

מתמטיקה לפיזיקאים

פרופ' שלמה הבלין

המחלקה לפיזיקה - אוניברסיטת בר-אילן

נובמבר 1998

דשון תשנ"ט

תוכן עניינים

נושא	עמוד	נושא	עמוד
1. קבוצות ומספרים.....	2	21. הדיפרנציאל השלם של פונקציה.....	178
2. פונקציות.....	9	22. נקודות קיצוניות של פונקציה בעלת	
3. מושג הגבול.....	19	שני משתנים.....	186
4. הגבול של פונקציה.....	22	23. טורי חזקות בשני משתנים.....	190
5. רציפות.....	30	24. החלפת משתנים.....	194
6. נגזרות.....	32	25. אנטגרלים כפולים.....	196
7. פונקציה עולה ויורדת		26. יעקוביאן.....	203
נקודות קיצוניות.....	52	27. אנטגרלים משולשים.....	208
8. דיפרנציאלים.....	59	28. קואורדינטות גליליות.....	211
9. חשבון אנטגרלי.....	61	29. אנליזה וקטורית.....	222 -
10. שיטות אנטגרליות.....	81	30. אנטגרלים קויים.....	234
11. האנטגרל המסויים.....	107	31. הדיברגנט.....	241 -
12. שמושים של אנטגרלים מסוימים.....	116	32. טורי פורייה.....	245
13. גזירה מתחת לסימון האנטגרל.....	119	33 ✓. משואות דיפרנציאליות - מבוא.....	257
14 ✓. אנטגרלים לא אמיתיים.....	121	34 ✓. משואות מסדר ראשון וממעלה ראשונה....	260
15. טורים אינסופיים.....	137	35 ✓. משואות לא ליניאריות.....	270
16. טורים עם אברים חיובים ושלילים....	151	36 ✓. משואות מדויקות.....	275
17. טורי חזקות.....	155	37 ✓. דוגמאות שימושיות למשואות ממעלה	
18. פתוח פונקציה לטור.....	162	ראשונה וסדר ראשון.....	279
19. פתוח פונקציה מורכבת לטור.....	167	38 ✓. משואות מסדר שני.....	281
20. נגזרות חלקיות.....	174		

נספחים:

מבחנים.....	306
סיכום.....	382

מתמטיקה לפיזיקאים

המתמטיקה היא השפה של כל המדעים. קורס זה אמור לתת לתלמיד בסיס מתמטי לצורך הבנת הפיזיקה וכל שטחי המדע. לצורך זה נביא בעיקר את החלק השימושי של המתמטיקה. נדלג בהרבה מקרים על הוכחות. נביא הוכחות רק באותם מקרים שהם הכרחיים להבנה ולהעמקה בנושא. נשים דגש רב על אינטואיציה מתמטית, תכונה החשובה מאוד לחוקרים במדעים השונים. ברצוני להודות לדי"ר מאיר לבקוביץ, נחמיה שוורץ ויוסי אשכנזי על הערותיהם המועילות.

ספרות:

- א. חשבון אינפיניטסימלי - פרנק איירס (Ayres) הוצאת סטימצקי.
- ב. חשבון אינפיניטסימלי מתקדם - שפיגל- הוצאת סטימצקי.
- ג. Advanced Calculus של Spiegel בהוצאת Schaum (זהו ספר טוב עם רקע מתמטי תאורטי רחב יותר. תורגם גם לעברית - סעיף ב' לעיל).
- ד. Piskunov - Differential and Integral Calculus. תורגם מרוסית לאנגלית. בארץ יצא בהוצאת Safrina.
- ה. Calculus, F. Sherwood & A. E. Taylor - NY Prentice-Hall.
- ו. Calculus, H.M. Bacon, McGraw-Hill.
- ז. Calculus, H.P. Greenspan and D.J. Benny, McGraw-Hill.
- ח. Mathematical Methods in the Physical Sciences, M.L.Boas, Wiley.
- ט. Calculus, Howard Anton (Princeton, 1997).

מתמטיקה לפיזיקאים

1. קבוצות ומספרים

1.1. קבוצות

מושג הקבוצה או אוסף עצמים בעלי תכונות נתונות הוא מושג יסודי במתימטיקה. למשל קבוצת כל הסטודנטים הלומדים פיסיקה. העצמים הבודדים של קבוצה קרויים **אברים** או **אלמנטים**.

כל חלק של קבוצה קרוי **תת-קבוצה** של הקבוצה הנתונה. למשל התלמידים הלומדים פיסיקה ומדעי המחשב הם תת קבוצה של קבוצת הלומדים פיסיקה. הקבוצה שאינה מכילה שום איבר נקראת **קבוצה ריקה** או קבוצת האפס.

1.2. מספרים ממשיים

המספרים הממשיים מתחלקים לפי הסוגים הבאים:

א. **מספרים טבעיים** - קבוצת המספרים $1, 2, 3, 4, \dots$ נקראת קבוצת המספרים הטבעיים או שלמים חיוביים. מספרים אלו משמשים לספירת אברי הקבוצה.

הסכום $a+b$ והמכפלה ab של שני מספרים טבעיים גם הם טבעיים. קבוצה המקיימת תכונה זו נקראת **סגורה** תחת פעולות החיבור והכפל.

ב. **שלמים שליליים ואפס** - קבוצת המספרים $0, -1, -2, -3, -4, \dots$ נקראת קבוצת השלמים והאפס. מספרים אלה הוגדרו על מנת לאפשר פתרון משוואות מהסוג $x+a=b$ כאשר a ו- b הם מספרים טבעיים כלשהם. לדוגמה עבור $a=5$ ו- $b=2$ אין פתרון למשוואה במסגרת המספרים הטבעיים ואז מגדירים: $x=b-a=2-5=-3$.

• קבוצת המספרים הטבעיים, השלמים השליליים והאפס נקראת קבוצת השלמים.

ג. **מספרים רציונליים** או שברים מוגדרים כמנה של שני מספרים שלמים כגון: $\frac{-3}{7}, \frac{2}{3}$.

מספרים אלה הוגדרו על מנת לאפשר פתרון של משוואות מהצורה $bx=a$ עבור כל a

ו- b שלמים (כאשר $b \neq 0$) ואנו כותבים $x = \frac{a}{b}$ כאשר a נקרא מונה ו- b נקרא מכנה.

קבוצת השלמים היא תת-קבוצה של המספרים הרציונליים, שכן השלמים מתאימים למספרים רציונליים עם $b=1$.

ד. **מספרים אי-רציונליים**. למשל $\sqrt{2}, \pi$ הם מספרים שאינם רציונליים - היינו שלא ניתן

להבינם כמנה $\frac{a}{b}$ כאשר a ו- b שלמים ו- $b \neq 0$.

• קבוצת המספרים הרציונליים והאי-רציונליים נקראת קבוצת המספרים הממשיים.

תרגיל: הוכח כי $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ אינם רציונליים!

1.3. הצגה עשרונית של מספרים ממשיים

כל מספר ממשי ניתן להצגה בצורה עשרונית. עבור מספר רציונלי הפיתוח העשרוני הוא סופי או אינסופי מחזורי דהיינו ספרה אחת או קבוצת ספרות חוזרת על עצמה החל ממקום מסוים.

לדוגמא: $\frac{1}{6} = 0.166666\dots = 0.16\overline{6}$

במקרה של מספר אי-רציונלי הפיתוח העשרוני הוא אינסופי ללא מחזוריות כלשהיא.

