\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_\gamma}{\partial p_\gamma \partial q_\gamma}$ ergeben, einander gleich, so erhält man zunächst eine ziemlich verwickelte Formel, die wir übergehen, da sie auf ein bereits von Gauß (D. g. XIX) gegebenes Resultat führt. Durch Reduction dieser Gleichung mittelst der Formeln (b.) des vorangehenden art. 8 ergibt sich nämlich

$$\frac{1}{(a)} \frac{\partial^2(a)}{\partial a_\gamma^2} + \frac{1}{eg \sin \omega} \left(\frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{g \sin \omega}{e} \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \right] - \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{g \sin \omega}{e} \left\{ \begin{smallmatrix} 21 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \right] \right) = 0,$$

wo im zweiten Summanden der Index γ weggelassen ist.

Mit Rücksicht auf eine Formel des art. 2 führen wir nun eine neue GröÙe k ein, so daß

$$eg \sin \omega \cdot k = \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{g \sin \omega}{e} \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \right] - \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{g \sin \omega}{e} \left\{ \begin{smallmatrix} 21 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \right] = \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{e \sin \omega}{g} \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \right] - \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{e \sin \omega}{g} \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \right]$$

wird, wodurch die vorstehende Differentialgleichung die Form

$$\frac{\partial^2(a)}{\partial a_\gamma^2} + k_\gamma(a) = 0$$

annimmt.

Transformirt man aber das Linienelement, indem man durch eine ganz beliebige Substitution zwei neue Variabeln p' , q' an Stelle von p , q einführt, so daß

$$\partial s^2 = e'^2 \partial p'^2 + 2e'g' \cos \omega' \partial p' \partial q' + g'^2 \partial q'^2$$

wird, so muß man für die, von der Wahl eines speciellen Coordinatensystems p , q unabhängige GröÙe $-\frac{1}{(a)} \frac{\partial^2(a)}{\partial a_\gamma^2}$ genau denselben Ausdruck k_γ erhalten, nur daß überall, wo e , g , ω , ∂p , ∂q steht, die entsprechenden accentuirten GröÙen erscheinen.

Folglich ist k eine absolute Invariante, und man kann ihren Werth sofort bestimmen, indem man den Ursprung der rechtwinkligen Coordinaten x , y , z nach γ verlegt, $p' = x$, $q' = y$ und bis auf GröÙen dritter Ordnung

$$z = \frac{x^2}{2e_1} + \frac{y^2}{2e_2}$$

nimmt. Man findet dann $k_\gamma = \frac{1}{e_1 e_2}$, d. h. k ist das Krümmungsmaß der Fläche S im Punkte p , q .

Die obige Differentialgleichung für (a) ist die nämliche, welche Gauß mittelst seines allgemeinen Ausdrucks für das Krümmungsmaß (Disq. g. c. s. XI) abgeleitet hat (ibid. XIX).

Wenn daher β der Anfangspunct ist, so haben wir

$$\frac{\partial^2(a)}{\partial a_\gamma^2} + k_\gamma(a) = 0,$$

und für $a_\gamma = a_\beta$:

$$(a) = 0, \quad \frac{\partial(a)}{\partial a_\gamma} = 1.$$

Betrachtet man dagegen γ als Anfangspunct, so folgt

$$\frac{\partial^2(a)}{\partial a_\beta^2} + k_\beta(a) = 0,$$

und für $a_\beta = a_\gamma$:

$$(a) = 0, \quad \frac{\partial(a)}{\partial a_\beta} = -1.$$

11.

Bildet man für $\mathfrak{A}_\beta$ und $\mathfrak{A}_\gamma$ die zweiten Derivirten nach den Coordinaten verschiedener Ecken, so ergibt sich mit Weglassung verschwindender Glieder:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{cases} \frac{\partial}{e_\gamma \partial p_\gamma} \left(\sin \mathfrak{A}_\beta \frac{\partial \log(a)}{\partial a_\beta} \right) = \frac{\partial}{e_\beta \partial p_\beta} \left(\frac{\sin \mathfrak{A}_\gamma}{(a)} \right), \\ \frac{\partial}{g_\gamma \partial q_\gamma} \left(\sin \mathfrak{A}_\beta \frac{\partial \log(a)}{\partial a_\beta} \right) = \frac{\partial}{e_\beta \partial p_\beta} \left(\frac{\sin(\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma)}{(a)} \right), \\ \frac{\partial}{e_\gamma \partial p_\gamma} \left(\sin(\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta) \frac{\partial \log(a)}{\partial a_\beta} \right) = \frac{\partial}{g_\beta \partial q_\beta} \left(\frac{\sin \mathfrak{A}_\gamma}{(a)} \right), \\ \frac{\partial}{g_\gamma \partial q_\gamma} \left(\sin(\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta) \frac{\partial \log(a)}{\partial a_\beta} \right) = \frac{\partial}{g_\beta \partial q_\beta} \left(\frac{\sin(\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma)}{(a)} \right), \end{cases} \\ 2) \quad & \begin{cases} -\frac{\partial}{e_\beta \partial p_\beta} \left(\sin \mathfrak{A}_\gamma \frac{\partial \log(a)}{\partial a_\gamma} \right) = \frac{\partial}{e_\gamma \partial p_\gamma} \left(\frac{\sin \mathfrak{A}_\beta}{(a)} \right), \\ -\frac{\partial}{g_\beta \partial q_\beta} \left(\sin \mathfrak{A}_\gamma \frac{\partial \log(a)}{\partial a_\gamma} \right) = \frac{\partial}{e_\gamma \partial p_\gamma} \left(\frac{\sin(\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta)}{(a)} \right), \\ -\frac{\partial}{e_\beta \partial p_\beta} \left(\sin(\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma) \frac{\partial \log(a)}{\partial a_\gamma} \right) = \frac{\partial}{g_\gamma \partial q_\gamma} \left(\frac{\sin \mathfrak{A}_\beta}{(a)} \right), \\ -\frac{\partial}{g_\beta \partial q_\beta} \left(\sin(\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma) \frac{\partial \log(a)}{\partial a_\gamma} \right) = \frac{\partial}{g_\gamma \partial q_\gamma} \left(\frac{\sin(\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta)}{(a)} \right). \end{cases} \end{aligned}$$

Es wird sich im Folgenden um die Entwicklung dieser und der im vorigen art. gefundenen Differentialgleichungen handeln. Bevor wir dazu übergehen, ziehen wir eine Folgerung aus ihnen, indem wir in der ersten Gleichung jeder Gruppe die Richtungen der wachsenden p_γ , p_β in ∂b_γ , ∂c_β verlegen, oder wenn man will, umgekehrt verfahren.

Dann wird $\mathfrak{B}_\gamma = 0$, $\mathfrak{C}_\beta = 0$, also (art. 5) $\mathfrak{A}_\gamma = \gamma - \pi$, $\mathfrak{A}_\beta = \pi - \beta$. Die genannten Formeln gehen daher in die folgenden über

$$\frac{\partial}{\partial b_\gamma} \left(\sin \beta \frac{\partial \log(a)}{\partial a_\beta} \right) + \frac{\partial}{\partial c_\beta} \left(\frac{\sin \gamma}{(a)} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial c_\beta} \left(\sin \gamma \frac{\partial \log(a)}{\partial a_\gamma} \right) - \frac{\partial}{\partial b_\gamma} \left(\frac{\sin \beta}{(a)} \right) = 0,$$

und es läßt sich umgekehrt ohne Schwierigkeit zeigen, daß aus diesen Gleichungen die vorangehenden sämtlich folgen, wenn über die Richtungen der Linien b, c passend verfügt wird.

Man kann endlich diese beiden merkwürdigen Gleichungen in die Formen

$$\frac{\partial}{\partial b_\gamma} \left(\frac{\partial \beta}{\partial c_\beta} \right) - \frac{\partial}{\partial c_\beta} \left(\frac{\partial \beta}{\partial b_\gamma} \right), \quad \frac{\partial}{\partial c_\beta} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial b_\gamma} \right) - \frac{\partial}{\partial b_\gamma} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial c_\beta} \right)$$

setzen und dann verificiren, daß bei wiederholtem Differentiiren nach den Richtungen von $\partial b_\gamma, \partial c_\beta$ die Reihenfolge der Operationen gleichgültig ist.

12.

Um die Bedeutung, welche wir in der Folge den in den beiden vorangehenden artt. gefundenen Resultaten beilegen werden, deutlicher hervortreten zu lassen, werden wir diese Gleichungen in völlig entwickelter Form darstellen.

In den beiden Formelsystemen des vorigen art. enthält jede Gruppe zwei überflüssige Gleichungen, da jede zweite Derivirte von $\log(a)$ zweimal dargestellt wird. Wir können uns daher mit zwei Combinationen von Gleichungen jeder Gruppe begnügen, und multipliciren die erste und dritte Gleichung in der ersten Gruppe mit $\cos(\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta)$, $-\cos \mathfrak{A}_\beta$, in der zweiten mit $\cos(\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma)$, $\cos \mathfrak{A}_\gamma$, und bilden ihre Summe; verfährt man ebenso mit der zweiten und vierten Gleichung, so folgt:

$$\sin \omega_\beta \frac{\partial}{\partial c_\gamma \partial p_\gamma} \left(\frac{\partial \log(a)}{\partial a_\beta} \right) = \cos(\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta) \frac{\partial}{\partial c_\beta \partial p_\beta} \left(-\frac{\sin \mathfrak{A}_\gamma}{(a)} \right) - \cos \mathfrak{A}_\beta \frac{\partial}{\partial g_\beta \partial q_\beta} \left(-\frac{\sin \mathfrak{A}_\gamma}{(a)} \right)$$

$$\sin \omega_\beta \frac{\partial}{\partial g_\gamma \partial q_\gamma} \left(\frac{\partial \log(a)}{\partial a_\beta} \right) = \cos(\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta) \frac{\partial}{\partial c_\beta \partial p_\beta} \left(\frac{\sin(\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma)}{(a)} \right) - \cos \mathfrak{A}_\beta \frac{\partial}{\partial g_\beta \partial q_\beta} \left(\frac{\sin(\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma)}{(a)} \right)$$

$$\sin \omega_\gamma \frac{\partial}{\partial c_\beta \partial p_\beta} \left(\frac{\partial \log(a)}{\partial a_\gamma} \right) = -\cos(\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma) \frac{\partial}{\partial c_\gamma \partial p_\gamma} \left(-\frac{\sin \mathfrak{A}_\beta}{(a)} \right) + \cos \mathfrak{A}_\gamma \frac{\partial}{\partial g_\gamma \partial q_\gamma} \left(-\frac{\sin \mathfrak{A}_\beta}{(a)} \right)$$

$$\sin \omega_\gamma \frac{\partial}{\partial g_\beta \partial q_\beta} \left(\frac{\partial \log(a)}{\partial a_\gamma} \right) = -\cos(\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma) \frac{\partial}{\partial c_\gamma \partial p_\gamma} \left(\frac{\sin(\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta)}{(a)} \right) + \cos \mathfrak{A}_\gamma \frac{\partial}{\partial g_\gamma \partial q_\gamma} \left(\frac{\sin(\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta)}{(a)} \right).$$

Die wirkliche Ausführung aller Derivirten gibt endlich, wenn zur Abkürzung

$$\frac{\cos(\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta)}{e_\beta} \frac{\partial \log(a)}{\partial p_\beta} - \frac{\cos \mathfrak{A}_\beta}{g_\beta} \frac{\partial \log(a)}{\partial q_\beta} = B_\beta$$

$$\frac{\cos(\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma)}{e_\gamma} \frac{\partial \log(a)}{\partial p_\gamma} - \frac{\cos \mathfrak{A}_\gamma}{g_\gamma} \frac{\partial \log(a)}{\partial q_\gamma} = B_\gamma$$

gesetzt wird:

$$A. \begin{cases} \frac{\sin \mathfrak{A}_\beta}{e_\gamma g_\beta} \frac{\partial^2 \log(a)}{\partial p_\gamma \partial q_\beta} - \frac{\sin(\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta)}{e_\gamma e_\beta} \frac{\partial^2 \log(a)}{\partial p_\gamma \partial p_\beta} + 2 \frac{\sin \mathfrak{A}_\gamma}{(a)} B_\beta = \frac{\cos \mathfrak{A}_\gamma \sin \omega_\beta}{(a)(a)} \\ \frac{\sin \mathfrak{A}_\beta}{g_\gamma g_\beta} \frac{\partial^2 \log(a)}{\partial q_\gamma \partial q_\beta} - \frac{\sin(\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta)}{g_\gamma e_\beta} \frac{\partial^2 \log(a)}{\partial q_\gamma \partial p_\beta} + 2 \frac{\sin(\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma)}{(a)} B_\beta = \frac{\cos(\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma) \sin \omega_\beta}{(a)(a)} \\ \frac{\sin \mathfrak{A}_\gamma}{g_\gamma e_\beta} \frac{\partial^2 \log(a)}{\partial q_\gamma \partial p_\beta} - \frac{\sin(\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma)}{e_\gamma e_\beta} \frac{\partial^2 \log(a)}{\partial p_\gamma \partial p_\beta} + 2 \frac{\sin \mathfrak{A}_\beta}{(a)} B_\gamma = \frac{\cos \mathfrak{A}_\beta \sin \omega_\gamma}{(a)(a)} \\ \frac{\sin \mathfrak{A}_\gamma}{g_\gamma g_\beta} \frac{\partial^2 \log(a)}{\partial q_\gamma \partial q_\beta} - \frac{\sin(\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma)}{e_\gamma g_\beta} \frac{\partial^2 \log(a)}{\partial p_\gamma \partial q_\beta} + 2 \frac{\sin(\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta)}{(a)} B_\gamma = \frac{\cos(\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta) \sin \omega_\gamma}{(a)(a)} \end{cases}$$

Von diesen vier Gleichungen folgt eine aus den übrigen, wovon man sich leicht überzeugt, indem man aus den beiden ersten B_β , aus den beiden letzten B_γ eliminiert.

Die entwickelte Form der Gleichung

$$\frac{\partial^2(a)}{\partial a_\gamma^2} + k_\gamma(a) = 0$$

ergibt sich aus den Schlusformeln des art. 2, und lautet:

$$B. \begin{cases} \left(\frac{\sin(\mathfrak{A} - \omega)}{e \sin \omega} \right)^2 \left[\frac{\partial^2(a)}{\partial p^2} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial(a)}{\partial p} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial(a)}{\partial q} + e^2 k(a) \right] \\ - 2 \frac{\sin(\mathfrak{A} - \omega) \sin \mathfrak{A}}{e g \sin \omega^2} \left[\frac{\partial^2(a)}{\partial p \partial q} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial(a)}{\partial p} - \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial(a)}{\partial q} + e g \cos \omega \cdot k(a) \right] \\ + \left(\frac{\sin \mathfrak{A}}{g \sin \omega} \right)^2 \left[\frac{\partial^2(a)}{\partial q^2} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial(a)}{\partial p} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial(a)}{\partial q} + g^2 k(a) \right] = 0, \end{cases}$$

wo der Index γ weggelassen wurde und durch β ersetzt werden kann.

13.

Will man sich der im vorigen art. entwickelt dargestellten Formeln zur Bestimmung von (a) bedienen, so ist dazu die Kenntniß der von β unter dem Azimuth $\mathfrak{A}_\beta$ ausgehenden geodätischen Linie erforderlich.

Wir können nun als ein Hauptziel der gegenwärtigen Untersuchungen die Aufgabe bezeichnen, die Bestimmung der reducirten Länge eines geodätischen Bogens als Function der Coordinaten seiner beiden Endpunkte an Bedingungen zu knüpfen, die nur von der Lage

dieser Punkte abhängen, und die Kenntniss einer geodätischen Verbindungslinie dieser Punkte nicht voraussetzen.

Kann man diesen Bedingungen gemäß (a), (b) und (c) als Functionen der Coordinaten von α , β , γ bestimmen, so liefern, wie sich im folgenden Abschnitte art. 20. D. ergeben wird, die Formeln des vorigen art. und die aus ihnen durch Vertauschung folgenden die sämtlichen Azimuthe, und müssen daher als die endlichen Formeln für die Auflösung geodätischer Dreiecke aufgefasst werden, während es zur Bestimmung der Seiten noch einer Integration vollständiger Differentiale bedarf.

Dritter Abschnitt.

Theorie der reducirten Länge eines geodätischen Bogens.

14.

Wird eine krumme Oberfläche ohne Dehnung, also ohne Änderung ihrer Linienelemente, beliebig gebogen, so bleibt in jedem Punkte derselben das Krümmungsmafs ungeändert (Disqu. g. c. s. XII), weil der Ausdruck desselben nur von dem des Linienelementes abhängt. Da bei einer solchen Umbiegung auch jede geodätische Linie eine solche bleibt, so folgt nach der Definition der reducirten Länge, dafs auch diese bei der Umbiegung der Oberfläche ungeändert bleibt. Nennt man daher bei aufeinander abwickelbaren Flächen entsprechende Elemente solche, die bei der Abwicklung zur Deckung kommen, so folgt der Satz:

Zwei aufeinander abwickelbare Flächen haben in entsprechenden Punkten das gleiche Krümmungsmafs (Gauß l. c.), und entsprechende geodätische Bögen haben dieselbe reducirte Länge.

Da der Ausdruck für das Krümmungsmafs denjenigen des Linienelementes nicht bestimmt, so läfst der erste Theil dieses Satzes sich nicht umkehren; wohl aber gilt die Umkehrung des zweiten Theorems:

Kann man die Punkte zweier Flächen einander in der Weise als entsprechende zuordnen, dafs die reducirte Länge der geodätischen Verbindungslinie von zwei Punkten der ersten Fläche stets dieselbe ist wie für die entsprechenden Punkte der andern, so lassen sich diese Flächen aufeinander abwickeln, und es kommen hierbei stets entsprechende Punkte zur Deckung.

Nimmt man nämlich in den vorletzten Gleichungen des art. 10 den Punct γ so nahe beim festen Puncte β an, daß $a_\gamma - a_\beta$ als eine sehr kleine GröÙe erster Ordnung bezeichnet werden kann, so wird die reducirte Länge dieses Bogens vermöge der Differentialgleichung bis auf GröÙen dritter Ordnung genau: $(a) = a_\gamma - a_\beta$. Weil aber diese GröÙe, wenn $a_\gamma - a_\beta$ unendlich klein wird, in das Linienelement zwischen den unendlich benachbarten Puncten β, γ übergeht, so muß man durch Entwicklung der Function $(a)^2$ — wenn die Coordinaten von β und γ durch p, q und p', q' bezeichnet werden — einen Ausdruck von der Form

$$(a)^2 = E(p' - p)^2 + 2F(p' - p)(q' - q) + G(q' - q)^2$$

erhalten, der bis auf GröÙen vierter Ordnung genau ist, und wo die Coefficienten nur noch von den Coordinaten p, q des Punctes β abhängen. Dadurch ist aber das Linienelement gegeben, und sein Quadrat $\partial s^2 = E \partial p^2 + 2F \partial p \partial q + G \partial q^2$. Folglich ist durch den allgemeinen Ausdruck der reducirten Länge eines geodätischen Bogens als Function der Coordinaten seiner Endpuncte das Linienelement der entsprechenden Oberfläche völlig bestimmt, woraus der obige Satz folgt.

15.

An Stelle der reducirten Länge werden wir jetzt eine Function einführen, welche wir zur Unterscheidung die reducirte Abscisse nennen und in folgender Weise definiren.

Bei den reducirten Längen $(\beta\gamma), (\gamma\beta)$ war vorausgesetzt, daß man auf einer gegebenen geodätischen Linie $\mathfrak{B}$ von einem beliebigen Anfangspuncte aus Abscissen r zähle, die in der Richtung von β nach γ hin wachsen. Dadurch war, bei unveränderlicher Lage von β , der Punct γ auf den Theil $r > a_\beta$ von $\mathfrak{B}$ beschränkt, und unter dieser Voraussetzung war

$$\frac{\partial^2(\beta\gamma)}{\partial r^2} + k(\beta\gamma) = 0,$$

und für

$$r = a_\beta \quad (\beta\gamma) = 0, \quad \frac{\partial(\beta\gamma)}{\partial r} = 1.$$

Wir heben diese Beschränkung der Abscisse r auf, und lassen die vorstehende Differentialgleichung, ohne Änderung in den Grenzbedingungen, für alle mit den Stetigkeitsbedingungen (art. 4) verträglichen reellen Werthe von r bestehen.

Die so entstehende Function von r nennen wir die reducirte Abscisse von γ in Bezug auf β als Anfangspunct, und bezeichnen sie, wenn r_β, r_γ die Abscissen dieser Puncte sind, durch

$$[r_\beta r_\gamma].$$

Ist also $r_\gamma > r_\beta$, so ist dies auch die reducirte Länge ($\beta\gamma$) des Bogens $\beta\gamma$; ist dagegen $r_\gamma < r_\beta$, also die reducirte Länge $= [r_\gamma r_\beta]$, so stimmen alle Bedingungen für $[r_\beta r_\gamma]$ mit denjenigen überein, welche man aus den Schlufsgleichungen des art. 10 unter derselben Voraussetzung über die Lage der Puncte γ, β für $-(a) = -[r_\gamma r_\beta]$ erhält. Folglich ist in diesem Falle $[r_\beta r_\gamma] = -[r_\gamma r_\beta]$, wie sich im folgenden art. auf anderm Wege ergeben wird.

Will man sich daher in den geodätischen Formeln statt der reducirten Länge (a) der entsprechenden reducirten Abscisse bedienen, was bei ausgeführten Rechnungen nicht umgangen werden kann, so ist es nicht mehr gleichgültig, welchen der beiden Ausdrücke $[r_\beta r_\gamma], [r_\gamma r_\beta]$ man für (a) setzt, sondern man muß denjenigen nehmen, für welchen die an zweiter Stelle stehende Abscisse die größere ist.

16.

Ist α die Abscisse eines gegebenen Punctes der geodätischen Linie $\mathfrak{B}$, so wird die reducirte Abscisse

$$[\alpha r]$$

des Punctes r mit Bezug auf α als Anfangspunct durch folgende Bedingungen defnirt:

$$1. \quad \frac{\partial^2 [\alpha r]}{\partial r^2} + k[\alpha r] = 0$$

im Allgemeinen, und für $r = \alpha$

$$[\alpha r] = 0, \quad \frac{\partial [\alpha r]}{\partial r} = 1.$$

Dazu kommt das im ersten Abschn. art. 4 gefundene Resultat, daß $[\alpha r]$ und seine erste Derivirte allenthalben stetig sein müssen, was je nach dem Verlaufe der Linie $\mathfrak{B}$ als Beschränkung der Veränderlichkeit von m oder aber auch von r aufzufassen ist.

Multiplicirt man die Gleichung 1. mit $[\beta r] \partial r$, so folgt durch Integration, daß der Ausdruck

$$[\alpha r] \frac{\partial [\beta r]}{\partial r} - [\beta r] \frac{\partial [\alpha r]}{\partial r}$$

constant ist. Nimmt man daher zur Bestimmung seines Werthes ein-

mal $r = \alpha$, dann $r = \beta$, so findet er sich $- [\beta\alpha]$, und auch $- [\alpha\beta]$; also haben wir

$$2. \quad [\alpha\beta] + [\beta\alpha] = 0,$$

wie schon im vorigen art. gefunden wurde, und

$$3. \quad [\alpha r] \frac{\partial [\beta r]}{\partial r} - [\beta r] \frac{\partial [\alpha r]}{\partial r} = [\alpha\beta].$$

Nimmt man hier die Derivirte nach β , und läßt dann β mit α zusammenfallen, so folgt

$$4. \quad [\alpha r] \frac{\partial^2 [\alpha r]}{\partial \alpha \partial r} - \frac{\partial [\alpha r]}{\partial \alpha} \frac{\partial [\alpha r]}{\partial r} = 1.$$

Bildet man endlich mittelst 3. das Product $[\alpha\beta][\gamma r]$, so folgt durch cyklische Vertauschung der Punkte α, β, γ

$$5. \quad [\alpha r][\beta\gamma] + [\beta r][\gamma\alpha] + [\gamma r][\alpha\beta] = 0.$$

Diese Gleichung ist nichts anderes als der auf vier Punkte einer geodätischen Linie ausgedehnte bekannte Satz über vier Punkte einer Geraden. Im Übrigen sind die Gleichungen 3. und 5. Additionstheoreme, von denen die der Kugeloberfläche entsprechenden Sätze über die Function $[\alpha r] = \sin(r - \mu)$ die speciellsten Fälle sind.

17.

Wir gehen nun zur Untersuchung derjenigen Abscissen r über, für welche

$$[\alpha r] = 0$$

wird. Um auch für den Fall, wo die geodätische Linie $\mathfrak{B}$ eine in sich zurückkehrende ist, die bei dieser Untersuchung stattfindenden Verhältnisse gehörig zu berücksichtigen, ordnen wir die zu diesen Abscissen gehörigen Punkte nicht nach ihrer geometrischen Aufeinanderfolge an $\mathfrak{B}$ entlang, sondern nach der Aufeinanderfolge ihrer Abscissen, so daß immer der Fall möglich bleibt, wo ein späterer Punkt des Systems räumlich zwischen zwei ihm vorangehenden liegt.

Um endlich bei der geometrischen Deutung von Untersuchungen über die reducirte Abscisse unrichtige Folgerungen zu vermeiden, muß ein merkwürdiger Umstand berücksichtigt werden, der bis jetzt noch nicht beachtet worden zu sein scheint.

Ich will voraussetzen, man habe für zwei aufeinander abwickelbare Flächen S und S' die rechtwinkligen Coordinaten ihrer Punkte durch dieselben Variablen p, q in der Weise dargestellt, daß zwei Punkte, welche gleichen Werthen der Variablen p, q entsprechen, bei

der Abwicklung aufeinander fallen. Hat man alsdann für eine geodätische Linie $\alpha\beta$ der Fläche S die reducirte Abscisse $[\alpha\beta]$ in Function der Coordinaten ihrer Endpunkte dargestellt, so ist dieser Ausdruck nach art. 14 auch die reducirte Abscisse für die geodätische Linie $\alpha'\beta'$ der Fläche S' , auf welche sich jene abwickelt, aber nur unter der Voraussetzung, daß die Fläche S' auch wirklich die vollständige Abwicklung der Linie $\alpha\beta$ enthält.

In der That folgt aus der Lehre von der Abwicklung krummer Oberflächen keineswegs, daß, wenn ein Theil einer gegebenen Fläche sich einer bestimmten Bedingung gemäß ohne Dehnung, aber mit oder ohne unstetige Richtungsänderungen der Tangentialebene umbiegen läßt, dies auch von der vollständigen Fläche gilt.

Man denke sich z. B. von einer Rotationsfläche S eine von zwei Parallelkreisen und zwei Meridianbögen begrenzte Zone, welche die Oberfläche wenigstens theilweise mehrfach bedeckt, und n mal um dieselbe herumreicht. Soll diese Zone durch Auseinanderwicklung in eine neue, geschlossene Rotationsfläche S' verwandelt werden, welche nur einmal um ihre Axe herumreicht, so ist dies stets, aber auch nur dann möglich, wenn auf der ursprünglichen Zone der Neigungswinkel ihrer Normale gegen die Ebene des Aequators nirgendwo größer ist als derjenige Winkel im ersten Quadranten, dessen Sinus $= \frac{1}{n}$ ist. Durch geeignete Wahl von n kann man bei jeder Rotationsfläche S (mit Ausnahme des Kegels) bewirken, daß es Zonen giebt, welche dieser Bedingung genügen, und andere, die ihr nicht genügen. Diese letzteren gehen bei der Aufwicklung verloren, und die neue Fläche S' wird von allen auf der ursprünglichen vorhandenen geodätischen Linien nur diejenigen Stücke enthalten, welche auf einer Zone der ersten Art lagen.

Wenn man daher für diese neue Fläche S' finden würde, daß z. B. die reducirte Abscisse $[\alpha'\beta']$ für einen reellen Werth β' verschwindet, so kann immerhin der Fall stattfinden, daß demungeachtet die Oberfläche S' keinen diesem Werthe entsprechenden reellen Punct enthält, und man kann alsdann nur schliessen, daß es noch andere durch die Function $[\alpha'\beta']$ nach art. 14 bestimmte Oberflächen S giebt, auf denen S' abwickelbar ist, ohne sie ganz zu bedecken, und welche auf ihrem unbedeckten Theile zu jenem reellen Werthe β' auch den entsprechenden realen Punct darbieten.

18.

Dieses so verstanden, ist es z. B. nach dem Jacobi'schen Kriterium für die kürzesten Linien klar, daß die Linie $\mathfrak{B}$ nur solange

eine kürzeste Verbindungslinie von r mit α ist, als zwischen r und α kein mit α sich ändernder Werth β enthalten ist, für den $[\alpha\beta] = 0$ ist.

Sei nun das Krümmungsmaß k auf einer den Punct α enthaltenden Strecke von $\mathfrak{B}$ negativ. Da in α selbst $[\alpha r] = 0$, $\frac{\partial[\alpha r]}{\partial r} = 1$, also positiv ist, so wird zu Anfange $[\alpha r]$ mit r zugleich wachsen, folglich $[\alpha r]$ selbst, und mit ihm $\frac{\partial^2[\alpha r]}{\partial r^2} = -k[\alpha r]$ positiv werden. Solange dies der Fall ist, wächst also auch die erste Derivirte, und zwar über 1 hinaus, mithin $[\alpha r]$ umsomehr, und mit beschleunigter Geschwindigkeit. Da $[\alpha r]$ in der entgegengesetzten Richtung unaufhörlich abnimmt, solange k negativ ist, so folgt der Satz:

Zwei unendlich benachbarte geodätische Linien können sich von ihrem Eintritt in ein Flächenstück von negativem Krümmungsmaße bis zum nächsten Austritte aus demselben niemals in mehr als einem Puncte schneiden.

Mit Rücksicht auf das oben erwähnte Kriterium für kürzeste Linien folgt hieraus auch der von Jacobi ohne Beweis ausgesprochene Satz (Vorlesungen über Dynamik pag. 46):

Auf einem Flächenstücke von negativem Krümmungsmaße ist jede geodätische Linie zugleich eine kürzeste Verbindungslinie ihrer Endpuncte.

Den Beweis dieser Sätze kann man auch aus der Gleichung

$$[\alpha r] \frac{\partial[\alpha r]}{\partial r} = \int_{\alpha}^r \left[\left(\frac{\partial[\alpha r]}{\partial r} \right)^2 - k[\alpha r]^2 \right] \partial r$$

ziehen. Weniger einfach ist die Untersuchung für den Fall, wo das Krümmungsmaß positiv ist.

Ist k positiv, so haben $[\alpha r]$ und seine zweite Derivirte entgegengesetzte Vorzeichen. Läßt man daher r ununterbrochen wachsen, so wird die erste Derivirte wachsen oder abnehmen, jenachdem $[\alpha r]$ negativ oder positiv ist, während umgekehrt $[\alpha r]$ selbst wächst oder abnimmt, jenachdem die erste Derivirte positiv oder negativ ist. Wir haben demnach vier Fälle zu unterscheiden, zu deren geometrischen Darstellung wir $\mathfrak{B}$ um den Punct α unendlich wenig drehen, so daß, wenn $\partial\varphi$ der Drehungswinkel bei α ist, der Punct r den zu $\mathfrak{B}$ senkrechten Weg $[\alpha r]\partial\varphi$ beschreibt, welcher nach derselben oder der entgegengesetzten Seite wie $\partial\varphi$ aufzutragen ist, jenachdem $[\alpha r]$ positiv oder negativ ist, und ein wirkliches Schneiden beider Linien eintritt, wenn $[\alpha r]$ sein Zeichen wechselt.

Liegt r nahe genug bei α , so ist $[\alpha r]$ positiv für $r > \alpha$, negativ für $r < \alpha$, $\frac{\partial[\alpha r]}{\partial r}$ in beiden Fällen positiv. Diese Fälle finden also unter allen Umständen wenigstens einmal statt.

1) Ist nun $[\alpha r]$ negativ, $\frac{\partial[\alpha r]}{\partial r}$ positiv, so nehmen beide mit r zu, und die Zunahme von $[\alpha r]$ ist eine beschleunigte. Findet dies statt auf der Strecke $r_1 < r < r_2$, so wird

$$[\alpha r_2] > \frac{\partial[\alpha r_1]}{\partial r_1} (r_2 - r_1) + [\alpha r_1],$$

und daraus folgt, daß r_2 nicht jede Grenze überschreiten kann. Denn sonst würde, wie weit auch die negative GröÙe $[\alpha r_1]$ unter Null liegt, die rechte Seite der Ungleichheit durch Vergrößerung von r_2 positiv gemacht werden können, während sie $< [\alpha r_2]$, also negativ bleiben muß. Wenn man daher im vorliegenden Falle r , also auch die positive GröÙe $\frac{\partial[\alpha r]}{\partial r}$ wachsen läßt, so muß einmal der Fall eintreten, wo die ursprünglich negative GröÙe $[\alpha r]$ gleich Null und hierauf positiv wird.

Es versteht sich von selbst, daß diese Schlüsse ihre Gültigkeit verlieren, wenn bei wachsendem r das Krümmungsmaß nicht immer positiv bleibt.

2) Ist nun auch $[\alpha r]$ positiv geworden, so nimmt $[\alpha r]$ noch immer zu, $\frac{\partial[\alpha r]}{\partial r}$ dagegen nimmt ab, und die Zunahme von $[\alpha r]$ ist demnach eine verzögerte. Hier sind zwei Fälle denkbar; entweder convergirt bei unbegrenzter Zunahme von r $\frac{\partial[\alpha r]}{\partial r}$ gegen eine positive feste Grenze, die auch $= 0$ sein kann, und dann verschwindet zuletzt die zweite Derivirte, also auch $k[\alpha r]$, d. i. k , weil $[\alpha r]$ nicht abgenommen hat, also von Null verschieden ist. Dieser Fall tritt z. B. bei den Meridianen eines Rotationsparaboloids ein. — Oder aber es geht $\frac{\partial[\alpha r]}{\partial r}$ durch Null, $[\alpha r]$ überschreitet ein Maximum, und es tritt der folgende Fall ein.

3) Ist $[\alpha r]$ positiv, $\frac{\partial[\alpha r]}{\partial r}$ negativ, so nehmen beide ab, während r wächst, ersteres mit beschleunigter Geschwindigkeit, und man beweist wie im ersten Falle, daß in Folge dessen $[\alpha r]$ durch Null gehen muß.

4) Ist auf diese Weise auch $[\alpha r]$ negativ geworden, so nimmt seine Derivirte wieder zu, $[\alpha r]$ selbst fährt fort abzunehmen, aber mit verzögerter Geschwindigkeit. Jenachdem nun, wie im zweiten Falle, die Derivirte gegen eine feste Grenze convergirt, die nicht positiv ist,

oder durch Null geht, wird $[\alpha r]$ im Abnehmen bleiben, oder der erste Fall eintreten, der seinerseits wieder den zweiten nach sich zieht.

Es folgt also, daß bei positivem Krümmungsmasse eine der ursprünglichen unendlich benachbarte geodätische Linie, welche jene im Punkte α schneidet, im zweiten und vierten Falle an dieser ohne Ende entlang laufen kann, ohne sie von Neuem zu schneiden, daß dagegen auf den ersten und dritten Fall nothwendig ein Durchschnitt folgt, ebenso wie dem zweiten und vierten nothwendig ein solcher vorangeht.

Da sich ferner ergeben hat, daß $[\alpha r]$ und seine erste Derivirte sowohl bei positivem wie bei negativem Krümmungsmasse nie gleichzeitig verschwinden, so folgt noch, daß mit dem Verschwinden von $[\alpha r]$ stets ein wirkliches Schneiden, niemals ein Berühren der geodätischen Linien verbunden ist. Wenn daher mehr als ein Schnittpunct stattfindet, so gehören zwei, bei wachsendem r aufeinander folgende Schnittpuncte niemals zur nämlichen Art, und es wechselt $[\alpha r]$ beim Überschreiten eines Schnittpunctes jedesmal sein Zeichen.

19.

Es lohnt der Mühe, unter der Voraussetzung, daß die Gleichung

$$1. \quad [\alpha r] = 0$$

mehr als eine Wurzel hat, die Abhängigkeit derselben von der stets vorhandenen Wurzel $r = \alpha$ einer eingehenden Untersuchung zu unterwerfen.

Ist β eine von α verschiedene Wurzel dieser Gleichung, so folgt aus art. 16 Formel 5. für jedes r und γ

$$\frac{[\alpha r]}{[\beta r]} = \frac{[\alpha \gamma]}{[\beta \gamma]},$$

d. h. es ist alsdann

$$\frac{[\alpha r]}{[\beta r]}$$

von r ganz unabhängig. Dies gilt auch umgekehrt; denn wenn dieser Bruch nach r constant ist, so findet auch die vorangehende Gleichung statt, und aus der erwähnten Formel folgt bei beliebigen r und γ $[\gamma r][\alpha \beta] = 0$, d. h. $[\alpha \beta] = 0$, weil im ersten Factor r beliebig ist.

Aus der identischen Gleichung 3. art. 16 folgt aber unter der nämlichen Voraussetzung, daß vorstehender Bruch gleich ist

$$\frac{\partial[\alpha r]}{\partial r} : \frac{\partial[\beta r]}{\partial r},$$

bei ebenfalls willkürlichem r . Nimmt man daher $r = \beta$ oder $r = \alpha$, so folgt

$$2. \quad \frac{[\alpha r]}{[\beta r]} = \frac{\partial[\alpha\beta]}{\partial\beta}, \quad \frac{[\beta r]}{[\alpha r]} = \frac{\partial[\beta\alpha]}{\partial\alpha} = -\frac{\partial[\alpha\beta]}{\partial\alpha},$$

wenn $[\alpha\beta]$ selbst $= 0$ ist.

Betrachtet man nun β als Function von α , so folgt aus $\partial[\alpha\beta] = 0$, wenn man die Derivirten wegschafft:

$$\frac{\partial\alpha}{[\alpha r]^2} = \frac{\partial\beta}{[\beta r]^2},$$

folglich ist

$$3. \quad \frac{\partial\beta}{\partial\alpha} = \frac{[\beta r]^2}{[\alpha r]^2}$$

stets positiv und niemals Null oder unendlich. Denn könnte dies z. B. für ein bestimmtes α verschwinden, so müßte die rechte Seite für dieses α und jedes r gleich Null sein, was ein Widerspruch ist.

Wenn also die Gleichung 1. noch eine zweite reelle Wurzel β hat, so wird diese mit α zugleich stets und ohne Stillstände wachsen, solange sie stetig ist.

Sei

$$\frac{\partial[\alpha\beta]}{\partial\beta} = u, \quad \frac{\partial[\alpha\beta]}{\partial\alpha} = v,$$

also wegen 2. und 3.

$$uv = -1, \quad \frac{\partial\beta}{\partial\alpha} = \frac{1}{u^2}.$$

Dann folgt

$$\epsilon u = \frac{\partial^2[\alpha\beta]}{\partial\alpha\partial\beta} \partial\alpha + \frac{\partial^2[\alpha\beta]}{\partial\beta^2} \partial\beta,$$

oder da der Factor von $\epsilon\beta$, welcher $= -k_\beta[\alpha\beta]$ ist, verschwindet,

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha} = \frac{\partial^2[\alpha\beta]}{\partial\alpha\partial\beta}.$$

Daraus folgt weiter

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} &= \frac{\partial^3[\alpha\beta]}{\partial\alpha^2\partial\beta} + \frac{\partial^2[\alpha\beta]}{\partial\alpha\partial\beta^2} \cdot \frac{\partial\beta}{\partial\alpha} \\ &= -k_\alpha \frac{\partial[\alpha\beta]}{\partial\beta} - k_\beta \frac{\partial[\alpha\beta]}{\partial\alpha} \frac{\partial\beta}{\partial\alpha}, \end{aligned}$$

endlich

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} = -k_\alpha \cdot u + \frac{k_\beta}{u^3}.$$

Setzt man hier für u seinen Werth ein, so folgt schliesslich

$$4. \quad 3\left(\frac{\partial^2\beta}{\partial\alpha^2}\right)^2 - 2\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\frac{\partial^3\beta}{\partial\alpha^3} = 4k_\beta\left(\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\right)^4 - 4k_\alpha\left(\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\right)^2,$$

welcher Differentialgleichung dritter Ordnung alle Wurzeln β der Gleichung $[\alpha\beta] = 0$ Genüge leisten.

Man bestätigt leicht, daß die nämliche Differentialgleichung sich auch ergibt, wenn man β als Function von α so bestimmt, daß zu zwei Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 m}{\partial \alpha^2} + k_\alpha m = 0,$$

die nicht in constantem Verhältnisse zu einander stehen, sich stets zwei Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \beta^2} + k_\beta M = 0$$

angeben lassen, welche das nämliche Verhältniß liefern. Dies Verfahren ist genau dasselbe, durch welches Herr Kummer (Crelle's Journal XV. p. 39 und 127) die Jacobi'sche Differentialgleichung abgeleitet hat, welcher sämtliche Modulargleichungen der elliptischen Functionen Genüge leisten, und welche einen besondern Fall der vorstehenden bildet.

Die allgemeine Lösung obiger Differentialgleichung stellt sich demnach in folgender Form dar:

$$\frac{[\alpha_1 \alpha]}{[\alpha_2 \alpha]} = \frac{p[\lambda \beta] + q[\mu \beta]}{r[\lambda \beta] + s[\mu \beta]},$$

vorausgesetzt, daß weder $[\alpha_1 \alpha_2]$, noch $[\lambda \mu] = 0$ ist, weil sonst nach dem zu Eingange dieses art. gefundenen Satze eine von beiden Seiten der Gleichung constant wäre. Aus demselben Grunde darf $ps - qr$ nicht $= 0$ sein.

Was die Constanten p, q, r, s betrifft, so müssen dieselben offenbar so gewählt werden, daß beide Zähler und ebenso beide Nenner gleichzeitig verschwinden können. Sind nämlich β_1, β_2 die Werthe, welche β für $\alpha = \alpha_1$ und $\alpha = \alpha_2$ erlangt, so muß zur Rechten der Zähler für $\beta = \beta_1$, der Nenner für $\beta = \beta_2$ verschwinden. Aus der Differentialgleichung für M folgt also, daß jener zu $[\beta_1 \beta]$, dieser zu $[\beta_2 \beta]$ proportional ist, und unsere allgemeine Lösung nimmt hiernach die vereinfachte Form

$$\frac{[\alpha_1 \alpha]}{[\alpha_2 \alpha]} = \lambda \cdot \frac{[\beta_1 \beta]}{[\beta_2 \beta]}$$

an, wo λ eine Constante ist.

Sind endlich auch α_3, β_3 gleichzeitige Werthe von α, β , so folgt durch Elimination von λ

$$5. \quad \frac{[\alpha_1 \alpha_3]}{[\alpha_2 \alpha_3]} : \frac{[\alpha_1 \alpha]}{[\alpha_2 \alpha]} = \frac{[\beta_1 \beta_3]}{[\beta_2 \beta_3]} : \frac{[\beta_1 \beta]}{[\beta_2 \beta]}$$

als allgemeine Lösung der Differentialgleichung 4., in welcher die nöthige Anzahl willkürlicher Constanten zur Evidenz gebracht ist, indem

über die Werthe $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ von β , welche drei gegebenen Werthen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ von α entsprechen sollen, nach Belieben verfügt werden kann. Mit Benutzung einer in der Planimetrie üblichen Ausdrucksweise kann man also sagen:

Die Differentialgleichung 4. ist die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, daß der Punct β mit drei festen Puncten $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ stets das nämliche Doppelverhältniß gebe, wie der Punct α mit drei ebenfalls festen Puncten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Diese sechs festen Punkte können nach Belieben angenommen werden, bis auf die Bedingung, daß von den sechs reducirten Abscissen

$$[\alpha_1 \alpha_2], [\alpha_1 \alpha_3], [\alpha_2 \alpha_3], [\beta_1 \beta_2], [\beta_1 \beta_3], [\beta_2 \beta_3]$$

keine $= 0$ sei.

Wählt man unter dieser Voraussetzung, falls dies möglich ist, β_1, β_2 und β_3 so, daß

$$[\alpha_1 \beta_1] = 0, \quad [\alpha_2 \beta_2] = 0, \quad [\alpha_3 \beta_3] = 0$$

wird, so geht die Lösung der Gleichung 4. über in die Gleichung $[\alpha \beta] = 0$, von der wir ausgegangen sind. In der That tritt alsdann $\frac{[\beta_1 \beta]}{[\beta_2 \beta]}$ in constantes Verhältniß zu $\frac{[\alpha_1 \beta]}{[\alpha_2 \beta]}$, und es folgt zunächst

$$\frac{[\alpha_1 \alpha]}{[\alpha_1 \beta]} : \frac{[\alpha_2 \alpha]}{[\alpha_2 \beta]} = \lambda.$$

Nimmt man hier $\alpha = \alpha_3, \beta = \beta_3$, so wird wegen $[\alpha_3 \beta_3] = 0$ zur Linken der Divisor gleich dem Dividenten, also ist $\lambda = 1$ und es folgt

$$[\alpha_1 \alpha] [\alpha_2 \beta] + [\alpha_2 \alpha] [\alpha_1 \beta] = 0,$$

endlich wegen 5. art. 16

$$[\alpha \beta] [\alpha_1 \alpha_2] = 0, \text{ d. i. } [\alpha \beta] = 0,$$

w. z. b. w.

20.

Sei m die reducirte Länge eines geodätischen Bogens, welcher die Punkte p_0, q_0 und p, q verbindet. Will man sich zur Bestimmung von m als Function von p, q der Gleichung B. des art. 12 bedienen, so muß man noch, außer den bereits festgestellten Stetigkeitsbedingungen, die am Schlusse des art. 14 gefundene Anfangsbedingung hinzufügen, zufolge welcher m^2 , wenn p, q in unendliche Nähe von p_0, q_0 rückt, bis auf Größen vierter Ordnung das Quadrat des beide Punkte verbindenden Linienelementes wird.

Dies setzt aber voraus, daß man in der Differentialgleichung B. die vom Azimuth $\mathfrak{A}$ abhängigen Coefficienten, welche nach art. 2 nichts anderes als $\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)^2$, $-\frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial q}{\partial s}$, $\left(\frac{\partial q}{\partial s}\right)^2$ sind, aus den dort aufgestellten Differentialgleichungen bestimmt, und dann das Verhältniß zweier von ihnen zum dritten durch p, q, p_0, q_0 und das Azimuth bei p_0, q_0 ausgedrückt habe.

Um diese Schwierigkeit zu beseitigen, werden wir die Gleichung B. noch einmal differentiiren, und mittelst der hieraus folgenden $\frac{\partial p}{\partial s}$ und $\frac{\partial q}{\partial s}$ eliminiren, woraus dann für m eine partielle Differentialgleichung folgt, in welcher nur p, q vorkommen, während die Coordinaten p_0, q_0 nur noch in Grenzbedingungen eingehen, und das Azimuth bei p_0, q_0 aus allen Bedingungen eliminirt ist.

Für die folgenden Rechnungen, die durchgängig nur angedeutet werden müssen, werden wir statt der bisherigen Bezeichnungen einfachere wählen, deren Bedeutung sich aber durch die Vergleichung mit den entsprechenden Formeln von selbst ergibt.

A. Es sind p und q als Functionen von s so zu bestimmen, daß zwei Differentialgleichungen von der Form (vergl. art. 2)

$$\begin{aligned} 1. \quad p'' &= \lambda_1 p'^2 + 2\mu_1 p'q' + \nu_1 q'^2 \\ q'' &= \lambda_2 p'^2 + 2\mu_2 p'q' + \nu_2 q'^2 \end{aligned}$$

erfüllt werden, und zugleich

$$2. \quad Ep'^2 + 2Fp'q' + Gq'^2 = 1$$

wird, wenn das Quadrat des Linienelementes

$$\hat{c}s^2 = E\hat{c}p^2 + 2F\hat{c}p\hat{c}q + G\hat{c}q^2$$

ist. Endlich müssen p, q für $s = 0$ in p_0, q_0 übergehen.

Die Ausdrücke, welche in 1. rechts vom Gleichheitszeichen vorkommen, werden wir durch $(\lambda_1 \mu_1 \nu_1)$, $(\lambda_2 \mu_2 \nu_2)$ bezeichnen.

B. Ist die vorige Aufgabe gelöst, und wird

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{\partial^2 m}{\partial p^2} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial m}{\partial p} - \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial m}{\partial q} + Ekm &= \mathfrak{E} \\ \frac{\partial^2 m}{\partial p \partial q} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial m}{\partial p} - \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial m}{\partial q} + Fkm &= \mathfrak{F} \\ \frac{\partial^2 m}{\partial q^2} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \frac{\partial m}{\partial p} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial m}{\partial q} + Gkm &= \mathfrak{G} \end{aligned}$$

gesetzt, so haben wir aus der erwähnten Gleichung B. zur Bestimmung von m :

$$2. \quad \mathfrak{E}p'^2 + 2\mathfrak{F}p'q' + \mathfrak{G}q'^2 = 0,$$

wozu auſser den Stetigkeitsbedingungen noch die Anfangsbedingung gehört, daſs, wenn p, q von p_0, q_0 nur noch um unendlich kleine Gröſſen erſter Ordnung verſchieden ſind, bis auf Gröſſen vierter Ordnung genau

$$3. \quad m^2 = E_0(p - p_0)^2 + 2F_0(p - p_0)(q - q_0) + G_0(q - q_0)^2$$

wird.