למשל: $\sqrt{2} = 1.414213562\dots$

הכתיבה העשרונית מנצלת 10 ספרות למשל: $365 = 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$. ישנן שיטות ספירה בעלות מספר שונה של ספרות. לדוגמא השיטה הבינרית משתמשת ב-2 ספרות בלבד - 0 ו-1.

למשל לפי הכתיבה הבינרית המספר 11011 משמעותו בכתיבה שלנו:

$$1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 27_{10}$$

$$27_{10} = 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 \text{ שזה גם:}$$

תרגיל: עבור מכתבה עשרונית לכתיבה בינרית של המספרים הבאים: 56, 63. עבור מכתבה בינרית לכתיבה עשרונית של המספרים הבאים: 101, 11.

1.4. קבוצות נקודתיות, אינטרוולים

קבוצת נקודות (מספרים ממשיים) הנמצאות על הישר הממשי קרויה **קבוצה נקודתית** חד

ממדי'ף. קבוצת הנקודות x המקיימות $a \leq x \leq b$ נקראת **אינטרוול סגור** ומסומנת $[a, b]$.

הקבוצה $a < x < b$ נקראת **אינטרוול פתוח** ומסומנת (a, b) . הקבוצות $[a, b)$ או $(a, b]$ קרויות אינטרוולים פתוחים למחצה או סגורים למחצה.

הסימן x היכול לייצג כל מספר בקבוצה נקרא **משתנה**. a ו- b **קבועים**.

1.5. מניה

קבוצה תיקרא **בת מניה** אם ניתן להתאים את איבריה בהתאמה חד חד ערכית לקבוצת מספרים הטבעיים. (לכל איבר מתאים מספר אחד ולהיפך).

דוגמה:

א. המספרים הטבעיים הזוגיים $2, 4, 6, 8, \dots$ מהווים קבוצה בת מניה עקב ההתאמה החד-חד ערכית הבאה:

2	4	6	8	...	הקבוצה הנתונה
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	
1	2	3	4	...	המספרים הטבעיים

ב. קבוצת המספרים הרציונליים בין 0 ו-1 (כולל 0 ו-1) היא בת מניה. נכתוב לפי הסדר הבא:

0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	...
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

כלומר נכתוב תחילה את כל השברים שמכניהם 2 ואח"כ את כל השברים שמכניהם 3 וכו'. כאשר שברים זהים נכתבים רק פעם אחת.

לכן קבוצת כל המספרים הרציונליים בין 0 ל-1 היא בת מניה.

קבוצה תיקרא **אינסופית** אם ניתן להתאימה בהתאמה חד חד ערכית עם תת קבוצה שלה. קבוצה אינסופית שהיא בת מניה תיקרא **אינסופית בת מניה**. קבוצת המספרים הרציונליים היא אינסופית בת מניה, בעוד קבוצת המספרים האי-רציונליים או כל המספרים הממשיים היא **אינסופית ואינה בת מניה**.

1.6. ערך מוחלט

הסימון $|a|$ נקרא ערך מוחלט של a ומשמעותו - אם $a > 0$ $|a| = a$, ואם

$$|a| = -a \quad a < 0$$

$$|7| = 7 \text{ לדוגמה:}$$

$$|-5| = 5$$

תרגיל: פתור משוואות ואי-שוויונים עם ערך מוחלט: $|x^2 - 7| = 2$, $|1 - x^2| \leq 3$.

1.14. שורשים של מספר מרוכב

מספר ω נקרא שורש n -י של Z אם $\omega^n = Z$ ואז אנחנו כותבים $\omega = Z^{\frac{1}{n}}$. על-סמך משפט דה-מואבר ניתן להראות שאם n הוא שלם וחיובי אזי

$$\begin{aligned}\omega = Z^{\frac{1}{n}} &= \left\{ R(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \right\}^{\frac{1}{n}} = \left\{ R[\cos(\vartheta + 2\pi k) + i \sin(\vartheta + 2\pi k)] \right\}^{\frac{1}{n}} = \\ &= R^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(\frac{\vartheta + 2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\vartheta + 2\pi k}{n}\right) \right]\end{aligned}$$

כאשר $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ שכן קיים $\omega^n = Z$. מכאן נובע שיש n ערכים שונים ל- $Z^{\frac{1}{n}}$. כלומר, ל- Z יש n שורשים n -ים שונים בתנאי ש- $Z \neq 0$. עבור $k = n$ מתקבל אותו שורש כמו $k = 0$, עבור $k = n+1$ מתקבל אותו שורש כמו $k = 1$, ולכן יש סך הכל n שורשים שונים!

דוגמאות:

1. חשב:

$$\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} \right)^{10}$$

$$1 + \sqrt{3}i = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

נכתוב בצורה קוטבית:

$$R = \sqrt{1+3} = 2$$

$$2 \cos \varphi = 1 \Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \pm 60^\circ$$

$$2 \sin \varphi = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$$

$$1 + \sqrt{3}i = 2(\cos 60 + i \sin 60)$$

$$1 - \sqrt{3}i = 2[\cos(-60) + i \sin(-60)]$$

$$\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{2(\cos 60 + i \sin 60)}{2[\cos(-60) + i \sin(-60)]} = \cos 120 + i \sin 120$$

$$Z^{10} = \cos 1200 + i \sin 1200 = \cos 120 + i \sin 120 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

בתחום הפיזיקה נוהגים לציין גודל של זווית באמצעות רדיאנים ולא באמצעות מעלות. רדיאן היא זווית במעגל שאורך הקשת שמולה שווה לרדיוס המעגל.

במעגל יש איפוא 2π רדיאנים, כלומר: $360^\circ = 2\pi_{rad}$.

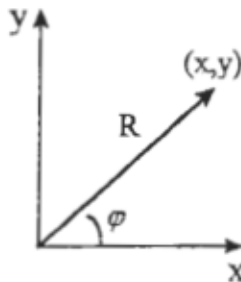
מכאן נובע:

$$180^\circ = \pi_{rad}; \quad 90^\circ = \left(\frac{\pi}{2}\right)_{rad}$$

באופן כללי:

$$\frac{\vartheta_{Rad}}{\vartheta_{Deg}} = \frac{2\pi}{360^\circ}$$

$$\left(\frac{360}{2\pi}\right)^\circ \approx 57.3^\circ = \text{רדיאן אחד}$$

1.13. הצורה הקוטבית של מספרים מרוכבים

כידוע, כל נקודה במישור הממשי ניתן לתאר ע"י זוג מספרים (x, y) הממוקמים במערכת צירים. מאחר וניתן לכתוב את המספר המרוכב $x + iy$ כזוג (x, y) , טכל להציג מספרים מרוכבים במישור XY שייקרא המישור המרוכב או דיאגרמת ארגנד (Argand).

איור 1.2

כמו-כן, ניתן לבטא את המספר המרוכב $x + iy$ באמצעות מרחק הנקודה מהראשית R והזווית φ שיוצר קו זה עם הצד החיובי של ציר x (ראה איור 1.2). ניתן לראות ש- $x = R \cos \varphi$ $y = R \sin \varphi$. כלומר המספר המרוכב z ניתן להכתב:

$$z = x + iy = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

כאשר R נקרא גודל המספר המרוכב $R = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy|$, ואילו φ נקראת המופע.