§. Wir ſetzen nun voraus, daſs dieſen ſämmtlichen Bedingungen genügt iſt. Dann beſtimmen p, q als Functionen von s eine von p_0, q_0 ausgehende geodätische Linie, s wird die Länge des zwischen beiden Punkten enthaltenen Stückes dieſer Linie und m , wie verlangt, die reducirte Länge von s .

Aus B. 2. folgt durch Differentiiren

$$1. \quad 2(\mathfrak{E}p' + \mathfrak{F}q')p'' + 2(\mathfrak{F}p' + \mathfrak{G}q')q'' + \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial p}p'^3 + \left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial q} + 2\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial p}\right)p'^2q' + \dots = 0,$$

und wenn man hier für p'', q'' aus A. 1. ihre Werthe einſetzt:

$$2. \quad 2(\mathfrak{E}p' + \mathfrak{F}q')(\lambda_1\mu_1\nu_1) + 2(\mathfrak{F}p' + \mathfrak{G}q')(\lambda_1\mu_2\nu_2) + \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial p}p'^3 + \dots = 0.$$

Dieſe Gleichung iſt, wie B. 2. in p', q' homogen, aber vom dritten Grade. Wenn dieſelbe nicht bei beliebigen Werthen der Gröſſen λ, μ, ν identische Folge von B. 2. iſt, ſo kann man aus beiden Gleichungen p' und q' eliminiren; das Reſultat dieſer Elimination

$$3. \quad [m] = 0,$$

iſt die oben erwähnte partielle Differentialgleichung. Zu ihr gehört auſser den Stetigkeitsbedingungen noch B. 3. als Anfangsbedingung.

Wenn dagegen die Gleichung §. 2. bei beliebigen Werthen der Gröſſen λ, μ, ν mit B. 2. verträglich iſt, ſo genügen p', q' mit B. 2. zugleich den linearen Gleichungen $\mathfrak{E}p' + \mathfrak{F}q' = 0$, $\mathfrak{F}p' + \mathfrak{G}q' = 0$. In dieſem Falle iſt alſo $\mathfrak{E}p'^2 + 2\mathfrak{F}p'q' + \mathfrak{G}q'^2$ ein vollſtändiges Quadrat, und m genügt der partiellen Differentialgleichung

$$(3.) \quad \mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E}\mathfrak{G} = 0.$$

Da die Gleichung $[m] = 0$ jetzt für alle Werthe der ſechs Gröſſen λ, μ, ν beſteht, ſo iſt ſie nothwendige Folge der vorſtehenden.

Während alſo die reducirte Länge m in allen Fällen auſser den Anfangs- und Stetigkeitsbedingungen der Gleichung §. 3. genügt, giebt

es noch Ausnahmefälle, wo sie der einfachern Differentialgleichung (3.) Genüge leistet, und jene eine Folge von dieser wird.

ℳ. Wir untersuchen nun die umgekehrte Frage, ob auch jede der Gleichung ℄. 3. und den dazu gehörigen Bedingungen genügende Function eine reducirte Länge ist. Damit dies der Fall sei, ist erforderlich und hinreichend, daß mit Zugrundelegung der so bestimmten Function m sich auch die in ℔. und ™. gestellten Bedingungen befriedigen lassen.

Die Gleichung ℄. 3. ist die Bedingung dafür, daß den Gleichungen ™. 2. und ℄. 2. durch den nämlichen Werth von $\frac{q'}{p'} = \frac{\partial q}{\partial p}$ genügt werden könne. Wir setzen also voraus, es sei $\frac{q'}{p'}$ eine Lösung der Gleichung ™. 2., durch welche auch ℄. 2. befriedigt ist. Setzt man dies in ℔. 2. ein, so sind auch p', q' bestimmt bis aufs Zeichen, von welchem die Richtung der wachsenden s abhängt, und welches auf das Verhältnis $\frac{\partial q}{\partial p}$ keinen Einfluss hat.

Durch Differentiiren folgt jetzt aus ™. 2. die Gleichung ℄. 1., und wenn man von dieser die bereits befriedigte Gleichung ℄. 2. subtrahirt und den Factor 2 beseitigt

$$1. \quad [\mathfrak{E}p' + \mathfrak{F}q'] [p'' - (\lambda_1 \mu_1 \nu_1)] + [\mathfrak{F}p' + \mathfrak{G}q'] [q'' - (\lambda_2 \mu_2 \nu_2)] = 0.$$

Differentiirt man die bei der Bestimmung von p', q' benutzte Gleichung ℔. 2., so erhält man eine Gleichung von derselben Form wie ℄. 1., und von welcher zu bemerken ist, daß sie nach art. 2 vermöge der Bedeutung der Coefficienten $\lambda_1 = - \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}$ u. s. w. identisch wird, wenn man p'', q'' durch $(\lambda_1 \mu_1 \nu_1), (\lambda_2 \mu_2 \nu_2)$ ersetzt. Es ist also auch, sobald p', q' der Gleichung ℔. 2. genügen,

$$2. \quad [Ep' + Fq'] [p'' - (\lambda_1 \mu_1 \nu_1)] + [Fp' + Gq'] [q'' - (\lambda_2 \mu_2 \nu_2)] = 0.$$

Wenn die Determinante

$$3. \quad \Delta = \begin{vmatrix} \mathfrak{E}p' + \mathfrak{F}q' & \mathfrak{F}p' + \mathfrak{G}q' \\ Ep' + Fq' & Fp' + Gq' \end{vmatrix}$$

dieser beiden Gleichungen nicht $= 0$ ist, so sind also auch die Differentialgleichungen ℔. 1. erfüllt, und zwar ist eine einmalige Integration derselben geleistet, indem p', q' als Functionen von p, q, p_0, q_0 erhalten worden sind. Bestimmt man also hieraus p, q so, daß sie für $s = 0$ in p_0, q_0 übergehen, so sind alle Bedingungen ℔. und ™. befriedigt, und es ist dann namentlich wegen ℔. 2. die unabhängige Variable s die Länge einer geodätischen Linie zwischen p_0, q_0 und p, q , und m ihre reducirte Länge.

Wenn dagegen unter der nämlichen Voraussetzung, daß den Gleichungen A. 2., B. 2. und C. 2. Genüge geleistet ist, Δ identisch verschwindet, so sind die Gleichungen A. 1. nicht mehr eine nothwendige Folge der beiden vorstehenden. Man kann in diesem Falle eine GröÙe λ so bestimmen, daß $\mathcal{E}p' + \mathfrak{F}q' = \lambda(Ep' + Fq')$, und zugleich $\mathfrak{F}p' + \mathcal{G}q' = \lambda(Fp' + Gq')$ wird. Addirt man diese Gleichungen, nachdem man die erste mit p' , die andere mit q' multiplicirt hat, so folgt wegen B. 2. und A. 2. $0 = \lambda$, so daß also, wenn Δ identisch verschwindet, an Stelle von B. 2. die einfachern Gleichungen $\mathcal{E}p' + \mathfrak{F}q' = 0$, $\mathfrak{F}p' + \mathcal{G}q' = 0$ treten.

Folglich genügt m in diesem Falle auch noch der Gleichung $\mathfrak{F}^2 - \mathcal{E}\mathcal{G} = 0$. Es wird sich weiter unten ergeben, daß nicht jede Function, welche diese Gleichung befriedigt, eine reducirte Länge ist, abgesehen davon, daß sich nur in Ausnahmefällen unter den Lösungen dieser Gleichung überhaupt reducirte Längen befinden.

Aus den vorangehenden Untersuchungen ergibt sich also das folgende Resultat: Jede Function m , welche auÙer den Anfangs- und Stetigkeitsbedingungen noch der Differentialgleichung C. 3., aber nicht zugleich der Gleichung C. (3.) genügt, ist eine reducirte Länge, und es lassen sich aus dem Ausdrücke dieser Function mittelst der Gleichungen B. 2. und A. 2. auf algebraischem Wege p' und q' , also das Azimuth $\mathfrak{A}$ der von p_0q_0 nach pq gehenden geodätischen Linie finden, während es zur Bestimmung ihrer Länge noch einer Integration bedarf. Bei der Bestimmung von p', q' wird ein Vorzeichen verfügbar, welches bestimmt ist, sobald festgestellt wird, ob s von p_0q_0 nach pq hin, oder in umgekehrter Richtung wächst. Vgl. art. 13.

21.

Die Untersuchung des Ausnahmefalles, welcher sich im Vorangehenden dargeboten hat, stützt sich auf die Bemerkung, daß der Ausdruck Δ , unter Voraussetzung linearer Substitutionen für p' und q' allein, die simultane Covariante der beiden Formen

$$u = \mathcal{E}p'^2 + 2\mathfrak{F}p'q' + \mathcal{G}q'^2$$

$$v = Ep'^2 + 2Fp'q' + Gq'^2$$

ist. Man findet in Folge dessen durch geeignete Specialisirung dieser Formen

$$\Delta^2 = - \begin{vmatrix} \mathcal{E}v - Eu & \mathfrak{F}v - Fu \\ \mathfrak{F}v - Fu & Gv - Gu \end{vmatrix}.$$

In unserm Falle ist aber (A. 2.) $v = 1$ und (B. 2.) $u = 0$; folglich wird

$$\mathcal{A} = \mathfrak{F}^2 - \mathfrak{G}\mathfrak{G}.$$

Dieser Ausdruck ist seinerseits wieder die Invariante von u bei linearen Substitutionen für p' und q' allein; er ist aber auch eine Invariante in weit ausgedehntem Sinne.

Setzt man zunächst in den Gleichungen der Oberfläche S

$$x = \varphi(p, q), \quad y = \psi(p, q), \quad s = \chi(p, q)$$

für die Variabeln p, q zwei voneinander unabhängige Functionen von p_1, q_1 , ein, wodurch die Fläche S nicht geändert wird, so geht die Function v über in eine neue Function

$$v_1 = E_1 p_1'^2 + 2F_1 p_1' q_1' + G_1 q_1'^2,$$

durch welche der neue Ausdruck des Linienelementes bestimmt ist, und die Function u , welche bei beliebigem m nichts anderes bedeutet als

$$u = \frac{\partial^2 m}{\partial s^2} + km,$$

geht über in eine neue Function

$$u_1 = \mathfrak{E}_1 p_1'^2 + 2\mathfrak{F}_1 p_1' q_1' + \mathfrak{G}_1 q_1'^2,$$

wo $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{G}_1$ für die neue Form des Linienelementes und die zugehörigen Variabeln, wegen des vorstehenden Werthes von u , der kein Coordinatensystem voraussetzt, ebenso gebildet sind, wie früher $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}$.

Da man andererseits die Werthe der Coefficienten in den transformirten Formen erhält, indem man in den ursprünglichen Formen blofs die lineare Substitution

$$(p) \quad p' = \frac{\partial p}{\partial p_1} \cdot p_1' + \frac{\partial p}{\partial q_1} \cdot q_1', \quad q' = \frac{\partial q}{\partial p_1} \cdot p_1' + \frac{\partial q}{\partial q_1} \cdot q_1'$$

macht, und $\mathcal{A}$ hierbei die erste Potenz der Substitutionsdeterminante

$$r = \frac{\partial p}{\partial p_1} \cdot \frac{\partial q}{\partial q_1} - \frac{\partial p}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial q}{\partial p_1}$$

ausscheidet, so folgt

$$\mathfrak{F}_1^2 - \mathfrak{E}_1 \mathfrak{G}_1 = r^2 (\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{G}\mathfrak{G}).$$

Sei allgemeiner S_1 eine auf S abwickelbare Fläche und das System ihrer Gleichungen

$$x = \varphi_1(p_1, q_1), \quad y = \psi_1(p_1, q_1), \quad s = \chi_1(p_1, q_1).$$

Dann kann man p und q als Functionen von p_1 und q_1 so bestimmen, daß die Linienelemente beider Flächen einander gleich werden, also wieder

$$v = v_1$$

wird. Aus der nämlichen Substitution für p und q ergibt sich eine lineare Substitution (p) für ihre Derivirten p' , q' . Führt man die erstere in m aus, so bleibt $u = \frac{\partial^2 m}{\partial s^2} + km$ bei jeder Bedeutung von m un geändert, wenn S auf S_1 abgewickelt wird, also ist auch

$$u = u_1,$$

mithin wie oben $\mathfrak{F}_1^2 - \mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_1 = r^2(\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{G} \mathfrak{G})$.

Der Ausdruck $\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{G} \mathfrak{G}$, dessen Zusammensetzung durch die identische Gleichung

$$\partial \varphi^2 + \partial \psi^2 + \partial \chi^2 = E \partial p^2 + 2 F \partial p \partial q + G \partial q^2$$

bestimmt ist, ist also Invariante gegenüber jeder Substitution von Functionen $\varphi_1, \psi_1, \chi_1$ an Stelle von φ, ψ, χ , durch welche

$$\partial \varphi^2 + \partial \psi^2 + \partial \chi^2 = \partial \varphi_1^2 + \partial \psi_1^2 + \partial \chi_1^2$$

wird, unabhängig davon, ob hierbei gleichzeitig $\varphi = \varphi_1, \psi = \psi_1$ und $\chi = \chi_1$ sein kann oder nicht.

In derselben Weise muß dieses Theorem auch für das Krümmungsmass ausgesprochen werden, wenn man die Substitutionen, denen gegenüber dasselbe invariant ist, richtig bezeichnen will.

22.

Um nun die Natur der Flächen zu bestimmen, für welche bei jeder Lage des Punctes p, q die reducirte Länge m einer geodätischen Verbindungslinie dieses Punctes mit dem festen Puncte p_0, q_0 der Gleichung

$$\mathcal{A} = 0$$

genügt, mag dies nun für alle oder nur für specielle Lagen des Punctes p_0, q_0 stattfinden, bezeichnen wir den geodätischen Bogen zwischen beiden Puncten durch r , sein Azimuth bei p_0, q_0 durch φ , und nehmen die neuen Variablen $p_1 = r, q_1 = \varphi$. Dann wird das Quadrat des von p, q ausgehenden Linienelementes

$$\partial s^2 = \partial r^2 + m^2 \partial \varphi^2,$$

und hieraus folgt (art. 2 und B. 1. art. 20)

$$\mathfrak{G}_1 = \frac{\partial^2 m}{\partial r^2} + km$$

$$\mathfrak{F}_1 = \frac{\partial^2 m}{\partial r \partial \varphi} - \frac{\partial \log m}{\partial r} \frac{\partial m}{\partial \varphi}$$

$$\mathfrak{G}_1 = \frac{\partial^2 m}{\partial \varphi^2} + m \left(\frac{\partial m}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{m} \left(\frac{\partial m}{\partial \varphi} \right)^2 + km^2.$$

Da m eine reducirte Länge sein soll, so wird $\mathfrak{E}_1 = 0$; ferner ist

$$\mathfrak{F}_1 = m^2 \frac{\partial^2 \log m}{\partial r \partial \varphi},$$

also erhalten wir

$$m^4 \left(\frac{\partial^2 \log m}{\partial r \partial \varphi} \right)^2 - \left(\frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial q}{\partial \varphi} - \frac{\partial p}{\partial \varphi} \frac{\partial q}{\partial r} \right)^2 (\mathfrak{F}^2 - \mathfrak{E} \mathfrak{G}),$$

und da die rechte Seite $= 0$ sein soll,

$$\frac{\partial^2 \log m}{\partial r \partial \varphi} = 0.$$

Folglich ist m das Product aus zwei Factoren, von denen jeder nur eine der beiden Variablen r , φ enthält. Da aber $\frac{\partial m}{\partial r}$ für $r = 0$ in die Einheit übergeht, so ist m von φ völlig frei, und Function von r allein. Daraus ergibt sich weiter, daß auch das Krümmungsmaße k nur von r abhängig, also an jedem geodätischen Kreise entlang constant ist, dessen Centrum der Punct p_0 , q_0 ist.

Wenn umgekehrt, bei geeigneter oder beliebiger Lage des Punctes p_0 , q_0 , k nur von r , nie von φ abhängt, so wird auch die reducirte Länge m Function von r allein, und $\mathcal{A}$ identisch $= 0$.

Bei dieser Beschaffenheit von m zeigt aber der Ausdruck des Linienelementes, daß die Fläche S ohne Dehnung in eine Rotationsfläche umgebogen werden kann, so daß p_0 , q_0 Punct der Drehungsaxe wird.

In diesem Falle verwandeln sich alle von p_0 , q_0 ausgehenden geodätischen Linien in Meridiane, für deren reducirte Längen, weil sie vom Azimuth φ unabhängig sind, $\mathcal{A} = 0$ ist, und es giebt daher umgekehrt, wenn die Voraussetzungen unserer Untersuchung erfüllt sind, keinen von p_0 , q_0 ausgehenden geodätischen Bogen, für welchen $\mathcal{A}$ von Null verschieden ist.

Der Fall, daß die reducirte Länge der Gleichung $\mathcal{A} = 0$ genügt, bietet sich also dar,

1) bei den Flächen von constantem Krümmungsmaße für jede beliebige Lage des Punctes p_0 , q_0 ;

2) bei jeder andern Fläche, die sich auf eine Rotationsfläche abwickeln läßt, wenn man für p_0 , q_0 einen derjenigen Puncte wählt, welche dabei auf die Drehungsaxe fallen, vorausgesetzt, daß die ursprüngliche Fläche überhaupt einen solchen Punct enthält.

In allen übrigen Fällen ist, wenn man für m eine reducirte Länge nimmt, $\mathcal{A}$ von Null verschieden, folglich nicht bloß jede reducirte Länge eine Lösung der im art. 19 gefundenen Differentialgleichung

$$[m] = 0$$

nebst den dazu gehörigen Bedingungen, sondern auch umgekehrt jede Function, welche dieses System von Bedingungen befriedigt, eine reducirte Länge.

Da endlich nicht jede Lösung der Gleichung $\mathcal{A} = 0$ eine reducirte Länge ist, sondern nur eine solche, die von φ unabhängig ist, weil nur in diesem Falle $\mathcal{E}_1 = 0$ wird, so folgt, daß in den beiden obigen Ausnahmefällen auch die Gleichung $\mathcal{A} = 0$ zur Bestimmung der reducirten Länge nicht hinreicht, sondern diese, was in diesen Fällen aber auch zunächst liegt, direct aus der ursprünglichen Gleichung

$$\frac{\partial^2 m}{\partial r^2} + km = 0$$

gefunden werden muß.

Von den obigen Ausnahmefällen wird der erste im folgenden Abschn. art. 29 seine vollständige Erledigung finden; der andere tritt nur für besondere Lagen des Punctes p_0, q_0 ein, und bedarf als Grenzfall keiner besondern Behandlung.

Vierter Abschnitt.

Geodätische Classification der krummen Oberflächen.

23.

Nachdem im Vorangehenden nachgewiesen worden ist, welche Bedeutung den im zweiten Abschnitte gefundenen Integrabilitätsbedingungen beigelegt werden muß, werden wir die sämtlichen Formeln mit Benutzung der inzwischen gefundenen Vereinfachungen in entsprechender Weise zusammenstellen. Wir halten dabei an der Voraussetzung fest, daß die in den Seiten des geodätischen Dreiecks gezählten Abscissen in der art. 5 festgelegten Richtung wachsen, so daß die reducirten Längen der Seiten, durch reducirte Abscissen ausgedrückt, die folgenden werden:

$$(a) = [\beta\gamma], \quad (b) = [\gamma\alpha], \quad (c) = [\alpha\beta].$$

A. Die endlichen Grundformeln.

$$\frac{\partial^2(a)}{\partial a_\beta^2} + k_\beta(a) = 0$$

$$(a) \frac{\partial^2(a)}{\partial a_\beta \partial a_\gamma} - \frac{\partial(a)}{\partial a_\beta} \frac{\partial(a)}{\partial a_\gamma} = 1$$

$$\frac{\partial^2(a)}{\partial a_\gamma^2} + k_\gamma(a) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial b_\gamma} \left(\sin \beta \frac{\partial \log(a)}{\partial a_\beta} \right) + \frac{\partial}{\partial c_\beta} \left(\frac{\sin \gamma}{(a)} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial c_\beta} \left(\sin \gamma \frac{\partial \log(a)}{\partial a_\gamma} \right) - \frac{\partial}{\partial b_\gamma} \left(\frac{\sin \beta}{(a)} \right) = 0.$$

Die übrigen Formeln, welche hierhin gehören, ergeben sich durch cyklische Vertauschungen; die entwickelten Formeln werden wir nicht wiederholen.

B. Die Differentialformeln.

Dieselben lauten in unentwickelter Form:

$$\partial \mathfrak{A}_\beta = \left[\frac{g}{e^2} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \sin(\mathfrak{U} - \omega) - \frac{1}{e} \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\} \sin \mathfrak{U} - \sin \beta \frac{\partial \log(a)}{\partial a_\beta} \right]_\beta \partial c_\beta$$

$$+ \left[\frac{g}{e^2} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \sin(\mathfrak{A} - \omega) - \frac{1}{e} \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\} \sin \mathfrak{A} \right]_\beta \partial a_\beta + \frac{\sin \gamma}{(a)} \partial b_\gamma$$

$$\partial \mathfrak{A}_\gamma = \left[\frac{g}{e^2} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \sin(\mathfrak{B} - \omega) - \frac{1}{e} \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\} \sin \mathfrak{B} + \sin \gamma \frac{\partial \log(a)}{\partial a_\gamma} \right]_\gamma \partial b_\gamma$$

$$+ \left[\frac{g}{e^2} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \sin(\mathfrak{A} - \omega) - \frac{1}{e} \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\} \sin \mathfrak{A} \right]_\gamma \partial a_\gamma + \frac{\sin \beta}{(a)} \partial c_\beta$$

$$\partial a = \cos \beta \partial c_\beta - \partial a_\beta - \cos \gamma \partial b_\gamma + \partial a_\gamma$$

$$\partial a = \frac{\sin \gamma}{(b)} \partial a_\gamma - \frac{\sin \beta}{(c)} \partial a_\beta + \sin \alpha \left[\frac{\partial \log(c)}{\partial c_\alpha} \partial b_\alpha + \frac{\partial \log(b)}{\partial b_\alpha} \partial c_\alpha \right].$$

In entwickelter Form wird

$$\partial \mathfrak{A}_\beta = - \left[\frac{g \sin \omega}{e} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} + e \sin \mathfrak{A} \frac{\partial \log(a)}{\partial a_\beta} \right]_\beta \partial p_\beta - \left[\frac{g \sin \omega}{e} \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right.$$

$$\left. + g \sin(\mathfrak{A} - \omega) \frac{\partial \log(a)}{\partial a_\beta} \right]_\beta \partial q_\beta - e_\gamma \frac{\sin \mathfrak{A}_\gamma}{(a)} \partial p_\gamma - g_\gamma \frac{\sin(\mathfrak{A} - \omega)_\gamma}{(a)} \partial q_\gamma$$

$$\partial \mathfrak{A}_\gamma = - \left[\frac{g \sin \omega}{e} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} + e \sin \mathfrak{A} \frac{\partial \log(a)}{\partial a_\gamma} \right]_\gamma \partial p_\gamma - \left[\frac{g \sin \omega}{e} \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right.$$

$$\left. + g \sin(\mathfrak{A} - \omega) \frac{\partial \log(a)}{\partial a_\gamma} \right]_\gamma \partial q_\gamma + e_\beta \frac{\sin \mathfrak{A}_\beta}{(a)} \partial p_\beta + g_\beta \frac{\sin(\mathfrak{A} - \omega)_\beta}{(a)} \partial q_\beta$$

$$\partial a = e_\gamma \cos \mathfrak{A}_\gamma \partial p_\gamma + g_\gamma \cos(\mathfrak{A}_\gamma - \omega_\gamma) \partial q_\gamma$$

$$- e_\beta \cos \mathfrak{A}_\beta \partial p_\beta - g_\beta \cos(\mathfrak{A}_\beta - \omega_\beta) \partial q_\beta.$$

Wenn es sich nicht bloß um eine einzige geodätische Linie, sondern um ein geodätisches Dreieck handelt, so müssen auch hier noch die durch cyklische Vertauschung folgenden Formeln beigefügt werden.

24.

Die vorstehenden Resultate wenden wir auf die Untersuchung der Frage an, unter welchen Voraussetzungen über die Fläche S in ähnlicher Weise, wie es bei der Kugel der Fall ist, zwischen den Elementen, nämlich den Seiten und Winkeln eines geodätischen Dreiecks Gleichungen bestehen, welche von den Coordinaten p, q der drei Ecken unabhängig sind.

Wenn eine solche Gleichung stattfindet, so wird bei einer stetigen Ortsänderung des Dreiecks, bei welcher fünf Elemente ungeändert bleiben, auch das sechste sich nicht ändern. Ein ähnlicher Schluss gilt in den beiden andern noch möglichen Fällen, wo zwischen den sechs Elementen zwei oder drei voneinander unabhängige Gleichungen stattfinden.

Wenn umgekehrt eine stetige Ortsänderung des Dreiecks möglich ist, bei welcher seine sämtlichen Elemente ungeändert bleiben, so sind die Ausdrücke der sechs Elemente durch die Coordinaten der drei Ecken keine voneinander unabhängige Functionen der letztern, indem die Differentiale der Coordinaten durch die Differentiale der Elemente nicht völlig bestimmt sind, weil sonst jene mit diesen zugleich verschwinden müßten. Unterscheidet man nun diejenigen Coordinaten, deren Differentiale bei gegebenen Differentialen der Elemente willkürlich bleiben, von den übrigen, und eliminiert die letztern, so gehen die erstern nothwendig von selbst heraus, und man erhält demnach ebensoviel voneinander unabhängige Gleichungen zwischen den Elementen des Dreiecks allein, als Differentiale von Coordinaten seiner Ecken willkürlich bleiben.

Es ist demnach zu untersuchen, ob die sechs Gleichungen

$$(1) \quad \partial a = 0, \partial b = 0, \partial c = 0, \partial \alpha = 0, \partial \beta = 0, \partial \gamma = 0$$

bei von Null verschiedenen Werthen der Größen

$$(2) \quad \partial p_a, \partial q_a, \partial p_\beta, \partial q_\beta, \partial p_\gamma, \partial q_\gamma,$$

oder was auf dasselbe hinauskommt, der folgenden

$$(3) \quad \partial a_\beta, \partial b_\gamma, \partial c_a, \partial \alpha_\gamma, \partial b_a, \partial c_\beta$$

möglich sind oder nicht, und im ersten Falle, wieviel von den letztern dabei willkürlich bleiben.

Diese Untersuchung über die Fälle, wo die Auflösung der Gleichungen (1) keine bestimmte ist, hängt nur scheinbar vom Verschwinden

einer sechszelligen Determinante und ihrer Unterdeterminanten ab, indem die drei ersten von den Gleichungen (1) sich stets und ohne Unbestimmtheit nach drei Unbekannten, z. B. ∂a_β , ∂b_γ , ∂c_α auflösen lassen, durch deren Elimination man zu drei Gleichungen gelangt, deren Determinante zu untersuchen ist.

Auf einem solchen direkten Wege würde man indessen zu kaum übersehbaren Resultaten gelangen.

25.

Setzt man zu besserer Übersicht

$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} = A, \quad \frac{\cos \beta + \cos \gamma \cos \alpha}{\sin \gamma \sin \alpha} = B, \quad \frac{\cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} = \Gamma,$$

und die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -\cos \gamma & -\cos \beta \\ -\cos \gamma & 1 & -\cos \alpha \\ -\cos \beta & -\cos \alpha & 1 \end{vmatrix} = \delta,$$

so wird

$$1 - A^2 = \frac{\delta}{\sin \beta^2 \sin \gamma^2}, \quad A - B\Gamma = \frac{\delta \cos \alpha}{\sin \alpha^2 \sin \beta \sin \gamma}$$

u. s. w., und man erhält:

$$\begin{aligned} \partial a - \cos \gamma \partial b - \cos \beta \partial c &= \sin \gamma (\sin \gamma \partial a_\gamma + B \sin \alpha \partial c_\alpha) \\ &\quad - \sin \beta (\sin \beta \partial a_\beta + \Gamma \sin \alpha \partial b_\alpha), \end{aligned}$$

nebst zwei ähnlichen Gleichungen, welche aus dieser durch Vertauschungen folgen.

Um den drei ersten Gleichungen (1) zu genügen, nehmen wir

$$\sin \gamma \partial a_\gamma + B \sin \alpha \partial c_\alpha = x \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \quad \sin \beta \partial a_\beta + \Gamma \sin \alpha \partial b_\alpha = x \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha \partial b_\alpha + \Gamma \sin \beta \partial a_\beta = y \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}, \quad \sin \gamma \partial b_\gamma + A \sin \beta \partial c_\beta = y \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\sin \beta \partial c_\beta + A \sin \gamma \partial b_\gamma = z \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}, \quad \sin \alpha \partial c_\alpha + B \sin \gamma \partial a_\gamma = z \frac{\sin \beta}{\sin \gamma},$$

woraus

$$(1 - B^2) \sin \alpha \partial c_\alpha = z \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} - Bx \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$(1 - \Gamma^2) \sin \alpha \partial b_\alpha = y \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} - \Gamma x \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$$

u. s. w. folgt. Durch die Werthe von x , y , z sind also die Größen (3) völlig bestimmt, und die Anzahl der willkürlich bleibenden ist in beiden Systemen dieselbe.

Nun ist

$$\partial \alpha = \frac{1}{(b)} \left[\sin \gamma \partial a_\gamma + \frac{\partial(b)}{\partial b_\alpha} \sin \alpha \partial c_\alpha \right] - \frac{1}{(c)} \left[\sin \beta \partial a_\beta - \frac{\partial(c)}{\partial c_\alpha} \sin \alpha \partial b_\alpha \right] \\ - \frac{1}{(b)} \left[x \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + \left(\frac{\partial(b)}{\partial b_\alpha} - B \right) \sin \alpha \partial c_\alpha \right] - \frac{1}{(c)} \left[x \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} - \left(\frac{\partial(c)}{\partial c_\alpha} + \Gamma \right) \sin \alpha \partial b_\alpha \right],$$

also folgt

$$\partial \alpha = \frac{1}{(b)} \left[x \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} + \left(\frac{\partial(b)}{\partial b_\alpha} - B \right) \frac{\sin \beta}{1 - B^2} \left(\frac{x}{\sin \gamma} - B \frac{x}{\sin \alpha} \right) \right] \\ - \frac{1}{(c)} \left[x \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} - \left(\frac{\partial(c)}{\partial c_\alpha} + \Gamma \right) \frac{\sin \gamma}{1 - \Gamma^2} \left(\frac{y}{\sin \beta} - \Gamma \frac{x}{\sin \alpha} \right) \right].$$

Setzt man nun

$$\frac{\partial(a)}{\partial a_\beta} + A = (a)A_\beta \quad \frac{\partial(b)}{\partial b_\gamma} + B = (b)B_\gamma \quad \frac{\partial(c)}{\partial c_\alpha} + \Gamma = (c)\Gamma_\alpha \\ \frac{\partial(a)}{\partial a_\gamma} - A = (a)A_\gamma \quad \frac{\partial(b)}{\partial b_\alpha} - B = (b)B_\alpha \quad \frac{\partial(c)}{\partial c_\beta} - \Gamma = (c)\Gamma_\beta,$$

so wird der Factor von y gleich

$$\frac{\sin \alpha^3 \sin \beta \sin \gamma}{\delta} \cdot \Gamma_\alpha,$$

der Factor von x wird gleich

$$\frac{\sin \alpha^3 \sin \beta \sin \gamma}{\delta} \cdot B_\alpha$$

und der Factor von x wird:

$$\frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{\sin \beta}{(b)} - \frac{\sin \gamma}{(c)} \right) - B B_\alpha \frac{\sin \beta}{\sin \alpha (1 - B^2)} - \Gamma \Gamma_\alpha \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha (1 - \Gamma^2)} \\ = \frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{\sin \beta}{(b)} - \frac{\sin \gamma}{(c)} \right) - \frac{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\delta} \left(\frac{B B_\alpha}{\sin \beta} + \frac{\Gamma \Gamma_\alpha}{\sin \gamma} \right) = \frac{\sin \alpha^3 \sin \beta \sin \gamma}{\delta} A_\alpha,$$

wenn ferner

$$\frac{\delta}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} \left(\frac{\sin \beta}{(b)} - \frac{\sin \gamma}{(c)} \right) - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \left(\frac{B B_\alpha}{\sin \beta} + \frac{\Gamma \Gamma_\alpha}{\sin \gamma} \right) = \sin \alpha^3 \cdot A_\alpha \\ \frac{\delta}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} \left(\frac{\sin \gamma}{(c)} - \frac{\sin \alpha}{(a)} \right) - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \left(\frac{\Gamma \Gamma_\beta}{\sin \gamma} + \frac{A A_\beta}{\sin \alpha} \right) = \sin \beta^3 \cdot B_\beta \\ \frac{\delta}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma} \left(\frac{\sin \alpha}{(a)} - \frac{\sin \beta}{(b)} \right) - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \left(\frac{A A_\gamma}{\sin \alpha} + \frac{B B_\gamma}{\sin \beta} \right) = \sin \gamma^3 \cdot \Gamma_\gamma$$

gesetzt wird.

Bei diesen Bezeichnungen wird also, wenn $\partial a = 0$, $\partial b = 0$, $\partial c = 0$ ist,

$$\partial \alpha = \frac{\sin \alpha^3 \sin \beta \sin \gamma}{\delta} [A_\alpha x + \Gamma_\alpha y + B_\alpha s].$$

Diese Umformungen setzen jedoch voraus, daß

$$\delta = -4 \cos \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} \cos \frac{\gamma + \alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2}$$

von Null verschieden sei. Von den vier Factoren dieses Productes verschwindet aber der erste für jedes beliebige geodätische Dreieck nur dann, wenn das Krümmungsmafs $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ jedes Dreiecks $= 0$ (Disqu. g. c. s. XX), also auch das Krümmungsmafs der Fläche S allenthalben $= 0$, und diese Fläche auf einer Ebene abwickelbar ist. Diese Flächen sind also von der folgenden Untersuchung ausgeschlossen, was jedoch keine Beschränkung ist, da die Trigonometrie derselben bei unsern Untersuchungen vorausgesetzt wurde.

Wäre der zweite Factor für jedes geodätische Dreieck der Fläche S gleich Null, so wäre das Krümmungsmafs jedes Dreiecks nur vom Winkel α abhängig, und sein Differential $= 2\epsilon\alpha$, was ein Widerspruch ist. Wir erhalten demnach das folgende Resultat.

Für jede Fläche S , die nicht auf einer Ebene abgewickelt werden kann, besteht die Bedingung dafür, dafs auf ihr ein geodätisches Dreieck ohne Änderung seiner Elemente stetig verschoben werden könne, darin, dafs den drei Gleichungen

$$A_\alpha x + \Gamma_\alpha y + B_\alpha z = 0$$

$$B_\beta y + A_\beta z + \Gamma_\beta x = 0$$

$$\Gamma_\gamma z + B_\gamma x + A_\gamma y = 0$$

genügt werden könne, ohne dafs die Unbekannten x, y, z sämtlich verschwinden.

Bleiben n von diesen Unbekannten willkürlich, so bestehen zwischen den Elementen des geodätischen Dreiecks gerade n voneinander unabhängige Gleichungen, welche keine andern veränderlichen Gröfsen enthalten.

26. Die erste Flächengattung, $n = 0$.

Ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_\alpha & \Gamma_\alpha & B_\alpha \\ \Gamma_\beta & B_\beta & A_\beta \\ B_\gamma & A_\gamma & \Gamma_\gamma \end{vmatrix} = \Delta$$

nicht identisch $= 0$, so werden x, y und $z = 0$, und es ist dann die stetige Ortsänderung eines geodätischen Dreiecks ohne Änderung seiner Elemente im Allgemeinen unmöglich.

Im vorliegenden Falle sind die Differentiale von $p_\alpha, q_\alpha, \dots q_\gamma$ durch die Differentiale der Elemente völlig bestimmt, solange nicht $\Delta = 0$ wird, was nur für spezielle Dreiecke möglich ist. Folglich sind nicht blofs die Elemente des Dreiecks durch die Coordinaten der Ecken, sondern auch umgekehrt diese durch jene bestimmt. Ist diese Be-

stimmung eine mehrdeutige, so findet dasselbe Elementensystem bei mehreren geodätischen Dreiecken statt; aber es ist nicht möglich, diese durch stetige Ortsänderung ineinander überzuführen, ohne daß während dieses Überganges Änderungen in den Elementen stattfinden.

27. Die zweite Flächengattung, $n = 1$.

Die zweite Flächengattung findet statt, wenn Δ , aber nicht jede Unterdeterminante von Δ identisch verschwindet.

Alsdann ist von den Größen x, y, s eine willkürlich, und durch diese sind die beiden andern bestimmt. Auf einer solchen Fläche findet also für jedes geodätische Dreieck eine Gleichung zwischen seinen Elementen allein statt, aber auch nur eine einzige. Es können daher fünf Elemente des Dreiecks und ihre stetigen Änderungen beliebig angenommen werden, und durch diese ist das sechste Element nebst seinen stetigen Änderungen bestimmt.

Von den sechs Größen $\partial p_a, \partial q_a, \dots \partial q_r$ ist nur eine einzige willkürlich. Ein auf der Oberfläche gegebenes geodätisches Dreieck kann also im gegenwärtigen Falle ohne Änderung seiner Elemente stetig verschoben werden, jedoch nur in der Weise, daß jede Ecke eine völlig bestimmte Kurve durchläuft.

Werden daher auf einer Fläche der zweiten Gattung fünf Elemente eines geodätischen Dreiecks gegeben, so ist hierdurch das sechste, und für jede Ecke eine Ortskurve völlig bestimmt, und zwar ist die Lage sämtlicher Ecken gegeben, sobald irgend einer von ihnen eine bestimmte Lage auf ihrer Ortskurve angewiesen wird. Gleichzeitig sind dann auch die Azimuthe an den Ecken bestimmt.

28. Die dritte Flächengattung, $n = 2$.

Die dritte Flächengattung findet statt, wenn alle Unterdeterminanten, aber nicht alle Elemente von Δ identisch gleich Null sind.

In diesem Falle ist auch $\Delta = 0$, und es bleiben von den Größen x, y, s zwei willkürlich, und durch diese ist die dritte bestimmt. Auf einer Fläche dieser Gattung finden also für jedes geodätische Dreieck zwei Gleichungen zwischen seinen Elementen statt, welche die Coordinaten der Ecken nicht enthalten.

Von den sechs Größen $\partial p_a, \partial q_a, \dots \partial q_r$ bleiben ferner zwei willkürlich, und durch diese sind die übrigen bestimmt. Die stetige Ortsänderung eines geodätischen Dreiecks von unveränderlichen Elementen ist also in der Weise möglich, daß eine Ecke an einer beliebigen Kurve entlang verschoben werden kann, während hierdurch die gleichzeitige Bewegung der beiden andern Ecken völlig bestimmt ist.

Eine Fläche der vorliegenden Gattung enthält also jedes auf ihr überhaupt mögliche geodätische Dreieck unendlich oft, und zwar auf drei Arten, indem jeder Punkt der Fläche für eine beliebige der drei Ecken genommen werden kann, wodurch dann die beiden andern Ecken, also die Richtungen der von der ersten Ecke ausgehenden Seiten, völlig bestimmt sind.

Auf einer Fläche der dritten Gattung kann man demnach über vier Elemente eines geodätischen Dreiecks und die Coordinaten einer Ecke nach Belieben verfügen. Dadurch sind die beiden andern Elemente und die Coordinaten der beiden andern Ecken bestimmt. Ist diese letztere Bestimmung eine mehrdeutige, so ergeben sich für jeden Punkt der Fläche mehrere, in den Elementen congruente Dreiecke, welche dort die nämliche Ecke, z. B. α haben. Aber diese congruenten Dreiecke können durch stetige Drehung um die gemeinsame Ecke α nicht zur Deckung gebracht werden, ohne daß während des stetigen Überganges Änderungen in den Elementen stattfinden. In der That ergibt sich aus dem Obigen auch der Satz:

Wenn man auf einer Fläche der dritten Gattung ein geodätisches Dreieck um eine seiner Ecken, z. B. α dreht, ohne die dort anstossenden Elemente b, α, c zu ändern, so erhält man nach und nach alle geodätischen Dreiecke, welche mit diesen drei Elementen auf der Fläche überhaupt construirt werden können, und zwar gilt dies, wo auch der Punkt α auf der Fläche angenommen werden mag.

29. Die vierte Flächengattung, $n = 3$.

Die vierte Flächengattung findet statt, wenn sämtliche Elemente von Δ identisch gleich Null sind.

In diesem Falle bleiben x, y und z willkürlich, und es finden daher auf jeder Fläche dieser Art drei von den Coordinaten der Ecken unabhängige Gleichungen zwischen den sechs Elementen jedes geodätischen Dreiecks statt.

Es bleiben ferner drei von den Größen $\partial p_\alpha, \partial q_\alpha, \dots \partial q_\gamma$ willkürlich, und durch diese sind die drei übrigen bestimmt. Auf den Flächen der vorliegenden Art ist also die stetige Ortsänderung eines geodätischen Dreiecks von unveränderlichen Elementen in der Weise möglich, daß eine Ecke, z. B. α auf einer beliebigen Kurve verschoben, und gleichzeitig einer der beiden andern Ecken noch eine ununterbrochene Bewegung ertheilt wird, die bis auf die Bedingung unveränderlicher Elemente willkürlich ist, also neben einer translatorischen Bewegung mit der Ecke α in einer Drehung des Dreiecks um dieselbe besteht.

Der vorliegende Fall ist bis jetzt der einzige, wo die weitem Untersuchungen sich vollständig haben durchführen lassen. Aus den Gleichungen $A_\gamma = 0$, $A_\beta = 0$ folgt

$$\frac{\partial(a)}{\partial a_\gamma} = -\frac{\partial(a)}{\partial a_\beta} = A,$$

und aus $A_\alpha = 0$, weil auch $B_\alpha = 0$, $\Gamma_\alpha = 0$ ist:

$$\frac{\sin(\beta)}{(b)} = \frac{\sin \gamma}{(c)}.$$

Vermöge der ersten Gleichung geht die Formel

$$(a) \frac{\partial^2(a)}{\partial a_\gamma \partial a_\beta} - \frac{\partial(a)}{\partial a_\gamma} \frac{\partial(a)}{\partial a_\beta} = 1$$

über in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(a) \frac{\partial^2(a)}{\partial a_\gamma^2} - \left(\frac{\partial(a)}{\partial a_\gamma}\right)^2 + 1 = 0.$$

Dieselbe wird durch Multiplication mit $\frac{2}{(a)^3} \frac{\partial(a)}{\partial a_\gamma}$ integrabel, und liefert

$$\left(\frac{\partial(a)}{\partial a_\gamma}\right)^2 - 1 = -c(a)^2,$$

wo c die Integrationsconstante ist. Dies in die vorige Differentialgleichung eingesetzt giebt

$$\frac{\partial^2(a)}{\partial a_\gamma^2} + c(a) = 0,$$

folglich ist das Krümmungsmafs der Fläche an jeder geodätischen Linie entlang constant, und wir erhalten den Satz:

Die vierte Flächengattung wird gebildet durch das System aller derjenigen Flächen, deren Krümmungsmafs constant ist.

Wird dasselbe wieder durch k bezeichnet, so folgt mit Rücksicht auf die für $a_\gamma = a_\beta$ stattfindenden Grenzbedingungen

$$(a) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}(a_\gamma - a_\beta)) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(a\sqrt{k}).$$

Durch cyklische Vertauschungen ergeben sich demnach die für alle Flächen von constantem Krümmungsmafe k gültigen Formeln:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(a\sqrt{k})}{\sin \alpha} &= \frac{\sin(b\sqrt{k})}{\sin \beta} = \frac{\sin(c\sqrt{k})}{\sin \gamma}, \\ \cos(a\sqrt{k}) &= \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} \\ \cos(b\sqrt{k}) &= \frac{\cos \beta + \cos \gamma \cos \alpha}{\sin \gamma \sin \alpha} \\ \cos(c\sqrt{k}) &= \frac{\cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}. \end{aligned}$$

Der merkwürdige Satz, daß die in der vorstehenden Weise geschriebenen Formeln der sphärischen Trigonometrie nicht bloß für die auf der Kugel abwickelbaren Flächen, sondern auch noch für diejenigen Flächen gültig sind, deren Krümmungsmaß einen negativen constanten Werth hat, ist zuerst von Herrn Minding (Crelle's Journal XIX) gefunden worden.

Hiermit ist der Ausnahmefall erledigt, welcher sich am Schlusse des vorigen Abschnitts dargeboten hat, und es treten nun für alle übrigen Flächengattungen die dort gefundenen Resultate in Kraft, denen zufolge die zur Auflösung eines geodätischen Dreiecks erforderlichen Formeln sich aus art. 23 unmittelbar ergeben, sobald die reducirte Länge eines geodätischen Bogens als Function der Coordinaten seiner Endpunkte dargestellt ist, wozu jene Formeln nicht erforderlich sind.

Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 17. Dezember 1868.

XVII.

Über die Transformation ganzer homogener Differential- ausdrücke.

(Monatsberichte der Kgl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1869,
S. 1—6.)

Wenn man in einem homogenen Differentialausdruck p ter Ordnung

$$F = \Sigma F_{a_1 a_2 \dots a_p} \partial x_{a_1} \partial x_{a_2} \dots \partial x_{a_p},$$

in welchem die Coefficienten beliebige Functionen der n Variabeln $x_1, x_2, \dots, x_n$ sind, statt dieser Variabeln ein System von einander unabhängiger Functionen der neuen Variabeln $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ einführt, so erhält man einen neuen Differentialausdruck F' von gleicher Ordnung und Dimension, welcher aus dem ursprünglichen auch durch zwei successive Substitutionen erhalten werden kann, nämlich dadurch, daß man 1) die Differentiale ∂x durch eine in den $\partial x'$ lineare Substitution transformirt, und alsdann 2) in den Coefficienten $F_{a_1 a_2 \dots}$ selbst ebenfalls von den ursprünglichen zu den neuen Variabeln übergeht. Jene lineare Substitution nenne ich im Folgenden die Hauptsubstitution.

Sind nun umgekehrt zwei Differentialausdrücke F und F' von gleicher Ordnung und Dimension gegeben, so kann man sich ebenso wie in der Invariantentheorie die Frage vorlegen, unter welchen Bedingungen F in F' transformirt werden kann und falls dies möglich ist, welche Substitution die verlangte Transformation leistet.

Unter den verschiedenen Fällen, welche sich hier darbieten, verdienen die Differentialausdrücke zweiter Ordnung besondere Aufmerksamkeit, sowohl wegen der wichtigen Probleme, in denen sie vorkommen, als auch weil sie den Differentialausdrücken höherer Ordnungen gegenüber einen Ausnahmefall bilden.

Wenn nämlich $p > 2$ ist, so liefert die Invariantentheorie unter der Voraussetzung, daß bloß die Hauptsubstitution ausgeführt wird,

einerseits eine Anzahl von Bedingungsgleichungen für die Möglichkeit der Transformation, und andererseits mittelst der, bis auf besondere Fälle stets in der normalmäßigen Anzahl vorhandenen zugehörigen Formen völlig bestimmte Werthe für die Coefficienten in der Hauptsubstitution. Damit sind aber nicht alle Bedingungen für die Möglichkeit der Transformation von F in F' gewonnen, sondern es wird nun eine zweite Untersuchung nöthig, die Bedingungen betreffend, damit die aus den zugehörigen Formen hervorgehenden Ausdrücke für $\partial x_1, \partial x_2, \dots \partial x_n$ auch, wie erforderlich, die vollständigen Differentiale der ursprünglichen Variablen werden. Für diese Untersuchung bilden die zugehörigen Formen selbst die Grundlage, und zwar genau wegen der bekannten Eigenschaft derselben, unmittelbar nicht die direkte, sondern die transponirte Substitution zu liefern.

Ohne diese Betrachtungen weiter zu verfolgen, sieht man nun ohne Weiteres ein, weshalb die quadratischen Differentialformen sich der allgemeinen Behandlung entziehen; der Grund hiervon liegt darin, daß die algebraische Invariantentheorie für dieselben nur eine zugehörige Form liefert, also ohne Hinzuziehung der Integrabilitätsbedingungen nicht die Mittel gewährt, um die Hauptsubstitution durch das Resultat derselben zu bestimmen.

Ich habe daher den Fall $p = 2$ für beliebige Werthe von n behandelt, mich dabei jedoch auf die Voraussetzung beschränkt, daß die Determinante von F nicht identisch $= 0$ ist. Im Verlaufe dieser Untersuchung, welche im Journal des Herrn Borchardt erscheinen wird, trennen sich zwei verschiedene Fälle von einander, indem sich als Hauptfall derjenige herausstellt, in welchem das Resultat der Transformation die anzuwendende Substitution völlig bestimmt, während demselben Ausnahmefälle zur Seite stehen, in denen es stetige Variationen der Substitution gibt, welche F' ungeändert lassen. Zu diesen gehört z. B. der Fall, wo $\sqrt{F}$ das Linienelement einer in sich selbst ohne Dehnung verschiebbaren Oberfläche ist, und es ist außerdem zu bemerken, daß diese Ausnahmefälle nicht bloß für $p = 2$, sondern auch für alle übrigen Ordnungen zu berücksichtigen sind.