כתיבה זו נקראת הצורה הקוטבית או הפולארית של המספר המרוכב, ואילו R ו- φ הם הקואורדינטות הקוטביות.

נראה מהו היתרון בכתיבה זו של המספר המרוכב:

$$Z_1 = x_1 + iy_1 = R_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \quad \text{ניח כי}$$

$$Z_2 = x_2 + iy_2 = R_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \quad \text{וכן}$$

$$\begin{aligned} Z_1 \cdot Z_2 &= R_1 \cdot R_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \quad \text{נחשב:} \\ &= R_1 R_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) = \\ &= R_1 R_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \end{aligned}$$

כלומר, המכפלה מתבטאת בגודל השווה למכפלת $R_1 \cdot R_2$ ואילו המופע החדש הוא סכום

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{R_1}{R_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad \text{המופעים. באותה דרך קל לראות ש-}$$

וכן ניתן להוכיח באינדוקציה כי -

$$Z^n = \{R(\cos \varphi + i \sin \varphi)\}^n = R^n [\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)] \quad (1.1)$$

כאשר n מספר שלם.

ניתן גם להרחיב את ההוכחה ל- n מספר ממשי כלשהו.

המשוואה האחרונה נקראת משפט דה-מואבר.

1.10. משפט בולצנו וירשטרס (ללא הוכחה)

לכל קבוצה אינסופית וחסומה יש לפחות נקודת הצטברות אחת.

$$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4} \dots : \text{הסדרה, לדוגמה,}$$

1.11. מספרים אלגבריים וטרנסצנדנטיים - חלוקה אחרת של קבוצת המספרים הממשיים

היא חלוקה לתת-קבוצות: אלגבריים וטרנסצנדנטיים.

מספר ממשי x שהוא פתרון משוואה פולינומאלית

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

כאשר $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ הם שלמים, $a_n \neq 0$, וכן n טבעי, הוא מספר אלגברי.

n - דרגת המשוואה

מספר שאינו יכול להיות מבוטא כפתרון של משוואה פולינומאלית קרוי מספר טרנסצנדנטי.

$$\text{דוגמאות: } 5x - 7 = 0 \quad x = \frac{7}{5} \text{ מספר אלגברי}$$

$$x^2 - 2 = 0 \quad x = \sqrt{2} \text{ מספר אלגברי}$$

משפט: המספרים הרציונליים הם תת-קבוצה של קבוצת המספרים האלגבריים.

הוכחה: המספרים הרציונליים הם פתרונות של המשוואה האלגברית $a_1 x + a_0 = 0$

ניתן להוכיח שהמספרים π ו- e הם טרנסצנדנטיים. לא ידוע עדיין אם מספרים מסוימים הם אלגבריים, למשל πe .

ניתן להוכיח שקבוצת המספרים האלגבריים היא אינסופית בת מניה, וקבוצת המספרים הטרנסצנדנטיים היא אינסופית ואינה בת מניה.

1.12. מספרים מרוכבים:

נתבונן במשוואה $x^2 + 1 = 0$. מכיוון שאין שום מספר ממשי המקיים משוואה זו או משוואות דומות, הוסיפו למתמטיקה את קבוצת המספרים המרוכבים.

למספר מרוכב הצורה $a + ib$ כאשר a ו- b הם מספרים ממשיים הקרויים החלק הממשי והחלק המדומה, ו- $i = \sqrt{-1}$ הוא היחידה המדומה.

שני מספרים מרוכבים $a + ib$ ו- $c + id$ שווים אם ורק אם $a = c$ ו- $b = d$.

אין הגדרת אי-שוויונים במספרים מרוכבים.

נוכל לראות את המספרים הממשיים כתת-קבוצה של המרוכבים כאשר $b = 0$.

$$\text{הערך המוחלט של } a + ib \text{ מוגדר כ- } |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

שים לב: אם $b = 0$ הערך המוחלט מקבל אותה הגדרה כמו במספרים ממשיים.

הצמוד המרוכב של $z = a + ib$ מוגדר כ- $a - ib$ ומסומן ב- $\bar{z}$ או z^* .

נהוג לסמן מספר מרוכב גם בצורה הבאה: (a, b) .

את פעולות החשבון במספרים מרוכבים מבצעים כמו באלגברה של מספרים ממשיים, כאשר מציבים $i^2 = -1$ בכל מקום שזה דרוש.

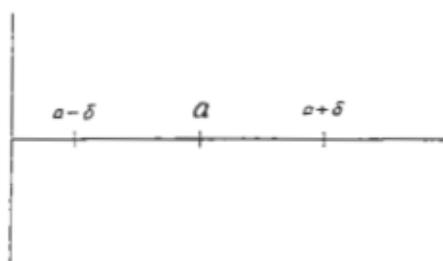
$$(8 + 7i) - (15 - 9i) = -7 + 16i$$

דוגמאות:

$$(3 - 2i)(1 + 2i) = 3 - 2i + 6i - 4i^2 = 7 + 4i$$

$$\frac{-3 + 2i}{1 + 4i} = \frac{(-3 + 2i)(1 - 4i)}{(1 + 4i)(1 - 4i)} = \frac{-3 + 2i + 12i + 8}{1 + 16} = \frac{5 + 14i}{17} = \frac{5}{17} + \frac{14}{17}i$$

$$|8 - 7i| = \sqrt{8^2 + 7^2} = \sqrt{64 + 49} = \sqrt{113}$$



1.7. סביבות - קבוצת כל הנקודות x המקיימות

$|x - a| < \delta$ כאשר $\delta > 0$ קרויה **סביבת** δ של הנקודה a . קבוצת כל הנקודות x המקיימות $0 < |x - a| < \delta$ ובה לא מופיעה הנקודה $x = a$ קרויה **סביבת** δ משמטת של a .

איור 1.1

1.8. נקודת הצטברות

נקודת הצטברות או נקודת גבול של קבוצת מספרים היא הנקודה L כאשר בכל סביבת δ משמטת של L ישנם איברים של הקבוצה. כלומר, לכל $\delta > 0$, קטן כרצוננו, נוכל תמיד למצוא איבר x של הקבוצה שאינו L אבל מקיים $|x - L| < \delta$. לקבוצה סופית אין נקודת גבול. לקבוצה אינסופית אין בהכרח נקודת גבול. למשל, לקבוצת המספרים הטבעיים אין נקודת גבול, ולקבוצת המספרים הרציונליים יש אינסוף נקודות גבול. קבוצה המכילה את כל נקודות הגבול שלה נקראת **קבוצה סגורה**.

1.9. חסמים

אם עבור המספרים x בקבוצה ישנו מספר M כך ש $x \leq M$ לכל x אנו אומרים שהקבוצה **חסומה מלמעלה** ו- M נקרא **חסם מלעיל**. באופן דומה, אם $x \geq m$ לכל x , הקבוצה חסומה מלמטה ו- m הוא **חסם מלרע**. אם לכל x קיים $m \leq x \leq M$, הקבוצה נקראת **חסומה**. אם M הוא מספר כזה שהוא חסם מלעיל אבל יש לפחות איבר אחד הגדול מ- $M - \varepsilon$ לכל $\varepsilon > 0$ וקטן כרצוננו אזי M יקרא **חסם עליון** של הקבוצה. באופן דומה אם אין בקבוצה איבר קטן מ- m אולם לפחות איבר אחד קטן מ- $m + \varepsilon$ לכל $\varepsilon > 0$ יקרא m **חסם תחתון** של הקבוצה. **דוגמה:**

א. הוכח כי קבוצת המספרים האינסופית: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots$ היא חסומה.