Für die dem Hauptfalle entsprechenden quadratischen Differentialformen finde ich nun das merkwürdige, und aus der Natur der Sache keineswegs im Voraus zu erwartende Resultat, daß alle Bedingungen für die Möglichkeit der Transformation von F in F' , sowohl was die Hauptsubstitution, als was die zu ihr gehörigen Integrabilitätsbedingungen betrifft, sich ohne Ausnahme als Gleichungen zwischen Invarianten der Formen F und F' darstellen lassen, wenn dieser

Ausdruck zur Bezeichnung der gleichen Formverhältnisse wie in der Algebra angewandt wird, und daß auch hier zugehörige Formen und Covarianten in derselben Bedeutung, wenn auch aus ganz anderer Quelle auftreten, wie bei den analogen algebraischen Transformationsproblemen.

Die erwähnten Invariantengleichungen werden durch die allgemeine Theorie in zwei völlig bestimmte Gruppen zerlegt. Unter den Gleichungen der ersten Gruppe finden sich deren n , durch welche die ursprünglichen Variabeln als Functionen der neu einzuführenden völlig bestimmt sind, und diese Werthe müssen die übrigen Gleichungen der ersten Gruppe, soweit solche vorhanden sind, und alle in der zweiten enthaltenen zu identischen machen. Unter Voraussetzung dieser Werthe der ursprünglichen Variabeln liefern alsdann die Gleichungen zwischen den zugehörigen Formen völlig bestimmte Werthe für die Coefficienten der Hauptsubstitution und diese sind, ohne daß neue Bedingungen erforderlich werden, in verlangter Weise die Derivirten der ursprünglichen nach den neuen Variabeln.

Wenn dagegen die Anzahl der von einander unabhängigen Invarianten und zugehörigen Formen von F zur völligen Bestimmung der ursprünglichen Variabeln und der Coefficienten in der Hauptsubstitution nicht hinreicht, so bietet F einen der oben erwähnten Ausnahmefälle dar, und es ist hiernach klar, daß die sämtlichen Bedingungen für diese Fälle in identischen Gleichungen zwischen solchen Invarianten und zugehörigen Formen von F bestehen, welche im Hauptfalle voneinander unabhängige Functionen sämtlicher Variabeln sind.

Unter den besondern Fällen, welche ich behandelt habe, zeichnen sich die ternären Formen durch eine bemerkenswerthe Vereinfachung der Resultate aus. Ich erlaube mir daher dieselben für diesen Fall vollständig mitzutheilen.

Man bezeichne durch E die Determinante der ternären Form

$$F = \sum \omega_{ik} \partial x_i \partial x_k,$$

und durch E_{ik} in bekannter Weise ihre Unterdeterminanten. Ferner bilde man folgende 18 Ausdrücke

$$\left| \begin{matrix} gh \\ i \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_g} + \frac{\partial \omega_{gi}}{\partial x_k} - \frac{\partial \omega_{gh}}{\partial x_i} \right),$$

und mittelst dieser

$$A_{11} = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial^2 \omega_{11}}{\partial x_1 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \omega_{12}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \omega_{12}}{\partial x_1^2} \right) + \sum_{\alpha \beta} \frac{E_{\alpha \beta}}{E} \left(\left| \begin{smallmatrix} 23 \\ \alpha \end{smallmatrix} \right| \left| \begin{smallmatrix} 23 \\ \beta \end{smallmatrix} \right| - \left| \begin{smallmatrix} 22 \\ \alpha \end{smallmatrix} \right| \left| \begin{smallmatrix} 33 \\ \beta \end{smallmatrix} \right| \right)$$

$$A_{22} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega_{11}}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 \omega_{12}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \omega_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \omega_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \right)$$

$$+ \sum_{\alpha \beta} \frac{E_{\alpha \beta}}{E} \left(\left| \begin{smallmatrix} 11 \\ \alpha \end{smallmatrix} \right| \left| \begin{smallmatrix} 23 \\ \beta \end{smallmatrix} \right| - \left| \begin{smallmatrix} 12 \\ \alpha \end{smallmatrix} \right| \left| \begin{smallmatrix} 13 \\ \beta \end{smallmatrix} \right| \right),$$

nebst den durch cyklische Vertauschungen von 1, 2, 3 aus ihnen folgenden; endlich die 18 Ausdrücke

$$A_{gik} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_g} - \frac{A_{ik}}{E} \frac{\partial E}{\partial x_g} + \sum_{\lambda \mu} \left| \begin{smallmatrix} gk \\ \mu \end{smallmatrix} \right| \cdot \frac{E_{\lambda \mu} A_{\lambda k} + E_{\mu k} A_{\lambda \lambda}}{E},$$

so wie alle ihnen entsprechenden für die neue Form

$$F' = \sum \omega'_{ik} x'_i \partial x'_k.$$

Mittelst dieser Ausdrücke als Coefficienten werden die drei algebraischen Formen

$$\Gamma = \sum A_{ik} X_i X_k,$$

$$\Phi = \sum E_{ik} X_i X_k,$$

$$\Theta = \sum A_{gik} U_g X_i X_k,$$

und für F' die entsprechenden Γ' , Φ' , Θ' mit den Variablen $\mathfrak{X}$ und V an Stelle von X und U gebildet.

Dann sind die für die Möglichkeit der Transformation von F in F' erforderlichen und ausreichenden Bedingungen genau die nämlichen, wie diejenigen, welche stattfinden müssen, damit durch eine lineare Substitution

$$X_i = \sum_{\alpha} r'_{\alpha} \mathfrak{X}_{\alpha}$$

Γ in Γ' , Φ in Φ' transformirt werde und gleichzeitig unter Voraussetzung der transponirten Substitution

$$V_{\alpha} = \sum_i r'_{\alpha} U_i$$

Θ und Θ' entsprechende Zwischenformen werden, welche der Gleichung

$$\Theta' = R^{\frac{1}{2}} \Theta$$

genügen, unter R die Substitutionsdeterminante verstanden.

Dieser Satz findet jedoch nur unter der Voraussetzung statt, daß die sechs absoluten zugehörigen Formen und Invarianten von Γ , Φ voneinander unabhängige Functionen der Variablen $x_1, x_2, x_3, U_1, U_2, U_3$ sind.

Ist diese Bedingung erfüllt, so erhält man aus den Covariantengleichungen die Coefficienten der inversen Substitution

$$\Xi_{\alpha} = \sum_i \varrho'_{\alpha} X_i,$$

und zwar so, daß allgemein

$$R^{\frac{1}{2}} \varrho'_{\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_{\alpha}}$$

wird.

Dazu bemerke ich noch, daß die vier simultanen Invarianten der Functionen Γ, Φ diejenigen sind, welche ich als ein vollständiges System von Invarianten des Differentialausdruckes F bezeichne.

Anmerkung.

Dieser Auszug der später im 70. Bande des Journals für reine und angewandte Mathematik erschienenen und auf den folgenden Seiten dieses Bandes abgedruckten Abhandlung Christoffels wurde der Akademie von Borchardt in der Gesamtsitzung am 7. Januar 1869 übergeben.

XVIII.

Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 70, 1869, S. 46—70.)

1.

Führt man in den Differentialausdruck

$$F = \sum \omega_{ik} \partial x_i \partial x_k; \quad i, k = 1, 2, \dots, n,$$

in welchem die Coefficienten ω beliebige Functionen der von einander unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ sind, statt der letztern ein System von einander unabhängiger Functionen der neuen Variablen $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ ein, so geht F in einen neuen Differentialausdruck

$$F' = \sum \omega'_{ik} \partial x'_i \partial x'_k$$

über, welcher dem ursprünglichen vermöge der ausgeführten Substitution gleich ist.

Sind umgekehrt die beiden Differentialausdrücke F und F' gegeben, so kann man sich die Frage vorlegen, welche Bedingungen erforderlich sind, damit der eine in den andern transformirt werden könne, und falls dies möglich ist, welche Substitutionen die verlangte Transformation leisten.

Wir bezeichnen für diese Untersuchung die Substitutionsdeterminante und die Determinanten von F und F' wie folgt:

$$\sum \pm \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} \dots \frac{\partial x_n}{\partial x'_n} = r,$$

$$\sum \pm \omega_{11} \omega_{22} \dots \omega_{nn} = E,$$

$$\sum \pm \omega'_{11} \omega'_{22} \dots \omega'_{nn} = E'.$$

Dann findet, wie aus der algebraischen Invariantentheorie bekannt ist, eine und auch nur eine Transformationsbedingung

$$E' = r^2 E$$

statt, und diese würde auch für den vorliegenden Fall ausreichen, wenn die Coefficienten ω von F und die Elemente von r constant wären. Im gegenwärtigen Falle müssen jedoch noch andere Bedingungen erfüllt sein, da nicht jedes System linearer und homogener Functionen von $\partial x'_1, \partial x'_2, \dots \partial x'_n$, welches an Stelle von $\partial x_1, \partial x_2, \dots \partial x_n$ gesetzt F in F' überführt, die gestellte Aufgabe löst, sondern nur ein solches, welches den Integrabilitätsbedingungen genügt, damit die Ausdrücke für $\partial x_1, \partial x_2, \dots \partial x_n$ vollständige Differentiale werden.

Wenn allgemein F ein homogener Differentialausdruck von beliebiger, und F' von derselben Ordnung ist, so finden ebenso für die Transformation von F in F' , weil für die Differentiale lineare Substitutionen gelten, zunächst die aus der algebraischen Invariantentheorie entspringenden Bedingungsgleichungen statt, und die zugehörigen Formen liefern, wenn die Ordnung von F grösser als 2 ist, im Allgemeinen völlig bestimmte Werthe für die Coefficienten in den Ausdrücken der ursprünglichen Differentiale durch die neu einzuführenden. Aber diese Coefficienten müssen noch den hinzugehörigen Integrabilitätsbedingungen unterworfen werden, wobei die Eigenschaft der zugehörigen Formen, unmittelbar nicht die directe, sondern die transponirte Substitution zu liefern, wesentlich in Betracht kommt (vergl. art. 10).

Vereinfachungen dieser Art finden für die homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades nicht statt, da sich für dieselben aus den algebraischen Bedingungen nur eine Invariante und eine zugehörige Form ergibt. Ich werde daher im Folgenden die Hilfsmittel auseinanderzusetzen, mittelst deren dieser auf den verschiedensten Gebieten so wichtige Ausnahmefall sich erledigen lässt, und bemerke nur noch, dass über den Fall, wo $F = \partial x_1^2 + \partial x_2^2 + \partial x_3^2$ ist, ein ausführliches Werk von Herrn Lamé existirt (*Théorie des coordonnées curvilignes*), während die gegenwärtigen Untersuchungen ursprünglich durch die Ausdehnung des Problems der aufeinander abwickelbaren Flächen auf Gebiete von n Dimensionen veranlasst worden sind.

2.

Bei der Untersuchung der Bedingungen, welche für die Möglichkeit der Gleichung

$$(1.) \quad \sum \omega_{ik} \partial x_i \partial x_k = \sum \omega'_{ik} \partial x'_i \partial x'_k$$

erforderlich sind und hinreichen, werde ich mich auf den Fall beschränken, wo die Determinanten E und E' dieser Differentialausdrücke nicht identisch gleich 0 sind. Die neuen Variablen x' werden als die unabhängigen betrachtet und ihre Differentiale constant angenommen.

Ersetzt man nun jedes $\partial x'_i$ durch $\partial x'_i + \delta x'_i$ und bezeichnet die den Differentialen $\delta x'$ entsprechenden Zunahmen der ursprünglichen Variablen x ebenfalls durch δx , so muss in (1.) allgemein ∂x durch $\partial x + \delta x$ ersetzt werden. Führt man alsdann beiderseits die Quadrate und Producte aus, so ergibt sich nach Beseitigung übereinstimmender Theile

$$(2.) \quad \sum \omega_{ik} \partial x_i \delta x_k = \sum \omega'_{ik} \partial x'_i \delta x'_k.$$

Vergleicht man hier die Coefficienten von $\partial x'_g$, so folgt

$$\sum_{ik} \omega_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial x'_g} \delta x_k = \sum_k \omega'_{gk} \delta x'_k,$$

und hieraus

$$(3.) \quad \delta x'_h = \sum_{gik} \omega_{ik} \frac{E'_{gh}}{E'} \frac{\partial x_i}{\partial x'_g} \delta x_k,$$

wo E'_{gh} in bekannter Weise die aus einer Aenderung von ω'_{gh} (nicht von ω'_{hk}) entspringende Unterdeterminante von E' bedeutet.

In der Gleichung (2.) lasse man nun jedes x' um sein Differential $\partial x'$, in (1.) dagegen um $\delta x'$ wachsen, wodurch die Differentiale zur Rechten nicht geändert werden; dann folgt:

$$\begin{aligned} \sum \omega_{ik} \partial^2 x_i \delta x_k + \sum \partial \omega_{ik} \partial x_i \delta x_k + \sum \omega_{ik} \partial x_i \partial \delta x_k &= \sum \partial \omega'_{ik} \partial x'_i \delta x'_k, \\ \sum \delta \omega_{ik} \partial x_i \partial x_k + 2 \sum \omega_{ik} \partial x_i \partial \delta x_k &= \sum \delta \omega'_{ik} \partial x'_i \partial x'_k. \end{aligned}$$

Dividirt man die zweite Gleichung durch 2 und subtrahirt sie von der vorangehenden, so folgt

$$\begin{aligned} \sum \omega_{ik} \partial^2 x_i \delta x_k + \sum \partial \omega_{ik} \partial x_i \delta x_k - \frac{1}{2} \sum \delta \omega_{ik} \partial x_i \partial x_k \\ = \sum \partial \omega'_{ik} \partial x'_i \delta x'_k - \frac{1}{2} \sum \delta \omega'_{ik} \partial x'_i \partial x'_k. \end{aligned}$$

Wird nun zur besseren Uebersicht

$$(4.) \quad \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \omega_{gk}}{\partial x_h} + \frac{\partial \omega_{hk}}{\partial x_g} - \frac{\partial \omega_{gh}}{\partial x_k} \right] = \left[\frac{gh}{k} \right]$$

gesetzt, woraus

$$(5.) \quad \left[\frac{hg}{k} \right] = \left[\frac{gh}{k} \right] \quad \text{und} \quad \frac{\partial \omega_{hk}}{\partial x_g} = \left[\frac{gh}{k} \right] + \left[\frac{gk}{h} \right]$$

folgt, und dieselbe Bezeichnung bei der transformirten Form benutzt, so ergibt sich

$$(6.) \quad \sum_{ik} \omega_{ik} \partial^2 x_i \delta x_k + \sum_{ikl} \left[\frac{il}{k} \right] \partial x_i \partial x_l \delta x_k = \sum_{\alpha\beta h} \left[\frac{\alpha\beta}{h} \right]' \partial x'_\alpha \partial x'_\beta \delta x'_h.$$

Hier ersetze man $\delta x'_h$ durch seinen Werth aus (3.), wodurch die rechte Seite in

$$\sum_{\alpha\beta h} [\alpha\beta]'_h \partial x'_\alpha \partial x'_\beta \sum_{gik} \omega_{ik} \frac{E'_{gh}}{E} \frac{\partial x_i}{\partial x'_g} \delta x_k$$

übergeht. Durch Vergleichung der Coefficienten von δx_k folgt also

$$\sum_i \omega_{ik} \partial^2 x_i + \sum_{il} [il]'_k \partial x_i \partial x_l = \sum_{g\alpha\beta} \omega_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial x'_g} \partial x'_\alpha \partial x'_\beta \sum_h [\alpha\beta]'_h \frac{E'_{gh}}{E}.$$

Diese Gleichung multiplicire ich mit $\frac{E_{rk}}{E}$ und summire über die Werthe von k . Wird alsdann

$$(7.) \quad \sum_k [il]'_k \frac{E_{rk}}{E} = \{il\}_r$$

gesetzt, woraus

$$(8.) \quad \{il\}_r = \{il\}_r$$

folgt, und die gleiche Bezeichnung bei der transformirten Form angewandt, so ergibt sich

$$\partial^2 x_r + \sum_{il} \{il\}_r \partial x_i \partial x_l = \sum_{\alpha\beta g} \{\alpha\beta\}'_g \frac{\partial x_r}{\partial x'_g} \partial x'_\alpha \partial x'_\beta,$$

woraus offenbar auch rückwärts die Gleichung (6.) folgt, und es wird hiernach für alle Werthe von α , β und r :

$$(9.) \quad \frac{\partial^2 x_r}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta} + \sum_{ik} \{ik\}_r \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial x'_\beta} = \sum_l \{\alpha\beta\}'_l \frac{\partial x_r}{\partial x'_l}.$$

Diese Gleichung liefert $\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen für jedes r , also im Ganzen ein System von $n \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ simultanen partiellen Differentialgleichungen zur Bestimmung der gesuchten Substitution. Sind dieselben befriedigt, so sind selbstverständlich die Integrabilitätsbedingungen für die linearen Ausdrücke der ursprünglichen durch die neuen Differentiale erfüllt.

Diese Gleichungen vereinfachen sich sehr beträchtlich, wenn alle Coefficienten ω der ursprünglichen Form constant sind, indem in diesem Falle, aber wegen (7.) und (5.) auch nur unter dieser Voraussetzung, alle Ausdrücke $\{ik\}_r$ verschwinden. Man erhält alsdann für jede ursprüngliche Variable ein System von linearen partiellen Differentialgleichungen, und für alle Variablen das nämliche System. Das gleiche Resultat hat Herr Lamé für den von ihm behandelten oben erwähnten Fall gefunden.

3.

Wenn es nicht möglich ist, die ursprünglichen Variabeln x als Functionen der neuen x' so zu bestimmen, dass die Gleichungen (9.) befriedigt werden, so ist die Transformation von F in F'' unmöglich, da diese Gleichungen sich mit Nothwendigkeit ergeben, wenn die Möglichkeit dieser Transformation vorausgesetzt wird.

Sind dagegen die Gleichungen (9.) auf irgend eine Weise erfüllt, so wirft sich die Frage auf, in wie weit sie zum Rückschlusse auf die Gleichung (1.), d. h. auf die Formel $F = F'$ berechtigen. Um dies zu untersuchen, führe man die vorausgesetzte Lösung der Gleichungen (9.) in F ein, woraus

$$F = \sum \omega''_{ik} \partial x'_i \partial x'_k = F''$$

folgen möge. Dann handelt es sich darum, welche Beziehungen zwischen den entsprechenden Coefficienten von F'' und F' stattfinden.

Nun sind die Gleichungen (9.) nichts anderes als eine identische Umformung der Gleichung (6.), aus welcher sie selbst folgen, und welche sie auch rückwärts nach sich ziehen. Geht man aber, statt von $F = F'$, jetzt von $F = F''$ aus, so liefert die Rechnung des art. 2 statt des Ausdrucks, welcher dort auf der rechten Seite von (6.) steht, den neuen Ausdruck

$$\sum_{\alpha, \beta, h} [\alpha \beta]''_h \partial x'_\alpha \partial x'_\beta \delta x'_h,$$

und dieser muss dem ursprünglichen gleich sein. Also ergibt sich allgemein

$$[\alpha \beta]''_h = [\alpha \beta]'_h,$$

woraus wegen (5.)

$$\frac{\partial \omega''_{hk}}{\partial x'_g} = \frac{\partial \omega'_{hk}}{\partial x'_g}$$

für alle Werthe von g, h, k folgt. Die entsprechenden Coefficienten von F'' und F' unterscheiden sich demnach nur um additive Constanten. Damit diese Constanten verschwinden, reicht es aus, dass irgend einmal $F'' = F'$ werde, mit anderen Worten, dass die Lösung der Gleichungen (9.) den aus der Gleichung (1.) hervorgehenden Transformationsrelationen

$$(10.) \quad \sum_{ik} \omega_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial x'_\beta} = \omega'_{\alpha\beta}$$

für irgend ein specielles Werthesystem der neuen Variabeln Genüge leiste. Wir haben also den Satz:

Wenn es möglich ist, die ursprünglichen Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ als Functionen der neuen Variablen $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ so zu bestimmen, dass das Gleichungssystem (9.) befriedigt wird, und man unterwirft diese Functionen noch der Anfangsbedingung, dass sie nebst ihren ersten Derivirten für irgend ein specielles Werthesystem der neuen Variablen den in der Gleichung $F = F'$ enthaltenen Transformationsrelationen Genüge leisten, so finden diese Transformationsrelationen und mit ihnen die Gleichung $F = F'$ für alle Werthe der neuen Variablen statt.

Daraus folgt, dass die in (1.) enthaltenen Transformationsrelationen durch die Gleichungen (9.) bis auf die ihnen zu entnehmende Anfangsbedingung überflüssig gemacht werden, sobald die letztern miteinander verträglich sind.

Das Gleichungssystem (9.) enthält also, seine Möglichkeit vorausgesetzt, bis auf die erwähnte Anfangsbedingung die sämtlichen für die Transformation von F in F' nothwendigen und ausreichenden Bedingungen, und ersetzt hiernach gleichzeitig die algebraischen aus (1.) hervorgehenden Transformationsrelationen und die hinzugehörigen Integrabilitätsbedingungen.

4.

Für die Möglichkeit der Gleichungen (9.) sind neue Integrabilitätsbedingungen erforderlich, zu deren Herleitung wir jetzt übergehen. Um zugleich den Nachweis zu führen, dass diese die Gleichungen (9.) nicht rückwärts nach sich ziehen, betrachten wir statt der letztern das System, welches in einer der folgenden Gleichungen enthalten ist:

$$(9'.) \quad \begin{cases} \left[\frac{\partial^2 x_r}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta} + \sum_{\gamma \lambda} \left\{ \begin{smallmatrix} g^h \\ r \end{smallmatrix} \right\} u'_\alpha u'_\beta = \sum_\lambda \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \beta \\ \lambda \end{smallmatrix} \right\}' u'_\lambda + \left(\begin{smallmatrix} r \\ \alpha \beta \end{smallmatrix} \right), \\ \left[\frac{\partial^2 x_r}{\partial x'_\alpha \partial x'_\gamma} + \sum_{\beta \delta} \left\{ \begin{smallmatrix} g^i \\ r \end{smallmatrix} \right\} u'_\alpha u'_\gamma = \sum_\lambda \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \gamma \\ \lambda \end{smallmatrix} \right\}' u'_\lambda + \left(\begin{smallmatrix} r \\ \alpha \gamma \end{smallmatrix} \right), \end{cases}$$

wo, wie im Folgenden allgemein, die ersten Derivirten

$$\frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} = u'_\alpha$$

gesetzt sind, während wir für die höhern Derivirten die gewöhnliche Bezeichnung beibehalten. Aus dem Vorstehenden wird also das System (9.) erhalten, indem man die Grössen $\left(\begin{smallmatrix} r \\ \alpha \beta \end{smallmatrix} \right)$ alle gleich 0 setzt.

Die in Rede stehenden Integrabilitätsbedingungen werden erhalten, wenn man die erste Gleichung (9'.) nach x'_γ , die zweite nach x'_β differentiirt und die Differenz bildet, wobei die dritte Derivirte von x_r

wegfällt. Beachtet man, dass auch die Glieder, welche eine nach x'_β und x'_γ genommene zweite Derivirte enthalten, sich wegheben, so folgt:

$$\begin{aligned} & \sum_{g,h,i} \left[\frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} gh \\ r \end{smallmatrix} \right\}}{\partial x_i} - \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} gi \\ r \end{smallmatrix} \right\}}{\partial x_h} \right] u^\alpha u^\beta u^\gamma + \sum_{p,h} \left\{ \begin{smallmatrix} ph \\ r \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial^2 x_p}{\partial x'_\alpha \partial x'_\gamma} u^\beta - \sum_{p,i} \left\{ \begin{smallmatrix} pi \\ r \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial^2 x_p}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta} u^\gamma \\ & - \sum_{\lambda} \left[\frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha\beta \\ \lambda \end{smallmatrix} \right\}'}{\partial x'_\gamma} - \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha\gamma \\ \lambda \end{smallmatrix} \right\}'}{\partial x'_\beta} \right] u^\lambda + \sum_{\lambda} \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha\beta \\ \lambda \end{smallmatrix} \right\}' \frac{\partial^2 x_r}{\partial x'_\lambda \partial x'_\gamma} - \sum_{\lambda} \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha\gamma \\ \lambda \end{smallmatrix} \right\}' \frac{\partial^2 x_r}{\partial x'_\lambda \partial x'_\beta} \\ & \quad + \frac{\partial \left(\begin{smallmatrix} r \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right)}{\partial x'_\gamma} - \frac{\partial \left(\begin{smallmatrix} r \\ \alpha\gamma \end{smallmatrix} \right)}{\partial x'_\beta}. \end{aligned}$$

Daraus geht zunächst hervor, dass die Integrabilitätsbedingungen für das System (9') genau die nämlichen sein werden wie für die ursprünglichen Gleichungen (9.), sobald die Grössen $\left(\begin{smallmatrix} r \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right)$ dem folgenden Gleichungssystem Genüge leisten

$$(11.) \quad \begin{cases} \sum_{p,h} \left\{ \begin{smallmatrix} ph \\ r \end{smallmatrix} \right\} \left(\begin{smallmatrix} p \\ \alpha\gamma \end{smallmatrix} \right) u^\beta - \sum_{p,i} \left\{ \begin{smallmatrix} pi \\ r \end{smallmatrix} \right\} \left(\begin{smallmatrix} p \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right) u^\gamma \\ - \sum_{\lambda} \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha\beta \\ \lambda \end{smallmatrix} \right\}' \left(\begin{smallmatrix} r \\ \lambda\gamma \end{smallmatrix} \right) - \sum_{\lambda} \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha\gamma \\ \lambda \end{smallmatrix} \right\}' \left(\begin{smallmatrix} r \\ \lambda\beta \end{smallmatrix} \right) + \frac{\partial \left(\begin{smallmatrix} r \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right)}{\partial x'_\gamma} - \frac{\partial \left(\begin{smallmatrix} r \\ \alpha\gamma \end{smallmatrix} \right)}{\partial x'_\beta}, \end{cases}$$

welches sich leicht in eine symmetrische Form setzen lässt.

Ich setze nun voraus, dass diese Bedingung für alle Werthe von r , α , β und γ erfüllt ist. Werden alsdann in der vorangehenden Gleichung für die zweiten Derivirten ihre Werthe aus (9') eingesetzt, so folgt:

$$\begin{aligned} & \sum_{g,h,i} \left[\frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} gh \\ r \end{smallmatrix} \right\}}{\partial x_i} - \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} gi \\ r \end{smallmatrix} \right\}}{\partial x_h} \right] u^\alpha u^\beta u^\gamma \\ & + \sum_{p,h} \left\{ \begin{smallmatrix} ph \\ r \end{smallmatrix} \right\} u^\beta \left(\sum_{\lambda} \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha\gamma \\ \lambda \end{smallmatrix} \right\}' u^\lambda_p - \sum_{g,i} \left\{ \begin{smallmatrix} gi \\ p \end{smallmatrix} \right\} u^\alpha u^\gamma \right) \\ & - \sum_{p,i} \left\{ \begin{smallmatrix} pi \\ r \end{smallmatrix} \right\} u^\gamma \left(\sum_{\lambda} \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha\beta \\ \lambda \end{smallmatrix} \right\}' u^\lambda_p - \sum_{g,h} \left\{ \begin{smallmatrix} gh \\ p \end{smallmatrix} \right\} u^\alpha u^\beta \right) \\ & - \sum_{\lambda} \left[\frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha\beta \\ \lambda \end{smallmatrix} \right\}'}{\partial x'_\gamma} - \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha\gamma \\ \lambda \end{smallmatrix} \right\}'}{\partial x'_\beta} \right] u^\lambda \\ & + \sum_{\lambda} \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha\beta \\ \lambda \end{smallmatrix} \right\}' \left(\sum_{\mu} \left\{ \begin{smallmatrix} \gamma\lambda \\ \mu \end{smallmatrix} \right\}' u^\mu_r - \sum_{p,i} \left\{ \begin{smallmatrix} pi \\ r \end{smallmatrix} \right\} u^\lambda_p u^\gamma \right) \\ & - \sum_{\lambda} \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha\gamma \\ \lambda \end{smallmatrix} \right\}' \left(\sum_{\mu} \left\{ \begin{smallmatrix} \beta\lambda \\ \mu \end{smallmatrix} \right\}' u^\mu_r - \sum_{p,h} \left\{ \begin{smallmatrix} ph \\ r \end{smallmatrix} \right\} u^\lambda_p u^\beta \right). \end{aligned}$$

Hier heben sich alle Glieder weg, in denen das Product aus zwei Derivirten u vorkommt; vereinigt man die übrigen Glieder, indem man rechts λ mit μ vertauscht, so folgt:

$$(12.) \left\{ \begin{aligned} & \sum_{gh\lambda} \left(\frac{\partial \{g^h\}_r}{\partial x_i} - \frac{\partial \{g^i\}_r}{\partial x_h} + \sum_p [\{g^h\}_p \{p^i\}_r - \{g^i\}_p \{p^h\}_r] \right) u_\alpha^p u_\beta^h u_\gamma^i \\ & - \sum_\lambda \left(\frac{\partial \{\alpha\beta\}'_\lambda}{\partial x'_\gamma} - \frac{\partial \{\alpha\gamma\}'_\lambda}{\partial x'_\beta} + \sum_\mu [\{\alpha\beta\}'_\mu \{\mu\gamma\}'_\lambda - \{\alpha\gamma\}'_\mu \{\mu\beta\}'_\lambda] \right) u_\lambda^r \end{aligned} \right.$$

Wir haben also das folgende Resultat.

Das Gleichungssystem, welches aus (12.) hervorgeht, wenn für r , α , β und γ alle Werthe von 1 bis n eingesetzt werden, enthält alle für die Möglichkeit des Systems (9.) erforderlichen Integrabilitätsbedingungen. Aber es kann die Gleichungen (9.) nicht ersetzen, indem aus ihm rückwärts nicht diese, sondern die allgemeineren Gleichungen (9.) folgen, in denen die unabhängigen Glieder $\binom{r}{\alpha\beta}$ dem Gleichungssystem (11.) Genüge leisten.

5.

Die Gleichungen (12.) müssen für die weitere Untersuchung durch ein anderes, gleichbedeutendes System ersetzt werden. Ich multiplicire für diesen Zweck mit $\omega_{rk} u_\lambda^r u_\delta^k$ und summire über alle Werthe von k und r . Es ist klar, dass die hieraus folgenden Gleichungen auch wieder zum System (12.) zurückführen, wenn man, nachdem die eben bezeichnete Summation wirklich ausgeführt ist, mit $\frac{\partial x'_\delta}{\partial x_i} \cdot \frac{E_{\rho i}}{E}$ multiplicirt, hierauf zuerst nach δ , dann nach l summirt und zuletzt $\rho = r$ setzt.

Bei der angegebenen Operation geht die Gleichung (12.), da wegen (10.)

$$\sum_{rk} \omega_{rk} u_\lambda^r u_\delta^k = \omega'_{\lambda\delta}$$

ist, zunächst in

$$\begin{aligned} & \sum_{gh\lambda k} u_\alpha^p u_\beta^h u_\gamma^i u_\delta^k \sum_r \omega_{rk} \left(\frac{\partial \{g^h\}_r}{\partial x_i} - \frac{\partial \{g^i\}_r}{\partial x_h} + \sum_p [\{g^h\}_p \{p^i\}_r - \{g^i\}_p \{p^h\}_r] \right) \\ & - \sum_\lambda \omega'_{\lambda\delta} \left(\frac{\partial \{\alpha\beta\}'_\lambda}{\partial x'_\gamma} - \frac{\partial \{\alpha\gamma\}'_\lambda}{\partial x'_\beta} + \sum_\mu [\{\alpha\beta\}'_\mu \{\mu\gamma\}'_\lambda - \{\alpha\gamma\}'_\mu \{\mu\beta\}'_\lambda] \right) \end{aligned}$$

über, so dass die noch rückständigen Reductionen für beide Seiten der Gleichung die nämlichen sind. Nun ist nach Gleichung (7.)

$$\sum_r \omega_{rk} \{g^h\}_r = [g^h]_k,$$

also wird die auf der linken Seite nach r genommene Summe

$$= \frac{\partial [g^h]_k}{\partial x_i} - \sum_p \{g^h\}_p \frac{\partial \omega_{pk}}{\partial x_i} - \frac{\partial [g^i]_k}{\partial x_h} + \sum_p \{g^i\}_p \frac{\partial \omega_{pk}}{\partial x_h} + \sum_p (\{g^h\}_p [p^i]_k - \{g^i\}_p [p^h]_k),$$

wenn in den beiden Summen, welche Derivierten von ω enthalten, p statt r gesetzt wird. Ferner ist nach (5.)

$$\frac{\partial \omega_{pk}}{\partial x_i} = [ip]_k + [ik]_p, \quad \frac{\partial \omega_{pk}}{\partial x_h} = [hp]_k + [hk]_p,$$

also

$$[p^i]_k - \frac{\partial \omega_{pk}}{\partial x_i} = -[ik]_p, \quad \frac{\partial \omega_{pk}}{\partial x_h} - [p^h]_k = [hk]_p,$$

und die in Rede stehende Summe wird

$$= \frac{\partial [g^h]_k}{\partial x_i} - \frac{\partial [g^i]_k}{\partial x_h} + \sum_p (\{g^i\}_p [hk]_k - \{g^h\}_p [ik]_k).$$

Diesen Ausdruck bezeichne ich von hier ab durch $(gkh i)$, so dass, wenn die Grössen $\{g^i\}_p$, $\{g^h\}_p$ mittelst der Gleichungen (7.) weggeschafft werden,

$$(13.) \quad (gkh i) = \frac{\partial [g^h]_k}{\partial x_i} - \frac{\partial [g^i]_k}{\partial x_h} + \sum_{\alpha \beta} \frac{E_{\alpha \beta}}{E} ([g^i]_{\alpha} [hk]_{\beta} - [g^h]_{\alpha} [ik]_{\beta}),$$

oder wenn man die Derivierten ausführt,

$$(14.) \quad \left\{ \begin{aligned} (gkh i) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega_{pi}}{\partial x_h \partial x_k} + \frac{\partial^2 \omega_{hk}}{\partial x_p \partial x_i} - \frac{\partial^2 \omega_{ph}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 \omega_{ik}}{\partial x_p \partial x_h} \right) \\ &+ \sum_{\alpha \beta} \frac{E_{\alpha \beta}}{E} ([g^i]_{\alpha} [hk]_{\beta} - [g^h]_{\alpha} [ik]_{\beta}) \end{aligned} \right.$$

wird. In Folge dieser Bezeichnung, welche wir auch für die transformirte Form benutzen, nehmen die Integrabilitätsbedingungen (12.) die folgende Gestalt an:

$$(15.) \quad (\alpha \delta \beta \gamma)' = \sum_{ghik} (gkh i) u_{\alpha}^g u_{\beta}^h u_{\gamma}^i u_{\delta}^k.$$

Für dieses System von Gleichungen gilt das nämliche Resultat wie für die Gleichungen (12.), dass sie das vollständige System aller zu (9.) gehörigen Integrabilitätsbedingungen bilden, aber nicht die Gleichungen (9.), sondern das allgemeinere System (9') unter Voraussetzung

der Relationen (11.) nach sich ziehen, also die zu (1.) gehörigen Integrabilitätsbedingungen nicht ersetzen.

Die Coefficienten im vorstehenden Formelsystem haben folgende Eigenschaften. Vertauscht man in (13.) i mit h , so folgt

$$(16^a.) \quad (gkih) = - (gkhi).$$

Vertauscht man in (14.) g mit k , so folgt

$$(16^b.) \quad (kghi) = - (gkhi).$$

Vertauscht man in (14.) g mit i und zugleich k mit h , so ändert sich auf der rechten Seite wegen $E_{\beta\alpha} = E_{\alpha\beta}$ nichts, und es folgt

$$(ihkg) = (gkhi)$$

oder

$$(16^c.) \quad (higk) = (gkhi).$$

Endlich erhält man ohne Weiteres

$$(16^d.) \quad (gkhi) + (ghik) + (gikh) = 0,$$

wobei zu bemerken ist, dass diese Formel auf eine der vorangehenden zurückführt, sobald sich unter den Zahlen $ghik$ zwei gleiche befinden.

Mittelst dieser vier Formeln lässt sich die Anzahl der in (15.) enthaltenen und wesentlich voneinander verschiedenen Relationen leicht bestimmen.

Zunächst sind wegen (a.) und (b.) alle Fälle auszuschliessen, wo $\alpha = \delta$ oder $\beta = \gamma$ ist, sowie diejenigen, welche durch Vertauschung von α mit δ oder von β mit γ folgen. Für $\alpha\delta$ sowie für $\beta\gamma$ sind demnach nur Combinationen ohne Wiederholung der Zahlen 1, 2, ... n zu nehmen, deren Anzahl gleich $\frac{n(n-1)}{2} = n_2$ ist.

Jetzt zerfallen die Ausdrücke $(\alpha\delta\beta\gamma)'$ in drei Gruppen, die erste von n_2 Ausdrücken, welche der Voraussetzung $\alpha\delta = \beta\gamma$ entsprechen, die zweite von $\frac{n_2(n_2-1)}{2}$ Ausdrücken, in denen $\alpha\delta$ nicht gleich $\beta\gamma$ ist, während die dritte Gruppe von gleichviel Ausdrücken, welche sich aus der zweiten durch Vertauschung von $\alpha\delta$ mit $\beta\gamma$ ergibt, wegen (c.) auszuschliessen ist. Also erhalten wir wegen (a.), (b.) und (c.) nur $\frac{n_2(n_2+1)}{2}$ Ausdrücke $(\alpha\delta\beta\gamma)'$.

Da aber jede Gruppe $\alpha\delta\beta\gamma$, in welcher keine Zahl mehr als einmal vorkommt, eine Gleichung (d.) liefert, so lassen sich im Ganzen

$$n_4 = \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

von den eben erwähnten Ausdrücken durch andere darstellen, und es bleiben nur

$$\frac{n_2(n_2+1)}{2} - n_4 = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$$

von einander wesentlich verschiedene Ausdrücke $(\alpha\delta\beta\gamma)'$ übrig; dies ist demnach die Anzahl der Gleichungen (15.), soweit sie nicht auseinander folgen.

Die Anzahl der Gleichungen (10.) ist $\frac{n(n+1)}{2}$; addirt man dies zur vorstehenden Zahl, so erhält man

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2(n^2-1)}{12} = n^2 + n + \frac{(n+2)(n+1)n(n-3)}{12},$$

und es ist demnach für $n=2$ die Anzahl der Gleichungen (10.) und (15.) kleiner als die Anzahl $n^2 + n$ der in ihnen vorkommenden Unbekannten, nämlich der ursprünglichen Variabeln und ihrer ersten Derivirten, für $n=3$ ist sie dieser gleich und für $n>3$ ist sie größer als die letztere.

6.

Ebenso wie die Gleichungen (10.) als Transformationsrelationen zur Gleichung (1.) oder (2.) gehören, so sind auch die Gleichungen (15.), wie aus ihrer Form hervorgeht, die Transformationsrelationen zu einer Form vierter Ordnung. Bevor wir zur Herstellung dieser Form übergehen, werden wir nachweisen, wie man allgemein aus den zu irgend einer Form gehörigen Transformationsrelationen mittelst der Gleichungen (9.) zu den Transformationsrelationen für eine neue Form gelangen kann, deren Ordnung um Eins grösser ist wie die Ordnung der ursprünglichen Form.

Sei

$$G_\mu = \sum_{i_1 \dots i_\mu} (i_1 i_2 \dots i_\mu) \partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_\mu}$$

eine aus den Coefficienten von F abgeleitete und in den Differentialen $\partial x_1, \partial x_2, \dots, \partial x_\mu$ μ -fach lineare Form, G'_μ ihre transformirte, mithin allgemein

$$(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu)' = \sum_{i_1 \dots i_\mu} (i_1 i_2 \dots i_\mu) u_{\alpha_1}^{i_1} u_{\alpha_2}^{i_2} \dots u_{\alpha_\mu}^{i_\mu},$$

wo wie bisher

$$u_\alpha^i = \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha}$$

zu setzen ist. Differentiirt man nun nach x'_α , so folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu)'}{\partial x'_\alpha} &= \sum_{i_1 \dots i_\mu} \frac{\partial(i_1 i_2 \dots i_\mu)}{\partial x_i} u_\alpha^{i_1} u_{\alpha_1}^{i_2} \dots u_{\alpha_\mu}^{i_\mu} + P, \\ P &= \sum_{\lambda i_2 \dots i_\mu} (\lambda i_2 \dots i_\mu) \frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial x'_\alpha \partial x'_{\alpha_1}} u_{\alpha_1}^{i_2} \dots u_{\alpha_\mu}^{i_\mu} \\ &\quad + \sum_{i_1 \lambda \dots i_\mu} (i_1 \lambda \dots i_\mu) u_{\alpha_1}^{i_1} \frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial x'_\alpha \partial x'_{\alpha_2}} \dots u_{\alpha_\mu}^{i_\mu} + \dots \end{aligned}$$

Setzt man nun in P für die zweiten Derivirten ihre Werthe

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_a \partial x'_b} = \sum_r \left\{ \begin{matrix} \alpha \alpha_i \\ r \end{matrix} \right\}' u_r^\lambda - \sum_{i_1 i_2} \left\{ \begin{matrix} i i_1 i_2 \\ \lambda \end{matrix} \right\} u_{\alpha}^{i_1} u_{\alpha}^{i_2}$$

ein, so erhält man für P eine Differenz $U - V$, wo

$$\begin{aligned} U &= \sum_r \left\{ \begin{matrix} \alpha \alpha_1 \\ r \end{matrix} \right\}' \sum_{\lambda i_2 \dots i_\mu} (\lambda i_2 \dots i_\mu) u_r^\lambda u_{\alpha_2}^{i_2} \dots u_{\alpha_\mu}^{i_\mu} \\ &+ \sum_r \left\{ \begin{matrix} \alpha \alpha_2 \\ r \end{matrix} \right\}' \sum_{i_1 \lambda \dots i_\mu} (i_1 \lambda \dots i_\mu) u_{\alpha_1}^{i_1} u_r^\lambda \dots u_{\alpha_\mu}^{i_\mu} + \dots \\ &= \sum_r \left[\left\{ \begin{matrix} \alpha \alpha_1 \\ r \end{matrix} \right\}' (r \alpha_2 \dots \alpha_\mu)' + \left\{ \begin{matrix} \alpha \alpha_2 \\ r \end{matrix} \right\}' (\alpha_1 r \dots \alpha_\mu)' + \dots \right] \end{aligned}$$

und

$$V = \sum_{i_1 \dots i_\mu} u_{\alpha}^{i_1} u_{\alpha_1}^{i_1} \dots u_{\alpha_\mu}^{i_\mu} \sum_r \left[\left\{ \begin{matrix} i i_1 \\ \lambda \end{matrix} \right\} (\lambda i_2 \dots i_\mu) + \left\{ \begin{matrix} i i_2 \\ \lambda \end{matrix} \right\} (i_1 \lambda \dots i_\mu) + \dots \right]$$

ist. Führt man den hierdurch bestimmten Werth von P ein, und bringt U auf die linke Seite der Gleichung, während auf der rechten alles unter ein Summenzeichen gebracht wird, so ergibt sich folgendes Resultat:

Unter der Voraussetzung, dass alle Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind, erhält man aus jedem vollständigen System von Transformationsrelationen μ^{ter} Ordnung

$$(17^a) \quad (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu)' = \sum_{i_1 \dots i_\mu} (i_1 i_2 \dots i_\mu) u_{\alpha_1}^{i_1} u_{\alpha_2}^{i_2} \dots u_{\alpha_\mu}^{i_\mu}$$

ein neues vollständiges System von Transformationsrelationen $(\mu + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(17^b) \quad (\alpha \alpha_1 \dots \alpha_\mu)' = \sum_{i_1 \dots i_\mu} (i i_1 \dots i_\mu) u_{\alpha}^{i_1} u_{\alpha_1}^{i_1} \dots u_{\alpha_\mu}^{i_\mu},$$

wenn man

$$(17^c) \quad (i i_1 \dots i_\mu) = \frac{\partial (i i_2 \dots i_\mu)}{\partial x_i} - \sum_{\lambda} \left[\left\{ \begin{matrix} i i_1 \\ \lambda \end{matrix} \right\} (\lambda i_2 \dots i_\mu) + \left\{ \begin{matrix} i i_2 \\ \lambda \end{matrix} \right\} (i_1 \lambda \dots i_\mu) + \dots \right]$$

setzt und diese Bezeichnung auch für die transformirte Form benutzt.

Mittelst dieses Satzes kann man aus einer Gleichung $G_\mu = G'_\mu$ eine Reihe ähnlicher Gleichungen $G_{\mu+1} = G'_{\mu+1}$, $G_{\mu+2} = G'_{\mu+2}$, usw. ableiten, bis man auf identische Relationen oder solche kommt, die aus früheren zusammengesetzt sind.

Der erste Fall tritt bei der Function F selbst ein. Nimmt man nämlich $(i_1 i_2) = \omega_{i_1 i_2}$, so wird

$$\begin{aligned}(i_1 i_2) &= \frac{\partial \omega_{i_1 i_2}}{\partial x_i} - \sum_{\lambda} \left[\left\{ \begin{smallmatrix} i_1 i_2 \\ \lambda \end{smallmatrix} \right\} \omega_{\lambda i_2} + \left\{ \begin{smallmatrix} i_1 i_2 \\ \lambda \end{smallmatrix} \right\} \omega_{\lambda i_1} \right] \\ &= \frac{\partial \omega_{i_1 i_2}}{\partial x_i} - \left[\begin{smallmatrix} i_1 i_2 \\ i_2 \end{smallmatrix} \right] - \left[\begin{smallmatrix} i_1 i_2 \\ i_1 \end{smallmatrix} \right]\end{aligned}$$

nach einer in art. 5. benutzten Formel, und dies ist wegen Gleichung (5.) stets gleich Null.

7.

Wir gehen nun zur Darstellung derjenigen homogenen Form G_4 über, zu welcher die Gleichungen (15.) als Transformationsrelationen gehören. Dieselben lauten

$$(18.) \quad (\alpha \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)' = \sum_{i_1, i_2, i_3} (i_1 i_2 i_3) \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial x'_{\alpha_1}} \frac{\partial x_{i_2}}{\partial x'_{\alpha_2}} \frac{\partial x_{i_3}}{\partial x'_{\alpha_3}},$$

und es ist wegen (16.)

$$(19.) \quad \begin{cases} (i_1 i_2 i_3) = -(i_1 i_3 i_2), & (i_1 i_2 i_3) = -(i_2 i_1 i_3), & (i_2 i_3 i_1) = (i_1 i_2 i_3), \\ (i_1 i_2 i_3) + (i_2 i_3 i_1) + (i_3 i_1 i_2) = 0. \end{cases}$$

Wir multipliciren die Gleichung (18.) mit $\partial x'_\alpha \partial x'_{\alpha_1} D x'_{\alpha_2} \Delta x'_{\alpha_3}$, unter ∂ , δ , D , Δ verschiedene Differentiationszeichen verstanden, und setzen

$$\sum_{i_1, i_2, i_3} (i_1 i_2 i_3) \partial x_i \delta x_{i_1} D x_{i_2} \Delta x_{i_3} = G_4;$$

dann folgt aus (18.) durch Summation über alle Werthe der α

$$G'_4 = G_4.$$

Hier ist also G_4 eine quadrilineare Form der Variabelnsysteme ∂x , δx , Dx , Δx , welche alle derselben linearen Substitution unterworfen sind. Aber diese Form ist wegen der Eigenschaften ihrer Coefficienten eine sehr specielle.

Vertauscht man i mit i_1 , was nichts ändert, da beide die gleichen Werthe durchlaufen, und ersetzt dann $(i_1 i_2 i_3)$ durch $-(i_1 i_2 i_3)$, so folgt, dass G_4 nur sein Zeichen ändert, wenn ∂ mit δ vertauscht wird. Nimmt man für i_1 nur die Combinationen ohne Wiederholung, so folgt

$$G_4 = \sum (i_1 i_2 i_3) (\partial x_i \delta x_{i_1} - \delta x_i \partial x_{i_1}) D x_{i_2} \Delta x_{i_3}.$$

Das Gleiche ergibt sich für D und Δ , wenn i_2 und i_3 vertauscht werden, und es folgt

$$(20.) \quad G_4 = \sum (i_1 i_2 i_3) (\partial x_i \delta x_{i_1} - \delta x_i \partial x_{i_1}) (D x_{i_2} \Delta x_{i_3} - D x_{i_3} \Delta x_{i_2}),$$

wenn der Accent am Summenzeichen bedeutet, dass sowohl für i_1 , als für i_2, i_3 nur die $\frac{n(n-1)}{2}$ Combinationen ohne Wiederholung der Zahlen 1, 2, . . . n gesetzt werden dürfen.