מאחר וכל איברי הקבוצה קטנים מ-2 וגדולים מ-1 (למשל) הסדרה חסומה. 2 הוא חסם מלעיל ו-1 הוא חסם מלרע.

חסמים נוספים: חסם מלעיל - $1, \frac{3}{2}$ חסם מלרע - $0, -\frac{1}{2}$

ב. קבע את החסם העליון ואת החסם התחתון של הקבוצה הנ"ל. מכיוון שאין איבר של הקבוצה שהוא גדול מ-1 ומאחר ויש לפחות איבר אחד (היינו 1) העולה על $1 - \varepsilon$ לכל ε חיובי, לכן 1 יהיה חסם עליון של הקבוצה. מכיוון שאין איבר של הקבוצה שהוא קטן מ-0 ומאחר ויש לפחות איבר אחד של הקבוצה שהוא קטן מ- $0 + \varepsilon$ (תמיד נוכל לבחור איבר $\varepsilon < \frac{1}{n}$ או $\frac{1}{n} < \varepsilon$) אנו רואים ש-0 הוא החסם התחתון של הקבוצה.

ג. הוכח כי 0 היא נקודת הצטברות של הסדרה. ע"מ להוכיח ש-0 היא נקי הצטברות של הסדרה צריך להוכיח שלכל $\delta > 0$ קיים x ו- $|x - 0| < \delta$ ואמנם, לכל δ שנבחר נוכל למצוא $x = \frac{1}{n} < \delta$ (עבור $n > \frac{1}{\delta}$ קיים הנ"ל) ולכן 0 היא נקודת הצטברות של הקבוצה. במלים אחרות, בכל סביבת δ משמטת של 0 יש איברים של הקבוצה לכל $\delta > 0$ קטן כרצוננו.

ד. האם הקבוצה הנ"ל סגורה? הקבוצה איננה סגורה שכן נקודת ההצטברות 0 אינה שייכת לקבוצה.

2. חשב את הערכים של $w^5 = Z = -32$:

בצורה הקוטבית-

$$w^5 = -32 = 32(\cos \pi + i \sin \pi)$$

לפי משפט דה-מואבר-

$$w = (-32)^{1/5} = 32^{1/5} \left[\cos \left(\frac{\pi + 2\pi k}{5} \right) + i \sin \left(\frac{\pi + 2\pi k}{5} \right) \right]$$

$$w_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right)$$

$$k = 0$$

$$w_2 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5} \right)$$

$$k = 1$$

$$w_3 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{5} + i \sin \frac{5\pi}{5} \right) = -2$$

$$k = 2$$

$$w_4 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{5} \right)$$

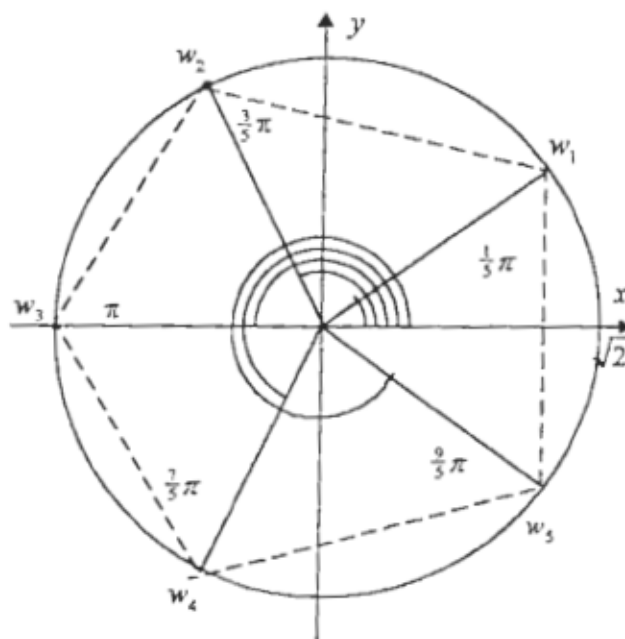
$$k = 3$$

$$w_5 = 2 \left(\cos \frac{9\pi}{5} + i \sin \frac{9\pi}{5} \right)$$

$$k = 4$$

עבור $k = 5, 6, \dots$ נחזור על אותם ערכים שכבר קיבלנו ולכן אלו הם הפתרונות או השורשים היחידים של המשוואה הנתונה.

אם נטאר את ערכי הפתרונות במישור המרוכב, נקבל את התיאור הבא:



שים לב שהנקודות $w_1, \dots, w_5$ נמצאות על קדקודי מחומש משוכלל.

איור 1.3

2. פונקציות

2.1. פונקציה וגרף

פונקציה היא כלל או חוק המתאים אברים של קבוצה אחת לאברים של קבוצה אחרת. אנו נוטל אך ורק בקבוצות של מספרים ממשיים. נסמן ב- x משתנה היכול לקבל ערכים בין $-\infty$ עד ∞ (לאו דווקא את כולם). אזי, אם לכל ערך שיכול לקבל משתנה x מתאים ערך אחד או יותר של משתנה y אנו אומרים ש- y היא פונקציה של x וכותבים $y = f(x)$.

x נקרא משתנה בלתי תלוי.

y נקרא משתנה תלוי.

קבוצת הערכים של x יכול לקבל קרויה תחום ההגדרה של הפונקציה. אם לכל ערך של x מתאים y יחיד הפונקציה נקראת חד-ערכית. אם לערכי x מסוימים מתאימים יותר מערך אחד של y הפונקציה נקראת רב-ערכית. אנו נעסוק בפונקציות חד-ערכיות אלא אם כן נציין אחרת.

דוגמאות

א. הפונקציה $y = -5x^3 + 16$ מוגדרת לכל x תחום ההגדרה הוא איפוא כל המספרים הממשיים.

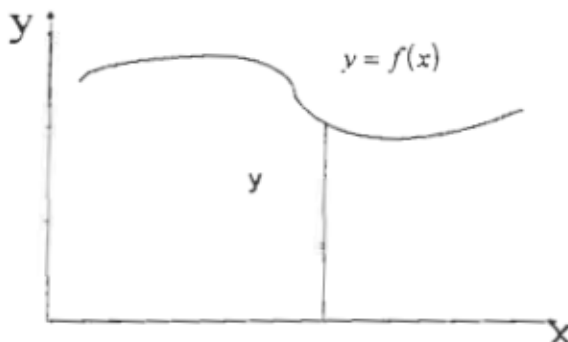
ב. נטונה הפונקציה $y = \sqrt{x^2 - 5}$, עבור פונקציה זו תחום ההגדרה (במסגרת המספרים הממשיים) הוא $x \geq \sqrt{5}$ ו- $x \leq -\sqrt{5}$.

ג. הפונקציה $y^2 = x$ מוגדרת לכל $0 \leq x$. לכל x חיובי, יש שני ערכי y , ולכן y היא פונקציה דו-ערכית. נוכל להפריד אותה ל-2 פונקציות חד-ערכיות: $f(x) = +\sqrt{x}$ ו- $g(x) = -\sqrt{x}$.