Vertauscht man nun i mit i_2 , i_1 mit i_3 und wendet die Gleichung $(i_2 i_3 i i_1) = (i i_1 i_2 i_3)$ an, so folgt, dass G_4 ungeändert bleibt, wenn allgemein $\partial x_i \delta x_k - \varepsilon x_k \delta x_i$ mit $D x_i \mathcal{A} x_k - D x_k \mathcal{A} x_i$ vertauscht wird. Gleichwohl darf man nicht $D = \partial$ und $\mathcal{A} = \delta$ oder eines von beiden setzen, weil sonst die Coefficienten $(i i_1 i_2 i_3)$ und $(i_2 i_1 i i_3)$ oder, was dasselbe ist, $(i i_1 i_2 i_3)$ und $(i i_3 i_2 i_1)$ nicht mehr von einander getrennt bleiben, sondern zu ihrer Summe vereinigt werden, mithin aus $G_4 = G'_4$ nicht mehr alle Transformationsrelationen (18.) hervorgehen können.

Die letzteren ergeben sich auch aus den Formen

$$H_4 = \sum (i i_2 i_3 i_1) \varepsilon x_i \delta x_k D x_k \mathcal{A} x_i - \sum (i i_1 i_2 i_3) \partial x_i D x_k \mathcal{A} x_k \delta x_i,$$

$$J_4 = \sum (i i_3 i_1 i_2) \varepsilon x_i \delta x_k D x_k \mathcal{A} x_i - \sum (i i_1 i_2 i_3) \partial x_i \mathcal{A} x_k \delta x_k D x_i,$$

welche aus G_4 durch cyklische Vertauschung von δ , D und $\mathcal{A}$ hervorgehen, und es ist wegen (19.) identisch

$$G_4 + H_4 + J_4 = 0.$$

8.

Ich setze nun voraus, man habe nach art. 6. aus den Coefficienten $(i_1 i_2 i_3 i_4)$ von G_4 neue Ausdrücke $(i i_1 i_2 i_3 i_4)$ abgeleitet und mittelst derselben eine in den Differentialen $\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3, \partial x_4$ fünffach lineare

Form G_5 gebildet. Ebenso sei aus G_5 auf demselben Wege eine sechsfach lineare Form G_6 , aus dieser eine siebenfach lineare G_7 abgeleitet worden, u. s. w., bis man auf Formen kommt, deren Coefficienten entweder verschwinden oder auf frühere Formen zurückführen. Dann ergibt sich das Gleichungssystem

$$(A.) \quad F = F', \quad G_4 = G'_4, \quad G_5 = G'_5, \quad \dots,$$

und es geht aus dem Vorangehenden hervor, dass für die Möglichkeit der ersten von diesen Gleichungen die Möglichkeit aller übrigen erforderlich ist.

Damit aber die Gleichung $F = F'$ möglich sei, ist erforderlich und hinreichend, dass die entsprechenden Transformationsrelationen

$$(F.) \quad (\alpha_1 \alpha_2)' = \sum_{i_1 i_2} (i_1 i_2) u_{\alpha_1}^{i_1} u_{\alpha_2}^{i_2}$$

für $(ik) = \omega_{ik}$, und zugleich die Integrabilitätsbedingungen

$$(B.) \quad \frac{\partial u_{\alpha}^{i_1}}{\partial x_{i_2}'} = \frac{\partial u_{\beta}^{i_1}}{\partial x_{\alpha}'}$$

erfüllt sind. Denn wenn beide Gleichungssysteme erfüllt sind, so giebt es n Functionen $v_1, v_2, \dots v_n$ der Beschaffenheit, dass die Gleichungen $(F.)$ durch die allgemeine Annahme

$$u'_\alpha = \frac{\partial v_i}{\partial x'_\alpha}$$

befriedigt werden, und die Substitution $x_1 = v_1, x_2 = v_2, \dots x_n = v_n$ leistet dann die verlangte Transformation von F in F' .

Damit die Gleichung $G_4 = G'_4$ möglich sei, müssen die Transformationsrelationen

$$(G_4.) \quad (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)' = \sum_{i_1, \dots, i_4} (i_1 i_2 i_3 i_4) u'^{i_1}_\alpha u'^{i_2}_\alpha u'^{i_3}_\alpha u'^{i_4}_\alpha$$

und die Integrabilitätsbedingungen $(B.)$ erfüllt sein.

Ebenso müssen diese letzteren neben den Transformationsrelationen

$$(G_5.) \quad (\alpha \alpha_1 \dots \alpha_4)' = \sum_{i_1, \dots, i_4} (i i_1 \dots i_4) u'^i_\alpha u'^{i_1}_{\alpha_1} \dots u'^{i_4}_{\alpha_4}$$

erfüllt sein, damit die Gleichung $G_5 = G'_5$ möglich sei, u. s. w.

Dies festgestellt, würde die Transformation von F in F' schon dann unmöglich sein, wenn die verschiedenen Systeme von Transformationsrelationen $(F.)$, $(G_4.)$, $(G_5.)$, $(G_6.)$, u. s. w. algebraisch nicht miteinander bestehen könnten, abgesehen von den nothwendig hinzuzufügenden Integrabilitätsbedingungen $(B.)$.

Ich setze daher, indem von den Gleichungen $(B.)$ gänzlich Abstand genommen wird, voraus, die verschiedenen Systeme von Transformationsrelationen, deren Herleitung und Aufeinanderfolge oben festgestellt wurde, seien algebraisch erfüllt; dann handelt es sich darum, ob die Integrabilitätsbedingungen $(B.)$, vermittelt deren aus $F = F'$ alle übrigen Gleichungen $(A.)$ folgten, überflüssig sind oder nicht.

9.

Um diese Frage, welche der Kernpunkt des ganzen Transformationsproblems ist, zu erledigen, will ich zur Vermeidung überflüssiger Rechnungen die hier erforderlichen Schlüsse zunächst unter einer bestimmten Voraussetzung darlegen, welche keineswegs festgehalten werden soll, und dann erst zur Behandlung der Frage in derjenigen Form übergehen, in welcher sie gestellt werden muß.

Ich will also voraussetzen 1) dass die Unbekannten x und u beispielsweise durch das Gleichungssystem $(G_4.)$ vollständig und ohne Widerspruch bestimmt sind, und dass 2) diese Werthe der Unbekannten auch dem folgenden Gleichungssystem $(G_5.)$ genügen.

Nimmt man nun von den Gleichungen (G_4) die Derivirten nach x'_a , so folgt ein Gleichungssystem

$$(G'_4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)'}{\partial x'_a} &= \sum_{i_1 \dots i_4} \frac{\partial(i_1 i_2 i_3 i_4)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_a} u_{\alpha_1}^{i_1} \dots u_{\alpha_4}^{i_4} + \Pi, \\ \Pi &= \sum_{\lambda i_1 i_2 i_3} (\lambda i_1 i_2 i_3) \frac{\partial u_{\alpha_1}^{\lambda}}{\partial x'_a} u_{\alpha_2}^{i_1} u_{\alpha_3}^{i_2} u_{\alpha_4}^{i_3} \\ &\quad + \sum_{i_1 \lambda i_2 i_3} (i_1 \lambda i_2 i_3) u_{\alpha_1}^{i_1} \frac{\partial u_{\alpha_2}^{\lambda}}{\partial x'_a} u_{\alpha_3}^{i_2} u_{\alpha_4}^{i_3} + \dots \end{aligned} \right.$$

In Bezug auf dieses System ist zunächst festzustellen, was aus unserer ersten Voraussetzung folgt, dass durch dasselbe die Werthe aller Derivirten

$$\frac{\partial x_i}{\partial x'_a}, \quad \frac{\partial u_{\alpha_s}^{\lambda}}{\partial x'_a}$$

völlig bestimmt sind, d. h. dass das System (G'_4) eine der Anzahl dieser Unbekannten gleiche Anzahl von Gleichungen enthält, welche in Bezug auf jene von einander unabhängig sind, und keine Gleichung dieses Systems mit andern im Widerspruche ist.

Setzt man nun

$$\frac{\partial x_i}{\partial x'_a} - u_{\alpha}^i = \binom{i}{\alpha}$$

$$\frac{\partial u_{\alpha_s}^{\lambda}}{\partial x'_a} + \sum_{i_1} \binom{i_1 i_2}{\lambda} u_{\alpha}^{i_1} u_{\alpha_s}^{i_2} - \sum_r \binom{\alpha \alpha_s}{r} u_r^{\lambda} = \binom{\lambda}{\alpha \alpha_s},$$

so sind $\binom{i}{\alpha} = 0$, $\binom{\lambda}{\alpha \alpha_s} = 0$ die Gleichungen, mittelst deren in art. 6. aus den vorstehenden Gleichungen (G'_4) die soeben als die Unbekannten dieses Systems bezeichneten Derivirten weggeschafft wurden, wodurch jene in die Gleichungen (G_5) übergangen.

Schafft man statt dessen diese Derivirten aus den Gleichungen (G'_4) mittelst der vorstehenden Formeln weg, so erhält man auf der rechten Seite einen in den Grössen $\binom{i}{\alpha}$, $\binom{\lambda}{\alpha \alpha_s}$ linearen Theil U_4 , der sich von der ursprünglichen rechten Seite von (G'_4) nur dadurch unterscheidet, dass $\frac{\partial x_i}{\partial x'_a}$ durch $\binom{i}{\alpha}$, $\frac{\partial u_{\alpha_s}^{\lambda}}{\partial x'_a}$ durch $\binom{\lambda}{\alpha \alpha_s}$ ersetzt ist. Die übrigen Glieder heben sich gegen die linke Seite weg, da wir voraussetzen, dass die Gleichungen (G_5) erfüllt sind. Folglich gehen die Gleichungen (G'_4) über in ein Gleichungssystem

$$U_4 = 0,$$

welches aus jenen erhalten wird, wenn die Unbekannten durch $\binom{i}{\alpha}$, $\binom{1}{\alpha\alpha}$ ersetzt, und alle unabhängigen Glieder unterdrückt werden.

Dieses System enthält also ebenfalls eine der Anzahl der Unbekannten $\binom{i}{\alpha}$, $\binom{1}{\alpha\alpha}$ gleiche Anzahl von Gleichungen, welche in Bezug auf jene von einander unabhängig sind. Folglich können diese Gleichungen nur dadurch befriedigt werden, dass man allgemein $\binom{i}{\alpha} = 0$, $\binom{1}{\alpha\alpha} = 0$, also namentlich für jedes i und α

$$u_{\alpha}^i = \frac{\partial x_i}{\partial x_{\alpha}}$$

setzt.

Wenn daher die Gleichungen $(G_4.)$ allein alle Unbekannten völlig bestimmen, und die ihnen genügenden Werthe derselben auch die aus $(G_4.)$ fließenden Gleichungen $(G_5.)$ befriedigen, so sind alle Integrabilitätsbedingungen erfüllt, so dass bei diesen Voraussetzungen die Gleichungen $(B.)$ überflüssig werden.

10.

Es bedarf nach dem Vorhergehenden keiner neuen Rechnung, um einzusehen, dass diese Folgerungen auch noch stattfinden, wenn alle Unbekannten durch die Gleichungssysteme (G_p) , (G_q) , (G_r) , ... ohne Widerspruch völlig bestimmt sind und zugleich den Gleichungen (G_{p+1}) , (G_{q+1}) , (G_{r+1}) , ... Genüge leisten, welche sich aus diesen nach art. 6. ergeben. In der Tat folgt dann aus jedem System (G_s) mit Rücksicht auf (G_{s+1}) ein Gleichungssystem $U_s = 0$, und es muss sich dann unter der Schaar von Gleichungen

$$U_p = 0, \quad U_q = 0, \quad U_r = 0, \quad \dots$$

eine Gruppe finden, welche ebenso viel Gleichungen enthält als Unbekannte vorhanden sind, und deren Determinante von Null verschieden ist.

Zu den Gleichungen, aus denen man die ursprünglichen Unbekannten x und u zu bestimmen hat, gehören in erster Linie die Transformationsrelationen $(F.)$ selbst; sie unterscheiden sich von den übrigen ausser ihnen zu verwendenden Gleichungssystemen, z. B. von den Gleichungen $(G_4.)$ dadurch, dass die aus ihnen nach art. 6. abzuleitenden Gleichungen identisch erfüllt sind, indem sich für $(i_1 i_2) = \omega_{i_1 i_2}$, $(i i_1 i_2) = 0$ ergab. Folglich erhalten wir den Lehrsatz:

Aus dem ursprünglichen Differentialausdrucke F leite man zunächst nach den artt. 5. und 7. die Form G_4 ab, und dann aus

dieser nach art. 6. die Formenreihe G_5, G_6 , u. s. w. Wenn alsdann durch die Transformationsrelationen, welche zu den Gleichungen

$$F = F', \quad G_4 = G_4', \quad G_5 = G_5', \quad \dots \quad G_p = G_p'$$

gehören, die Werthe der Unbekannten x und u ohne Widerspruch völlig bestimmt sind, und die nämlichen Werthe der Unbekannten auch noch den Transformationsrelationen Genüge leisten, welche sich aus der nächstfolgenden Gleichung

$$G_{p+1} = G_{p+1}'$$

ergeben, so sind zugleich alle für die Transformation von F in F' erforderlichen Integrabilitätsbedingungen erfüllt, und es wird allgemein

$$u_\alpha' = \frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha'}.$$

Durch diesen Lehrsatz, welcher in allen Fällen, wo er Anwendung findet, die Frage nach den Integrabilitätsbedingungen überflüssig macht, wird für die Anwendungen der algebraischen Invariantentheorie ein neues und fruchtbares Gebiet eröffnet.

In der That kommt bei der Anwendung dieses Satzes der Umstand nicht mehr in Betracht, dass die Grössen $\bar{\epsilon}x, \bar{\epsilon}x, \dots$ vollständige Differentiale bedeuten, sondern man hat $F, G_4, G_5, \dots$ nur noch als algebraische homogene Formen mit den Variabelnsystemen $\partial x, \partial x, \dots$ zu betrachten, unter der Voraussetzung, dass alle Variabelnsysteme der nämlichen linearen Substitution unterliegen.

Unter dieser Bedingung hat man nun, was aus rein algebraischen Gründen entschieden wird, die Reihe der aufeinanderfolgenden Formen $F, G_4, G_5, \dots$ soweit fortzusetzen, bis sie n absolute Invarianten und ebensoviel zugehörige Formen Ψ_i liefern, von denen die ersten in Bezug auf die Variabeln x , die letztern überhaupt von einander unabhängig sind. Sodann hat man noch für die um ein Glied weiter fortgesetzte Formenreihe $F, G_4, G_5, \dots$ ein vollständiges System von Invarianten $I, I_1, \dots$ zu ermitteln, welche in Bezug auf die Coefficienten dieser Formen von einander unabhängig sind.

Dann besteht das System aller für die Möglichkeit der Transformation von F in F' erforderlichen und ausreichenden Bedingungen in den Gleichungen

$$I' = r^\lambda I, \quad I_1' = r^{\lambda_1} I_1, \quad \dots,$$

wo r die Substitutionsdeterminante ist, und die Exponenten λ constante Werthe haben.

Es ist angemessen, diese Invarianten $I, I_1, \dots$ der hinreichend weit, aber nicht weiter als nöthig fortgesetzten Formenreihe $F, G_4, G_5, \dots$

auch als ein vollständiges System von Invarianten des Differentialausdruckes F zu bezeichnen.

Seien $U_1, U_2, \dots, U_n$ die Variablen in den ursprünglichen, $V_1, V_2, \dots, V_n$ dieselben in den transformirten zugehörigen Formen, so dass zur ursprünglichen Substitution

$$\partial x_i = \sum_a u_a^i \partial x'_a$$

die transponirte

$$V_a = \sum_i u_a^i U_i$$

gehört. Sind unter dieser Voraussetzung die Gleichungen zwischen den zugehörigen Formen die folgenden

$$\Psi_s'(V_1, V_2, \dots) = r^{\mu_s} \Psi_s(U_1, U_2, \dots),$$

für $s = 1, 2, \dots, n$ und constante Werthe der μ , so folgen, wenn unter Ω eine beliebige Function der ursprünglichen Variablen verstanden, und allgemein

$$U_i = \frac{\partial \Omega}{\partial x_i}$$

gesetzt wird, die Gleichungen

$$\Psi_s'\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x'_1}, \frac{\partial \Omega}{\partial x'_2}, \dots\right) = r^{\mu_s} \Psi_s\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}, \frac{\partial \Omega}{\partial x_2}, \dots\right).$$

Solche, eine willkürliche Function Ω enthaltende Ausdrücke

$$\Psi_s\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}, \frac{\partial \Omega}{\partial x_2}, \dots\right)$$

müssen als zugehörige Formen des Differentialausdruckes F bezeichnet werden.

Ebenso liefern die Covarianten des Systems $F, G_4, G_5, \dots, n$ Gleichungen

$$\Phi_i'(\partial x'_1, \partial x'_2, \dots) = r^{\nu_i} \Phi_i(\partial x_1, \partial x_2, \dots),$$

und die Differentialausdrücke

$$\Phi_i(\partial x_1, \partial x_2, \dots)$$

müssen als Covarianten des Differentialausdruckes F selbst bezeichnet werden.

11.

Um den Inhalt des im vorigen art. gefundenen Satzes genau festzustellen, muss hervorgehoben werden, dass die Bedingungen desselben nicht unter allen Umständen erfüllt werden können. Wenn es sich z. B. um die Frage handelt, ob zwei gegebene Oberflächen auf einander ohne Dehnung abgewickelt werden können, so hat man eine Gleichung $F = F'$ für $n = 2$ zu untersuchen. Wenn nun die Abwicklung einer

Fläche auf die andere, also die vorstehende Gleichung möglich ist, so wird man aus den in den Gleichungen $F = F'$, $G_4 = G'_4$, $G_5 = G'_5$, ... enthaltenen Transformationsrelationen, wie weit diese Reihe auch fortgesetzt werden mag, doch in denjenigen Fällen niemals bestimmte Werthe der x und u erhalten, wo die vorgelegten Flächen in sich selbst stetig verschoben werden können, weil in diesen Fällen die Transformationsrelationen, ohne Aenderungen der neuen Variabeln, stetige Aenderungen der ursprünglichen gestatten.

Es ist hiernach leicht, die Bedingungen für den allgemeinen Fall anzugeben, welcher der Verschiebbarkeit einer Fläche in sich selbst entspricht.

Das Grössengebiet der Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ wird ein bei unveränderlichem F in sich verschiebbares genannt, wenn durch das Resultat der Transformation von F die anzuwendende Substitution nicht völlig bestimmt ist. Es ist klar, dass die sämtlichen Bedingungen für das Stattfinden dieses Falles in identischen Gleichungen zwischen solchen Invarianten und zugehörigen Formen von F bestehen, welche unter den Voraussetzungen des vorigen art. von einander unabhängige Functionen der Variabeln x und u sind.

In diesem Falle werden die Integrabilitätsbedingungen nicht überflüssig, weil man allen Transformationsrelationen genügen kann, ohne die in art. 9. durch $\binom{i}{\alpha}$, $\binom{1}{\alpha\alpha}$ bezeichneten Ausdrücke gleich 0 zu setzen.

Für alle übrigen Fälle gilt das schöne, und aus der Natur der Sache keineswegs a priori zu erwartende Resultat, dass alle für die Möglichkeit der Transformation von F in F' nothwendigen und ausreichenden Bedingungen sich als Gleichungen zwischen Invarianten darstellen lassen, wenn dieser Ausdruck zur Bezeichnung der gleichen Formverhältnisse wie in der Algebra angewandt wird, und dass auch bei dem hier behandelten Transformationsproblem zugehörige Formen und Covarianten genau in derselben Bedeutung, wenn auch aus ganz anderer Quelle auftreten, wie bei den analogen algebraischen Problemen.

12.

Als Beispiel zur vorangehenden Theorie behandle ich den Fall $n = 3$, bei welchem sich merkwürdige Vereinfachungen darbieten.

Werden wie in Gleichung (20.) für $i_1 i_2$ ebenso wie für $k_1 k_2$ nur Combinationen ohne Wiederholung der Zahlen 123, also z. B. nur die Gruppen 23, 31, 12 genommen, so kann man die Transformationsrelationen (18.) von G_4 in die Form

$$(\beta_1 \beta_2 \gamma_1 \gamma_2)' = \sum (i_1 i_2 k_1 k_2) (u_{\beta_1}^{i_1} u_{\beta_2}^{i_2} - u_{\beta_2}^{i_1} u_{\beta_1}^{i_2}) (u_{\gamma_1}^{k_1} u_{\gamma_2}^{k_2} - u_{\gamma_2}^{k_1} u_{\gamma_1}^{k_2})$$

setzen.

Ich bestimme nun vier Zahlen β , γ , i und k durch die Bedingung, dass $\beta \beta_1 \beta_2$, $\gamma \gamma_1 \gamma_2$, $i i_1 i_2$ und $k k_1 k_2$ positive Permutationen der Zahlen 123 werden, so dass also gleichzeitig z. B.

$$\begin{aligned} \beta &= 1, & \beta_1 &= 2, & \beta_2 &= 3, \\ \text{oder } \beta &= 2, & \beta_1 &= 3, & \beta_2 &= 1, \\ \text{oder } \beta &= 3, & \beta_1 &= 1, & \beta_2 &= 2 \end{aligned}$$

wird. Man erkennt hieraus, dass auch umgekehrt durch den Werth von β sowohl β_1 als β_2 bestimmt ist.

Dies festgestellt, bezeichne ich die aus einer Aenderung von u_{α}^i hervorgehende Unterdeterminante von r durch r_{α}^i und setze, da $i_1 i_2$ sowie $k_1 k_2$ durch die Werthe von i und k völlig bestimmt sind,

$$(i_1 i_2 k_1 k_2) = A_{ik},$$

so dass nach (14.)

$$(a.) \quad \begin{cases} A_{11} = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial^2 \omega_{22}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \omega_{22}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \omega_{22}}{\partial x_2^2} \right) + \sum_{\alpha \beta} \frac{E_{\alpha \beta}}{E} ([\alpha]^{23} [\beta]^{23} - [\alpha]^{22} [\beta]^{33}) \\ A_{22} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \omega_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \omega_{11}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \omega_{11}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \sum_{\alpha \beta} \frac{E_{\alpha \beta}}{E} ([\alpha]^{11} [\beta]^{23} - [\alpha]^{12} [\beta]^{13}) \end{cases}$$

wird, woraus die übrigen durch zyklische Vertauschung von 123 folgen.

Dann nehmen die Transformationsrelationen von G_4 die einfache Form an:

$$(b.) \quad A'_{\beta \gamma} = \sum_{ik} A_{ik} r_{\beta}^i r_{\gamma}^k.$$

In ähnlicher Weise lassen sich die zu $F = F'$ gehörigen Transformationsrelationen, wie z. B. aus der zugehörigen Form von F hervorgeht, durch die folgenden ersetzen:

$$(c.) \quad E'_{\beta \gamma} = \sum_{ik} E_{ik} r_{\beta}^i r_{\gamma}^k.$$

Hierzu gehört die Bemerkung, dass wegen der Gleichungen (19.)

$$(d.) \quad A_{ki} = A_{ik}$$

ist und, was später zur Anwendung kommt, A_{ik} sein Zeichen wechselt, wenn i_1 und i_2 oder k_1 und k_2 mit einander vertauscht werden.

Die Gleichungen (b.) und (c.) sind hiernach nichts anderes als die Transformationsrelationen für die simultane Ueberführung der ternären quadratischen Formen

$$\Gamma = \sum_{ik} A_{ik} X_i X_k,$$

$$\Phi = \sum_{ik} E_{ik} X_i X_k$$

in die folgenden

$$\Gamma' = \sum_{ik} A'_{ik} \Xi_i \Xi_k,$$

$$\Phi' = \sum_{ik} E'_{ik} \Xi_i \Xi_k$$

mittels der linearen Substitution

$$(e.) \quad X_i = \sum_{\rho} r'_{\rho} \Xi_{\rho},$$

deren Determinante

$$R = r^2$$

ist, und zu welcher die inverse Substitution

$$(e'.) \quad \Xi_{\rho} = \sum_i \frac{1}{r} u'_{\rho} X_i$$

gehört.