ד. פונקציה אינה חייבת להיות מתוארת ע"י נוסחה. היא יכולה למשל להיות מתוארת בצורת טבלה. למשל טבלת חמום מים:

זמן בדקות - t	0	1	2	3	4
טמפרטורה - T	27°C	28°C	30°C	34°C	39°C

הצגה גרפית של פונקציה



אוסף הנקודות במישור (x, y) המתקבלות ע"י הפונקציה $y = f(x)$: $[x, f(x)]$ נקרא הגרף של הפונקציה, ראה איור 2.1.

איור 2.1: גרף של פונקציה

2.2. פונקציות חסומות

א. אם יש קבוע M כך ש- $f(x) \leq M$ לכל x באינטרוול נאמר ש- $f(x)$ חסומה מלמעלה באינטרוול ונקרא ל- M חסם מלעיל של הפונקציה.

ב. אם קיים קבוע m כך ש- $f(x) \geq m$ לכל x באינטרוול נאמר ש- $f(x)$ חסומה מלמטה באינטרוול ונקרא ל- m חסם מלרע של הפונקציה.

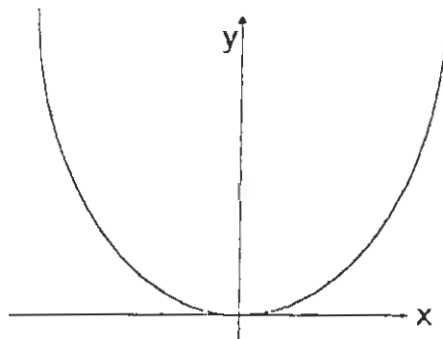
ג. אם קיים $m \leq f(x) \leq M$ לכל x באינטרוול נאמר ש- $f(x)$ חסומה.

דוגמה: $f(x) = x - 5$ חסומה באינטרוול $-2 \leq x \leq 2$. חסם מלעיל הוא -3 (או כל מספר גדול ממנו), חסם מלרע הוא -7 (או כל מספר קטן ממנו). אולם הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$ אינה חסומה באינטרוול $0 < x < 4$ שכן עי" בחירת x מספיק קרוב לאפס, ניתן להגדיל את $f(x)$ כרצוננו ואין חסם מלעיל. לעומת זאת $\frac{1}{4}$ הוא חסם מלרע.

אם ל- $f(x)$ יש חסם מלעיל, יש לה גם חסם עליון, אם יש לה חסם מלרע יש לה גם חסם תחתון. (ראה סעיף 1.9).

2.3. פונקציות הפוכות ערך ראשי

אם $y = f(x)$ ונסמן $x = f^{-1}(y)$, אזי x הוא פונקציה של y שנסמנה $x = f^{-1}(y)$. אם



איור 2.2

נחליף בין x ל- y נקבל את הפונקציה $y = f^{-1}(x)$ הנקראת הפונקציה ההפוכה. לדוגמה - אם הפונקציה היא $y = 3x - 4$, הרי שהפונקציה $x = \frac{y+4}{3}$ היא פונקציה זהה. את הפונקציה ההפוכה נקבל אם נחליף בין x ל- y , זהיו: $y = \frac{x+4}{3}$.

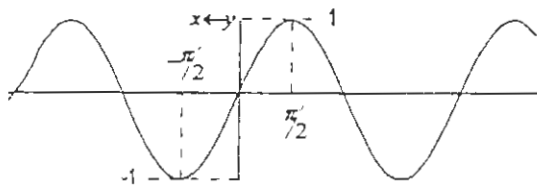
אם הפונקציה $f(x)$ היא חד-ערכית, עשויה הפונקציה ההפוכה $f^{-1}(x)$ להיות רב-ערכית.

למשל: הפונקציה $y = x^2$ (איור 2.2) ניתנת להכתב

כ- $x = \pm\sqrt{y}$ והפונקציה ההפוכה היא $y = \pm\sqrt{x}$, כלומר היא רב ערכית.

במקרה זה ניתן לראות את הפונקציה ההפוכה כאוסף של פונקציות חד-ערכיות שכל אחת מהן קרויה ענף. בדרך כלל בוחרים את אחד הענפים וקוראים לו ענף ראשי, ואותו מסמנים ב- $f^{-1}(x)$. ערך הפונקציה ההפוכה נקרא ערך ראשי.

לדוגמה: הפונקציה $y = \sin x$ הפונקציה ההפוכה היא $y = \sin^{-1} x$ שהיא רב-ערכית שכן לכל x באינטרוול $-1 \leq x \leq 1$ יש ערכים רבים ל- y (ראה איור 2.3).



איור 2.3

לו היינו מגבילים את הפונקציה $\sin^{-1} x$ להיות כזו ש- $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$, למשל, הפונקציה תהפוך לחד-ערכית.

במקרה זה הערך הראשי של $\sin^{-1}(\frac{1}{2})$ יהיה $\frac{\pi}{6}$ ושל $\sin^{-1}(0)$ יהיה 0.

2.4. סוגי פונקציות

באנלוגיה לחלוקת המספרים הממשיים לקבוצות מחלקים גם את סוגי הפונקציות לקבוצות.
א. פונקציות פולינומיאליות

הפונקציה

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (2.1)$$

נקראת פונקציה פולינומיאלית כאשר $a_0, a_1, \dots, a_n$ קבועים ו- n טבעי הנקרא דרגת הפולינום אם $a_n \neq 0$.
ישנו משפט באלגברה הנקרא "המשפט היסודי של האלגברה": "לכל פולינום יש לפחות שורש אחד" כלומר ישנו לפחות - פתרון אחד של המשוואה $f(x) = 0$, פתרון כזה נקרא שורש המשוואה.
בהסתמך על משפט זה מוכיחים שאם דרגת המשוואה היא n יש למשוואה בדיוק n שורשים, במסגרת קבוצת המספרים המרוכבים.

ב. פונקציות אלגבריות

פונקציות אלגבריות הן פונקציות $y = f(x)$ המקיימות משוואה מהטיפוס:

$$P_n(x)y^n + P_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + P_1(x)y + P_0(x) = 0 \quad (2.2)$$

כאשר $P_0(x), \dots, P_n(x)$ הם פולינומים ב- x .
אם ניתן לבטא את הפונקציה, y , כמנה של שני פולינומים - הפונקציה נקראת אלגברית רציונלית. אחרת היא נקראת אלגברית אי-רציונלית.
שים לב: קבוצת הפונקציות הפולינומיאליות היא קבוצה חלקית לאלגבריות רציונליות שהיא בעצמה קבוצה חלקית לאלגבריות.

דוגמה: נבדוק האם $f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{x+1}$ כאשר $x \neq -1$ היא פונקציה אלגברית:

$$(x+1)y - 1 = \sqrt{x} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{x}+1}{x+1}$$

נעלה בריבוע את שני האגפים: $(x+1)^2 y^2 - 2(x+1)y + 1 = x$

$$(x+1)^2 y^2 - 2(x+1)y + 1 - x = 0 \quad \text{ונקבל:}$$

כלומר קיבלנו משוואה פולינומיאלית ב- y כאשר המקדמים הם פולינומים ב- x . כלומר הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אלגברית. אולם מכיוון שאינה ניתנת לכתיבה כמנה של שני פולינומים היא פונקציה אלגברית אי-רציונלית.
הערה: שים לב לדמיון ההגדרה למספרים רציונליים ואירציונליים.

ג. פונקציות טרנסצנדנטיות

פונקציות טרנסצנדנטיות הן פונקציות שאינן מקיימות את המשוואה (2.2) לעיל.

2.5. דוגמאות לפונקציות פולינומיות

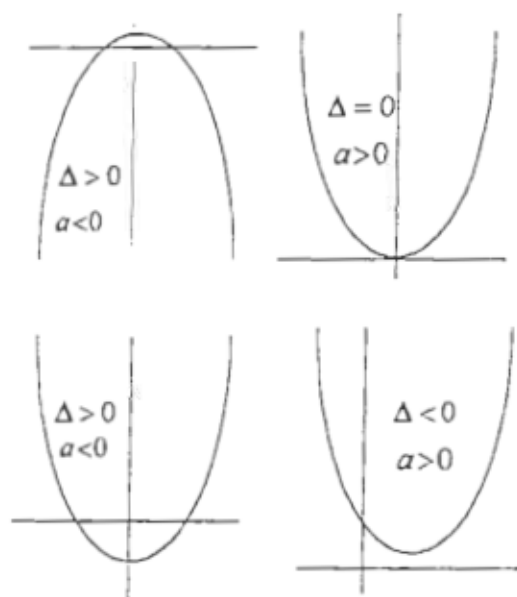
- משוואת ישר: $y = ax + b$, כאשר a הוא שפוע הישר ו- b נקודת החיתוך של הישר עם ציר y . צורות אחרות של הישר: $y - y_1 = a(x - x_1)$, זוהי משוואת ישר ששפועו a ועובר דרך הנקודה (x_1, y_1) .

המשוואה $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ היא משוואת ישר שעובר דרך הנקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) .

- משוואת פרבולה: $y = ax^2 + bx + c$. נקודת חתך ציר y ע"י הצבה $x = 0$, וציר x ע"י פתרון המשוואה $y = 0$. אם $a > 0$ יש לפרבולה נקודת מינימום. אם $a < 0$ יש לה נקודת מקסימום. הסבר: אם $a > 0$ הפונקציה שואפת לאינסוף עבור $x \rightarrow \pm\infty$, ולכן אם יש נקודה קיצונית היא חייבת להיות מינימום, ואם $a < 0$ הפונקציה שואפת ל- $-\infty$, ולכן אם יש נקודה קיצונית היא חייבת להיות מקסימום, ראה איור 2.4.

נגדיר $\Delta = b^2 - 4ac$, הנקרא **דיסקרימיננטה**. אם $\Delta > 0$ הפרבולה חותכת את ציר x פעמיים. אם $\Delta = 0$ הפרבולה משיקה לציר x (מלמעלה או מלמטה). ואם $\Delta < 0$ הפרבולה אינה חותכת את ציר x כלל. קואורדינטת x של נקודת הקיצון של הפרבולה הן:

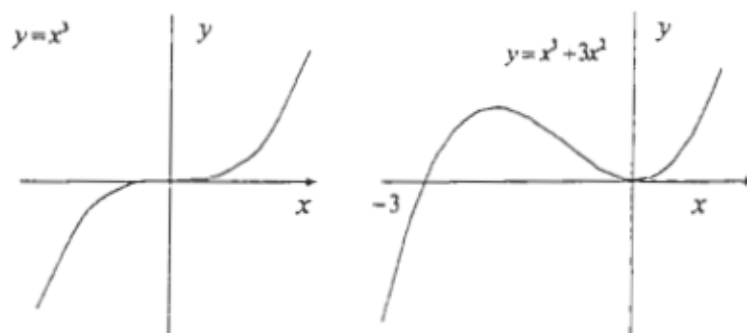
$$x_m = -\frac{b}{2a}, \text{ וע"י הצבה ניתן להגיע ל-} y.$$



איור 2.4 : צורות של פרבולות

- משוואה ממעלה שלישית: $y = x^3$ או באופן כללי $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. הפונקציה שואפת לאינסוף כאשר x שואף לאינסוף: $y_{(x \rightarrow \infty)} = \pm\infty$ (סימן ה- $\pm$ הוא בהתאם לסימן של המקדם a של y^3) ולכן גם: $y_{(x \rightarrow -\infty)} = \mp\infty$ (ושוב - לפי סימנו של a).

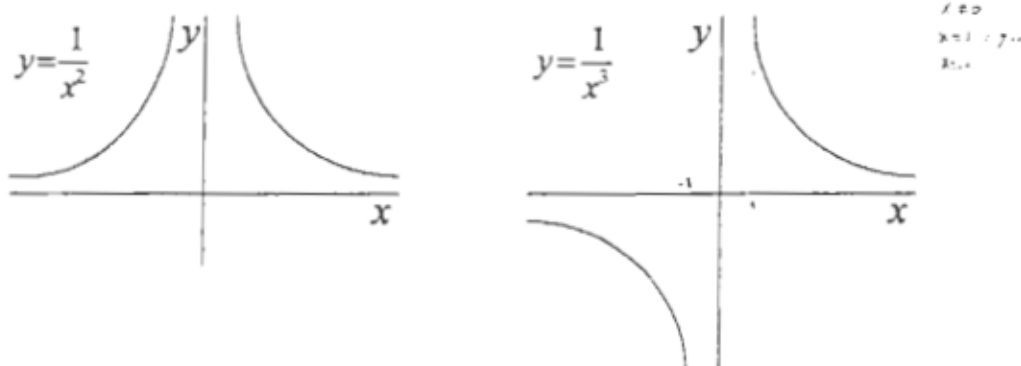
למשל:



איור 2.5: צורות של משוואות ממעלה שלישית

2.6. דוגמאות לפונקציות אלגבריות

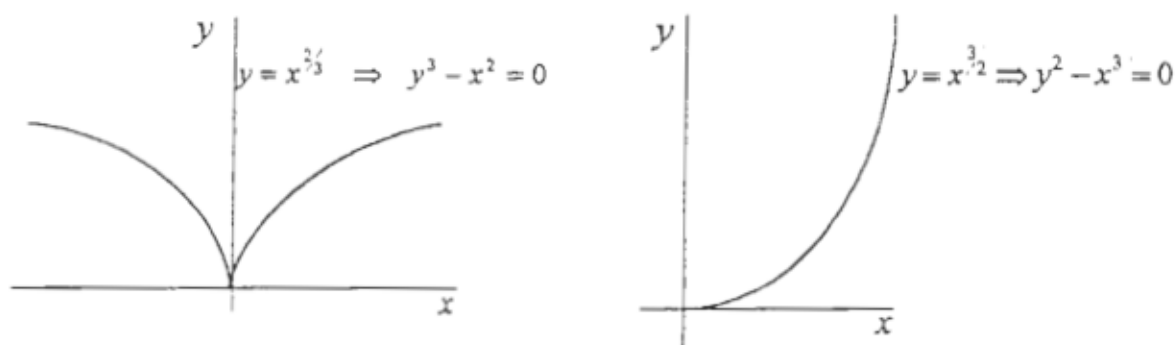
באיור 2.6 מובאות שתי דוגמאות לפונקציות אלגבריות רציונליות.