Es ist bekannt, dass dieses Transformationsproblem ein bestimmtes ist, indem vier simultane Invarianten und drei zugehörige Formen existiren, welche in Bezug auf die Variablen der letztern und die Coefficienten von Γ , Φ von einander unabhängig sind. Daraus ergeben sich drei absolute Invarianten; wenn diese auch in Bezug auf die Variablen x_1, x_2, x_3 von einander unabhängig sind, so ist es nach dem Lehrsatz des art. 10. für die gegenwärtige Untersuchung nur noch nöthig, zu F und G_4 die nächstfolgende Form G_5 abzuleiten. Nun ist nach art. 6.

$$(g_{i_1 i_2 k_1 k_2}) = \frac{\partial (i_1 i_2 k_1 k_2)}{\partial x_{\rho}} - \sum_{\lambda} \left[\left\{ \begin{smallmatrix} g_{i_1} \\ \lambda \end{smallmatrix} \right\} (\lambda i_2 k_1 k_2) + \left\{ \begin{smallmatrix} g_{i_2} \\ \lambda \end{smallmatrix} \right\} (i_1 \lambda k_1 k_2) \right. \\ \left. + \left\{ \begin{smallmatrix} g_{k_1} \\ \lambda \end{smallmatrix} \right\} (i_1 i_2 \lambda k_2) + \left\{ \begin{smallmatrix} g_{k_2} \\ \lambda \end{smallmatrix} \right\} (i_1 i_2 k_1 \lambda) \right].$$

In dieser Summe hat man im ersten Gliede für λ nur die Werthe i_1 und i_2 zu nehmen, da $(i_2 i_2 k_1 k_2) = 0$ ist. Verfährt man ebenso bei den übrigen Gliedern, und vertauscht in den Fällen, wo $\lambda = i$ oder $= k$ gesetzt wird, diesen Index mit dem zugehörigen, so folgt zunächst

$$(g_{i_1 i_2 k_1 k_2}) = \frac{\partial (i_1 i_2 k_1 k_2)}{\partial x_{\rho}} - (i_1 i_2 k_1 k_2) \left[\left\{ \begin{smallmatrix} g_{i_1} \\ i_1 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} g_{i_2} \\ i_2 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} g_{k_1} \\ k_1 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} g_{k_2} \\ k_2 \end{smallmatrix} \right\} \right] \\ + \left\{ \begin{smallmatrix} g_{i_1} \\ i_2 \end{smallmatrix} \right\} (i_2 i_2 k_1 k_2) + \left\{ \begin{smallmatrix} g_{i_2} \\ i_1 \end{smallmatrix} \right\} (i_1 i_1 k_1 k_2) + \left\{ \begin{smallmatrix} g_{k_1} \\ i_2 \end{smallmatrix} \right\} (i_1 i_2 k_2 k) + \left\{ \begin{smallmatrix} g_{k_2} \\ i_1 \end{smallmatrix} \right\} (i_1 i_2 k k_1).$$

Nun sind $i_1 i_2 i$, $i_2 i_2 i$ und $k_1 k_2 k$, $k_2 k k_1$ zugleich mit $i i i_2$ und $k k_2 k_1$

positive Permutationen von 123; also folgt, wenn rechts in der Klammer des Subtrahenden noch $\left\{ \begin{smallmatrix} g^i \\ i \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} g^k \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ addirt wird:

$$(g i_1 i_2 k_1 k_2) = -\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_g} - 2 A_{ik} \sum_r \left\{ \begin{smallmatrix} g^r \\ r \end{smallmatrix} \right\} \\ + \left\{ \begin{smallmatrix} g^i \\ i \end{smallmatrix} \right\} A_{ik} + \left\{ \begin{smallmatrix} g^{i_1} \\ i_1 \end{smallmatrix} \right\} A_{i_1 k} + \left\{ \begin{smallmatrix} g^{i_2} \\ i_2 \end{smallmatrix} \right\} A_{i_2 k} + \left\{ \begin{smallmatrix} g^k \\ k \end{smallmatrix} \right\} A_{ik} + \left\{ \begin{smallmatrix} g^{k_1} \\ k_1 \end{smallmatrix} \right\} A_{i k_1} + \left\{ \begin{smallmatrix} g^{k_2} \\ k_2 \end{smallmatrix} \right\} A_{i k_2}.$$

Diesen durch die Werthe g, i, k völlig bestimmten Ausdruck bezeichne ich durch A_{gik} , so dass

$$(g i_1 i_2 k_1 k_2) = A_{gik},$$

und nach der leicht herzuleitenden Formel

$$2 \sum_r \left\{ \begin{smallmatrix} g^r \\ r \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial x_g} \\ (f.) \quad A_{gik} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_g} - \frac{A_{ik}}{E} \frac{\partial E}{\partial x_g} + \sum_k \left[\left\{ \begin{smallmatrix} g^k \\ i \end{smallmatrix} \right\} A_{ik} + \left\{ \begin{smallmatrix} g^k \\ k \end{smallmatrix} \right\} A_{i k} \right]$$

wird. Dieser Ausdruck hat die Eigenschaft, ungeändert zu bleiben, wenn i mit k , dagegen sein Zeichen zu wechseln, wenn i_1 mit i_2 oder k_1 mit k_2 vertauscht wird. In Folge dessen lassen sich die zu $G_5 = G'_5$ gehörigen Transformationsrelationen

$$A'_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{g i_1 i_2 k_1 k_2} A_{gik} u_\alpha^g u_{i_1}^{i_1} u_{i_2}^{i_2} u_{k_1}^{k_1} u_{k_2}^{k_2}$$

in die einfachere Form

$$(g.) \quad A'_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{gik} A_{gik} u_\alpha^g r_i^i r_j^j r_\gamma^k$$

bringen und führen nun zu einem weitem merkwürdigen Resultate.

Sind nämlich für die zugehörigen Formen von Γ und Φ $U_1 U_2 U_3$ die ursprünglichen, $V_1 V_2 V_3$ die neuen Variablen, so dass die entsprechende, zu (e.) transponirte Substitution wird

$$(h.) \quad V_\alpha = \sum_g r_\alpha^g U_g,$$

woraus durch Umkehrung

$$(h.) \quad U_g = \sum_\alpha \frac{1}{r} u_\alpha^g V_\alpha$$

folgt, so erhält man aus der Gleichung (g.), indem man mit $V_\alpha \Xi_\beta \Xi_\gamma$ multiplicirt und nach α, β, γ summirt:

$$\sum_{\alpha\beta\gamma} A'_{\alpha\beta\gamma} V_\alpha \Xi_\beta \Xi_\gamma = r \sum_{gik} A_{gik} U_g X_i X_k.$$

Da aber $r = R^\dagger$ eine Potenz der Substitutionsdeterminante ist, und in beiden Summen sowohl die Variablen der ursprünglichen als auch die der zugehörigen Formen vorkommen, so müssen dieselben

entsprechende simultane Zwischenformen sein, und wir können demnach den folgenden Lehrsatz aussprechen:

Um die für die Möglichkeit der Transformation eines ternären quadratischen Differentialausdruckes

$$F = \sum \omega_{ik} \partial x_i \partial x_k$$

in einen andern

$$F' = \sum \omega'_{ik} \partial x'_i \partial x'_k$$

erforderlichen und ausreichenden Bedingungen und, falls dieselben erfüllt sind, die Substitution zu erhalten, welche die verlangte Transformation leistet, bilde man mittelst der Coefficienten von F die drei algebraischen ternären Formen

$$\Gamma = \sum A_{ik} X_i X_k$$

$$\Phi = \sum E_{ik} X_i X_k$$

$$\Theta = \sum A_{gik} U_g X_i X_k,$$

und für F' in gleicher Weise die entsprechenden Formen Γ' , Φ' , Θ' mit den Variablen Ξ und V an Stelle von X und U .

Dann sind die verlangten Bedingungen genau die nämlichen, welche erforderlich sind und hinreichen, damit durch eine directe Substitution

$$X_i = \sum_a r'_a \Xi_a$$

Γ in Γ' , Φ in Φ' transformirt werde, und unter Voraussetzung der transponirten Substitution

$$V_a = \sum_i r'_i U_i$$

gleichzeitig Θ und Θ' entsprechende Zwischenformen werden, welche der Gleichung

$$\Theta' = R^{\frac{1}{2}} \Theta$$

genügen.

Dieser Satz findet jedoch nur unter der Voraussetzung statt, dass die sechs absoluten zugehörigen Formen und Invarianten von Γ , Φ von einander unabhängige Functionen der Variablen $x_1, x_2, x_3, U_1, U_2, U_3$ sind.

Ist diese Bedingung erfüllt, so erhält man aus den Gleichungen zwischen den ursprünglichen und transformirten Covarianten von Γ , Φ die Coefficienten $\frac{1}{r} u'_i$ der inversen Substitution, also da r durch die Invarianten bestimmt ist, u'_i selbst und zwar so, dass allgemein

$$u'_i = \frac{\partial x_i}{\partial x'_i}$$

wird.

Ist sie nicht erfüllt, so folgt statt des vorstehenden Satzes das Resultat, dass das Grössengebiet der Variablen x_1, x_2, x_3 ohne Aenderung von F stetig in sich verschoben werden kann.

Aus art. 10. folgt, dass unter den Voraussetzungen des vorstehenden Satzes alle für die Möglichkeit der Transformation von F in F' erforderlichen und ausreichenden Bedingungen sich mittelst der simultanen Invarianten dreier homogenen Formen F, G_4, G_5 und ihrer transformirten darstellen lassen. Dieses Resultat setzt ebenso wie der obige Satz voraus, dass bei der Elimination der Substitutionscoefficienten u'_α oder r'_α , aus welcher die in Rede stehenden algebraischen Grundformen hervorgehen, auf Integrabilitätsbedingungen zwischen denselben keinerlei Rücksicht genommen werde.

Nun ist oben gefordert, es sollen sich die Grössen A_{gik} durch die Coefficienten von Γ und Φ , und die Grössen A'_{gik} in der gleichen Weise durch die Coefficienten von Γ' und Φ' so ausdrücken lassen, dass 1) Θ eine simultane Zwischenform von Γ und Φ , 2) Θ' die nämliche simultane Zwischenform von Γ' und Φ' , und 3) $\Theta' = R^{\frac{1}{2}} \Theta$ wird. Der Exponent von R zeigt, dass diesen Bedingungen nicht genügt werden kann, wenn die Grössen A_{gik} rationale Functionen der Grössen A_{ik}, E_{ik} sind. Andererseits lassen sich diese Bedingungen sicher befriedigen, wenn F' nicht willkürlich gegeben, sondern aus F durch irgend eine Substitution, z. B. die identische $x_i = x'_i$ abgeleitet worden ist. Also haben wir den Satz:

Man kann für jeden ternären quadratischen Differentialausdruck F die in den Gleichungen (f.) eingeführten Grössen A_{gik} als irrationale Functionen der Coefficienten von Γ und Φ so darstellen, dass Θ eine simultane Zwischenform von Γ und Φ wird, die zu ihrer transformirten in der Beziehung $\Theta' = R^{\frac{1}{2}} \Theta$ steht.

Fügt man zu dieser die Gleichungen $\Gamma' = \Gamma, \Phi' = \Phi$ und

$$\Sigma \pm r_1^1 r_2^2 r_3^3 = R,$$

so erhält man 31 Transformationsrelationen, aus denen sich, obgleich die Variablen von Θ verschiedenen Substitutionen unterworfen sind, die 9 Substitutionscoefficienten r'_α so eliminiren lassen, dass alle Eliminationsresultate die Invariantenform

$$I' = R^{\frac{1}{2}} I$$

annehmen.

In dem Hauptfalle, wo durch das Resultat der Transformation von Γ und Φ die anzuwendende Substitution völlig bestimmt ist, gilt das Gleiche nothwendig auch von den drei Functionen Γ, Φ und Θ . Alsdann ist die Anzahl der von einander unabhängigen Invarianten

1) von Γ und Φ allein gleich 4, 2) von Γ , Φ und Θ zusammen gleich 22, also 3) die Anzahl derjenigen unter ihnen, welche nothwendig Coefficienten von Θ enthalten, gleich 18.

Nach der in art. 10. angewandten Ausdrucksweise hat also der Differentialausdruck F im gegenwärtigen Falle 22 Invarianten überhaupt und 21 absolute, ausserdem drei von einander unabhängige zugehörige Formen und ebenso viel Covarianten.

Ueber die beim vorigen Lehrsätze ausgeschlossenen Differentialausdrücke F , zu denen unter andern das Quadrat des Linienelementes im Raume von drei Dimensionen gehört, liegt eine Abhandlung aus dem Nachlasse Riemanns¹⁾ vor, zu welcher Herr Dedekind die dort unterdrückten analytischen Entwicklungen in Aussicht gestellt hat.

1) *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.* Abh. der Göttinger Ges. d. W. vom Jahre 1867, Band XIII. (Gesammelte Werke S. 254.)

3. Januar 1869.

XIX.

Ueber ein die Transformation homogener Differentialausdrücke zweiten Grades betreffendes Theorem.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 70, 1869, S. 241—245.)

Die Lehrsätze, welche ich im art. 10 meiner Abhandlung über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades (p. 46 dieses Bandes)*) bewiesen habe, setzen voraus, dass man die dort eingeführte Formenreihe $F, G_4, G_6, \dots$ soweit fortgesetzt habe, bis sie 1) n absolute Invarianten und 2) ebensoviel zugehörige Formen liefert, von denen die erstern in Bezug auf die ursprünglichen Variablen, die letztern überhaupt voneinander unabhängig sind. Von diesen beiden Bedingungen ist, wie ich seitdem bemerkt habe, die erste für das Stattfinden der erwähnten Sätze nicht bloss nothwendig, sondern auch hinreichend, so dass die zugehörigen Formen stets in der geforderten Zahl vorhanden sind, wenn n voneinander unabhängige absolute Invarianten existiren.

Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf einen Umstand, welcher bei der Auflösung linearer Gleichungen eintreten kann und der folgenden Anwendung wegen einer Erörterung bedarf. Derselbe besteht darin, dass ein System von linearen Gleichungen, welches nicht zur völligen Bestimmung aller Unbekannten hinreicht, gleichwohl unter Umständen für gewisse Unbekannten Werthe liefern kann, welche von jeder Unbestimmtheit frei sind.

Um die Bedingungen für diesen Fall darzustellen, sei A . ein System von $p + m$ oder mehr linearen Gleichungen mit den Unbekannten $y_1, y_2, \dots, y_{p+m}$ und den unabhängigen Gliedern $x_1, x_2, \dots$. Ich setze voraus, dass alle Determinanten dieses Systems, deren Ordnung $> p$ ist, gleich Null, aber die Determinanten p^{ter} Ordnung nicht alle gleich Null sind. Insbesondere sei diejenige Determinante p^{ter} Ordnung von Null verschieden und $= 1$, welche den Unbekannten $y_1, y_2, \dots, y_p$ in den Gleichungen entspricht, deren unabhängige Glieder $x_1, x_2, \dots, x_p$ sind (vergl. Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, zweite Auflage, §. 8, 3 und §. 4, 7).

*) S. 352 dieses Bandes.

Werden nun diese p Gleichungen nach $y_1, y_2, \dots, y_p$ aufgelöst, und die gefundenen Werthe in die übrigen Gleichungen eingesetzt, so fallen aus diesen (nach §. 3, 16 des angef. Werkes) auch die übrigen Unbekannten $y_{p+1}, y_{p+2}, \dots, y_{p+m}$ weg, und man erhält demnach einerseits die Werthe, welche den Grössen $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots$ beigelegt werden müssen, wenn das System A. keinen Widerspruch enthalten soll, während andererseits das Resultat folgt, dass die Unbekannten $y_1, y_2, \dots, y_p$ sich durch $y_{p+1}, y_{p+2}, \dots, y_{p+m}$ ausdrücken, diese letztern dagegen willkürlich bleiben.

Damit nun, was dem obigen Falle entspricht, z. B. y_1 einen Werth erhalte, der von jeder Unbestimmtheit frei ist, ist erforderlich und hinreichend, dass die m Determinanten p^{ter} Ordnung $= 0$ sind, welche aus A hervorgehen, wenn man jeden Coefficienten von y_1 durch den derselben Gleichung entnommenen Coefficienten einer der Unbekannten $y_{p+1}, y_{p+2}, \dots, y_{p+m}$ ersetzt, indem diese Ausdrücke bis aufs Zeichen die Coefficienten sind, mit denen diese Unbekannten im Ausdrucke von A $\cdot y_1$ multiplicirt sind.

1.

Ich will nun im Anschlusse an die artt. 9. 10. meiner oben erwähnten Abhandlung voraussetzen, es liege ein System von Gleichungen beliebiger Form

$$(1.) \quad \mathfrak{A} = 0$$

vor, in welchem zwei Gruppen von Unbekannten vorkommen, nämlich $x_1, x_2, \dots, x_n$ und $u'_1, u'_2, \dots, u_n^{(n)}$, und eine Gruppe von unabhängigen Variablen, nämlich $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$. Von diesem System werden folgende Eigenschaften vorausgesetzt:

- a) Das System (1.) liefere völlig bestimmte Werthe der Unbekannten x als Functionen der Variablen x' .
- b) Ob es auch zur Bestimmung der Unbekannten u ausreiche, bleibt dahingestellt.
- c) Dagegen soll, wenn man nach den unabhängigen Variablen differentiirt und hierauf

$$(2.) \quad \frac{\partial x_i}{\partial x'_a} = u_a^{(i)}, \quad \frac{\partial u_\beta^{(i)}}{\partial x'_a} = \varphi_{a\beta}^{(i)}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{x}')$$

einsetzt, ein Gleichungssystem

$$(3.) \quad \mathfrak{B} = 0$$

folgen, von welchem ich voraussetze, dass es durch die dem System (1.) genügenden bestimmten Werthe der x und irgend ein gleichzeitig genügendes System der u befriedigt wird.

Dann ergeben sich folgende Schlüsse. Wegen a) liefern die Gleichungen

$$(1') \quad \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x'_\alpha} = 0$$

völlig bestimmte Werthe für die Derivirten von $x_1, x_2, \dots, x_n$, während die Frage, ob die aus ihnen folgenden Werthe der Derivirten von $u'_1, u'_2, \dots$ ebenfalls von jeder Unbestimmtheit frei sind, nach b) dahingestellt bleiben muss.

Aus (1') eliminire man nun alle Derivirten mittelst der Gleichungen

$$(2') \quad \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} = u^{(i)}_\alpha + \binom{i}{\alpha}, \quad \frac{\partial u^{(i)}_\beta}{\partial x'_\alpha} = \varphi^{(i)}_{\alpha\beta}(x, u, x') + \binom{i}{\alpha\beta};$$

dann muss man, weil die Gleichungen (1') in den Derivirten linear sind, aus jeder von ihnen eine Gleichung von der Form $U + \mathfrak{B} = 0$ erhalten, wo $\mathfrak{B}$ dieselbe Bedeutung wie in (3.) hat, und U aus $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x'_\alpha}$

erhalten wird, wenn man allgemein $\frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha}$ durch $\binom{i}{\alpha}$, $\frac{\partial u^{(i)}_\beta}{\partial x'_\alpha}$ durch $\binom{i}{\alpha\beta}$ ersetzt und diejenigen Glieder weglässt, welche keine Derivirte enthalten. Da aber nach Voraussetzung c) stets $\mathfrak{B} = 0$ ist, so liefert jede Gleichung (1') eine neue Gleichung

$$(3') \quad U = 0,$$

welche sich von jener nur dadurch unterscheidet, dass alle unabhängigen Glieder unterdrückt sind, während die ursprünglichen Unbekannten $\frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha}$, $\frac{\partial u^{(i)}_\beta}{\partial x'_\alpha}$ durch andere, nämlich $\binom{i}{\alpha}$, $\binom{i}{\alpha\beta}$ ersetzt sind.

Diesem Gleichungssystem kann man daher genügen, indem man alle Unbekannten $= 0$ setzt. Da es aber für die Unbekannten $\binom{i}{\alpha}$ Werthe liefern muss, die keine Unbestimmtheit enthalten, so kann ihm auch nur dadurch genügt werden, dass man alle $\binom{i}{\alpha} = 0$ setzt. Wir haben daher den Satz:

- d) Wenn die obigen Voraussetzungen erfüllt sind, so sind auch die Unbekannten $u^{(i)}_\alpha$ des Gleichungssystems (1.), (3.) keiner Unbestimmtheit fähig, sondern es folgt allgemein

$$u^{(i)}_\alpha = \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha}.$$

2.

Dies festgestellt, betrachte ich noch einmal die Systeme von Transformationsrelationen, welche aus den Gleichungen $F = F'$,

$G_4 = G'_4$, $G_5 = G'_5$, ... hervorgehen. Nimmt man an, dass die zu den Gleichungen

$$(4.) \quad F = F', \quad G_4 = G'_4, \quad G_5 = G'_5, \quad G_p = G'_p$$

gehörigen Transformationsrelationen völlig bestimmte Werthe der ursprünglichen Variabeln x als Functionen der neuen Variabeln x' liefern, und dass diese, sowie irgend ein gleichzeitig genügendes System der u auch den in

$$(5.) \quad G_{p+1} = G'_{p+1}$$

enthaltenen Transformationsrelationen Genüge leisten, so folgt aus dem obigen Satze, dass allgemein

$$(6.) \quad u_a^{(i)} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_a},$$

also die Transformation von F in F' möglich ist.

Die Bedingungen hierfür ergeben sich wie folgt. Man betrachte die Gleichungen (4.) und (5.) als rein algebraische und bilde 1) ein vollständiges System voneinander unabhängiger absoluter Invarianten $I_1, I_2, \dots, I_\lambda$ des Formensystems

$$(a.) \quad F, G_4, G_5, \dots, G_p,$$

2) die absoluten Invarianten $I_{\lambda+1}, I_{\lambda+2}, \dots, I_l$, welche zu jenen gefügt werden müssen, um ein vollständiges System voneinander unabhängiger absoluter Invarianten der um ein Glied weiter fortgesetzten Formenreihe

$$(b.) \quad F, G_4, G_5, \dots, G_p, G_{p+1}$$

zu erhalten.

Dann ist für die Anwendbarkeit der obigen Schlüsse erforderlich und hinreichend, dass 1) unter den λ Invarianten der ersten Gruppe sich deren n , etwa $I_1, I_2, \dots, I_n$ befinden, welche in Bezug auf die Variabeln $x_1, x_2, \dots, x_n$ voneinander unabhängig sind, und dass 2) die Werthe der ursprünglichen Variabeln als Functionen der neuen, welche sich aus den Gleichungen $I_1 = I'_1, I_2 = I'_2, \dots, I_n = I'_n$ ergeben, auch den übrigen Gleichungen $I_a = I'_a$ der ersten Gruppe, soweit solche vorhanden sind, und allen Gleichungen $I_p = I'_p$ der zweiten Gruppe Genüge leisten. Sind nämlich diese Bedingungen erfüllt, so enthalten die aus (4.) und (5.) hervorgehenden Transformationsrelationen auch in Bezug auf die Werthe der Unbekannten u keinen Widerspruch, und es folgt nun mit Nothwendigkeit die Gleichung (6.). Mit Rücksicht darauf, dass bei diesen Untersuchungen vorausgesetzt ist, dass die Determinante von F nicht identisch $= 0$ ist, haben wir also den folgenden Satz:

Es seien F und F' zwei vollständige quadratische Differentialformen mit den Variabeln $x_1, x_2, \dots, x_n$ und $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$. Um zu untersuchen, ob die eine in die andere transformirt werden könne, bilde man die Formenreihe $F, G_4, G_5, \dots$ für F und die entsprechende für F' . Wenn alsdann unter den absoluten Invarianten von

$$(a.) \quad F, G_4, G_5, \dots, G_p,$$

als System von simultan zu transformirenden algebraischen Formen betrachtet, sich deren n befinden, welche in Bezug auf die Variabeln x voneinander unabhängig sind, ohne dass dies der Fall ist, wenn man G_p aus der Formenreihe weglässt, so bestehen die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen für die Möglichkeit der Transformation des Differentialausdruckes F in F' darin, dass die als algebraische betrachteten Formen

$$(b.) \quad F, G_4, G_5, \dots, G_p, G_{p+1}$$

durch übereinstimmende lineare Substitutionen gleichzeitig in

$$(b'.) \quad F', G'_4, G'_5, \dots, G'_p, G'_{p+1}$$

transformirt werden können, und diese Bedingungen werden daher durch die Gleichheit der entsprechenden absoluten Invarianten der Formenreihen (b.) und (b'.) vollständig ausgedrückt.

Wenn dagegen die algebraische Formenreihe (a.), wie weit sie auch fortgesetzt werden mag, niemals n absolute Invarianten liefert, welche in Bezug auf die Variabeln x voneinander unabhängig sind, so ist die Transformation von F in F' selbst in den Fällen, wo sie möglich ist, doch keine bestimmte,

weil in diesem Falle, wo die Invarianten allein zur Ermittlung der gesuchten Substitution nicht ausreichen, noch die Differentialgleichungen des Problems zu Hülfe genommen werden müssen, so dass die Substitution nothwendig verfügbare Elemente enthält, welche stetiger Aenderungen fähig sind.

Berlin, den 7. April 1869.

89041213927



b89041213927a

DATE DUE

MY 23 '08

SE 16 '82

DEMCO 38-297

Christoffel

LB

9046

Gesammelte

1

Math. Abhandlungen

DATE

ISSUED TO

LB

9046

1

DEMCO

89041213927



b89041213927a