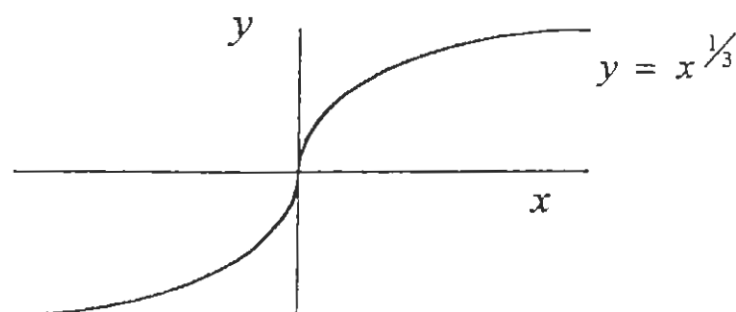
איור 2.6 : דוגמאות לפונקציות אלגבריות רציונליות

אלה פונקציות אלגבריות רציונליות.

באיור 2.7 נראה דוגמאות לפונקציות אלגבריות אי-רציונליות:



איור 2.7: דוגמאות לפונקציות אלגבריות אי-רציונליות



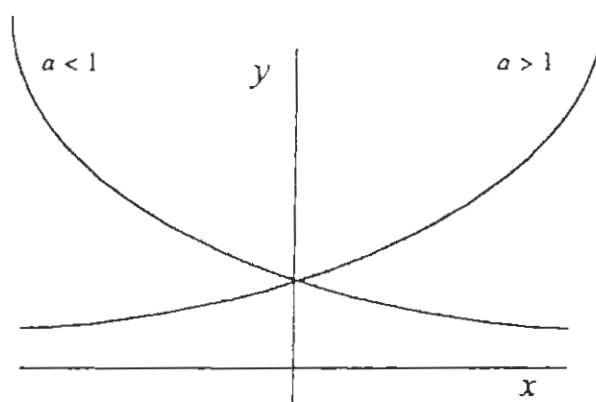
איור 2.7: דוגמאות לפונקציות אלגבריות אירציאנליות

2.7 דוגמאות לפונקציות טרנסצנדנטיות

להלן נביא מספר דוגמאות לפונקציות שאינן אלגבריות דהיינו טרנסצנדנטיות.

א. הפונקציה המעריכית: $f(x) = a^x$ כאשר מתקיים $a > 0$ $a \neq 1$.

פונקציה זו מוגדרת לכל ערך של x ותאורה הגרפי:



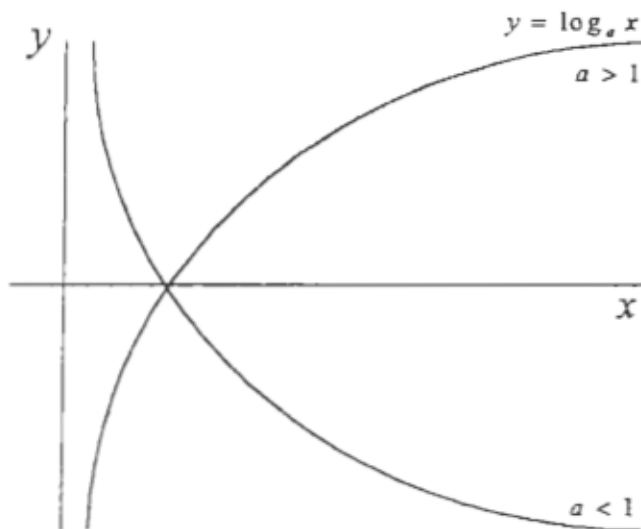
איור 2.8: הפונקציה המעריכית

ב. הפונקציה הלוגריתמית: $f(x) = \log_a x$ כאשר $a > 0$ $a \neq 1$

פונקציה זו והפונקציה המעריכית הן הפוכות זו לזו: שהרי $y = \log_a x \Rightarrow x = a^y$

והפונקציה ההפוכה היא $y = a^x$.

תאורה הגרפי:



איור 2.9: הפונקציה הלוגריתמית.

אם הבסיס הוא $a = e = 2.71828...$ שהוא בסיס הלוגריתמים הטבעי אזי כותבים

$f(x) = \log_e x \equiv \ln x$, והוא נקרא הלוגריתמוס הטבעי של x .

ג. הפונקציות הטריגונומטריות

נוסחאותיהן:

$$y = \sin x \quad y = \cos x$$

$$y = \tan x \equiv \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad y = \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

בד"כ נהוג לבטא את המשתנה x ברדיאנים. לקשרים טריגונומטרים נוספים ראה דף

נוסחאות בסוף הספר.

כל הפונקציות הטריגונומטריות הן מחזוריות. נביא הגדרה כללית לפונקציה מחזורית.

הגדרה: הפונקציה $y = f(x)$ תקרא מחזורית אם קיים קבוע c שכאשר נוסיף אותו לארגומנט

x לא ישתנה ערך הפונקציה; כלומר: $f(x + c) = f(x)$.

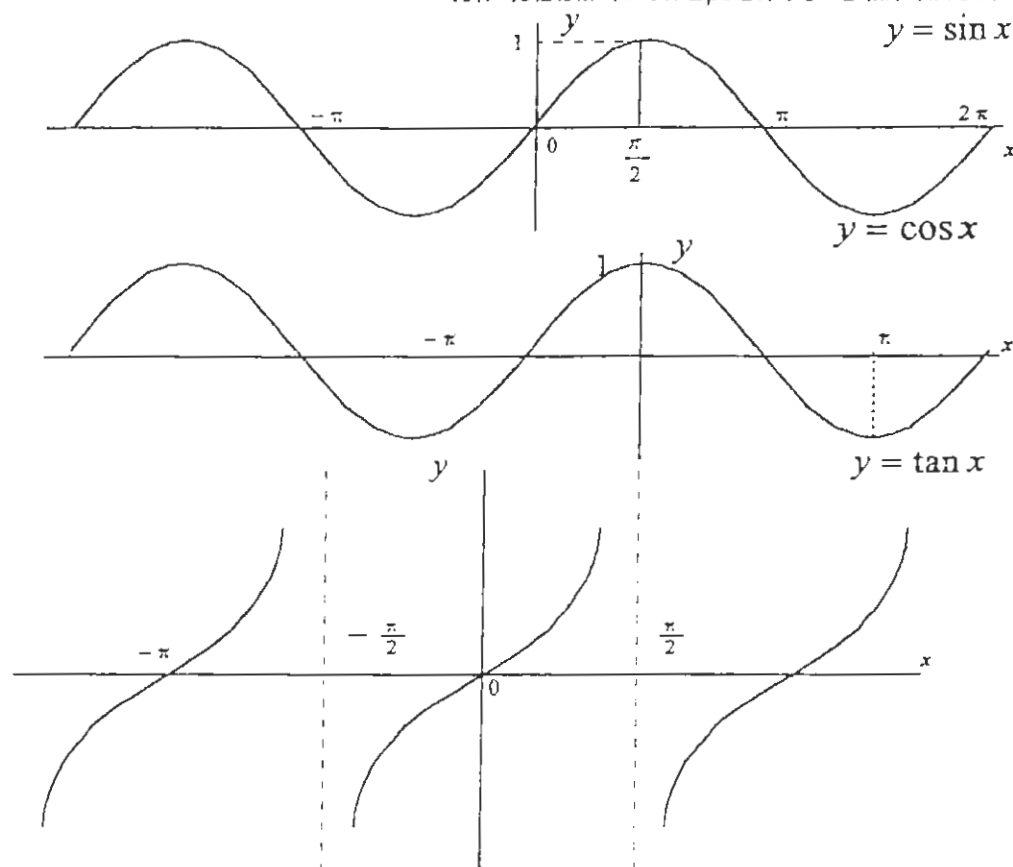
הקבוע הנמוך ביותר הזה נקרא מחזור הפונקציה.

מהגדרת הפונקציה הטריגונומטרית נובע שהמחזור של $y = \sin x$ הוא 2π שכן

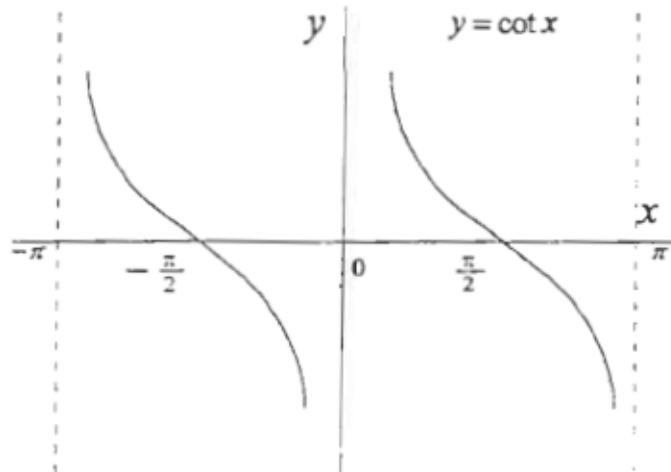
$$\sin(x + 2\pi) = \sin x; \text{ וזהו גם המחזור של } \cos x.$$

המחזור של הפונקציות $y = \tan x$ ו- $y = \cot x$ הוא π .

התיאור הגרפי של הפונקציות טריגונומטריות:



איור 2.9



איור 2.10: הפונקציות הטריגונומטריות

הערה: הפונקציות $\sin x$, $\cos x$ מוגדרות לכל x . הפונקציות $\tan x$, $\cot x$ לא מוגדרות לכל x .

ד. פונקציות טריגונומטריות הפוכות

• הפונקציה $y = \sin^{-1} x$ היא פונקציה ההפוכה לפונקציה $y = \sin x$. היא נכתבת גם כ- $y = \arcsin x$. משמעותה: y היא הזווית ברדיאנים שהסינוס שלה הוא x . הפונקציה היא רב-ערכית (ראה איור 2.10 עבור $y = \sin x$) ולכן בוחרים כערך ראשי

$$\text{את התחום } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

• הפונקציה $y = \cos^{-1} x = \arccos x$ היא פונקציה הפוכה ל- $y = \cos x$. בוחרים ערך ראשי בתחום: $0 \leq y \leq \pi$. שים לב: כאן לא ניתן לבחור אותו תחום לערך ראשי כמו עבור $y = \arcsin x$, כיון שבתחום זה הפונקציה רב ערכית.

$$\bullet \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}, \text{ ערך ראשי: } y = \tan^{-1} x = \arctan x$$

$$\bullet \quad 0 < y < \pi, \text{ ערך ראשי: } y = \cot^{-1} x = \operatorname{arc} \cot x$$

$$\bullet \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \text{ ערך ראשי: } y = \csc^{-1} x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(\text{הכתיבה האחרונה נובעת מכך ש-} \frac{1}{x} = \sin y \Leftrightarrow \csc y = \frac{1}{\sin y} = x)$$

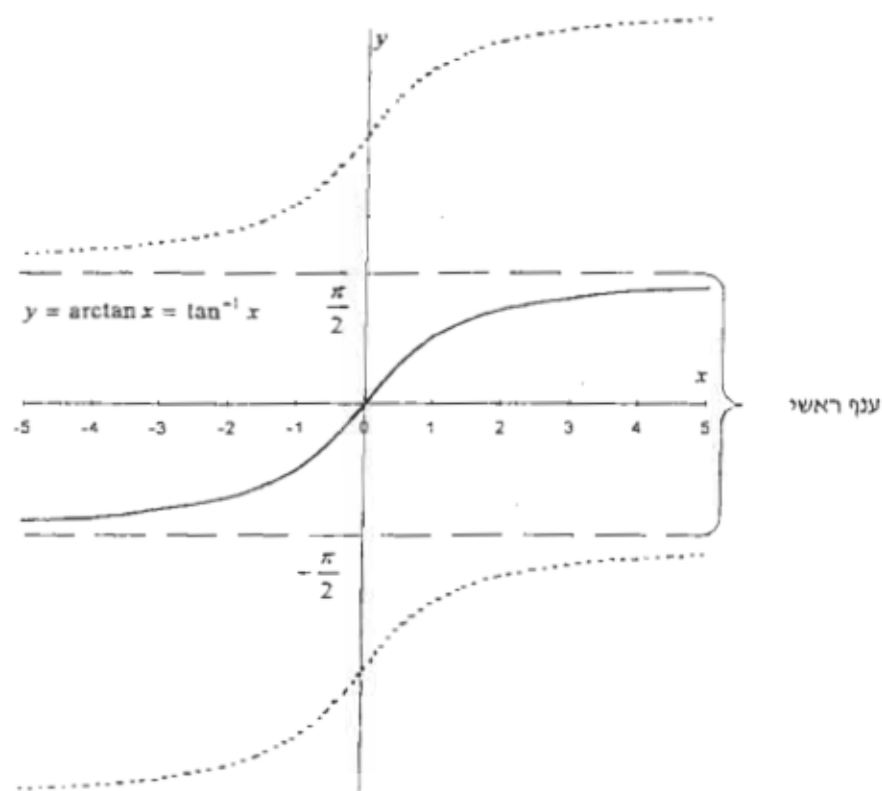
$$\bullet \quad 0 \leq y \leq \pi, \text{ ערך ראשי: } y = \sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

דוגמאות: 1. נתבונן בפונקציה $y = \arcsin x$. משמעותה: מהי הזווית y שהסינוס שלה x ?

תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $-1 \leq x \leq 1$. הפונקציה היא רב-ערכית. לכל ערך של x

מתאימים ∞ ערכי y . בחרנו את הערך הראשי (או הענף הראשי) כך שעבור כל x יהיה רק ערך אחד לפונקציה.

ג. נשרטט את הפונקציה $y = \arctan x$. לכל x יש אינסוף ערכי y ולכן אנו מגבילים את עצמנו לענף הראשי בתחום: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. כאן תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $-\infty < x < \infty$.



איור 2.11

3. מושג הגבול

3.1. גבול של סידרה

מושג הגבול הוא יסודי וקשור למושגים רבים במתמטיקה כמו נגזרת, אינטגרל וכו'.

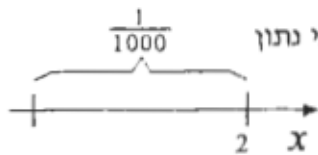
הגדרה: סידרה היא קבוצת מספרים מסודרת, לפי כלל נתון.

בפרק זה נדון במשתנה המקבל ערכים שונים בצורה מסודרת - אברי סידרה. אנו נעסוק במושג המשתנה ה"שואף לגבול" או "סידרה השואפת לגבול".

לדוגמה: נתונות הנקודות העוקבות על הישר הממשי ע"י אברי הסדרה:

$$1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \frac{13}{7}, \dots, 2 - \frac{1}{n}$$

אנו רואים כי הנקודות מצטופפות בסביבת הנקודה 2, באופן שקיימות נקודות השייכות לסדרה אשר מרחקן מ-2 קטן מכל מספר חיובי נתון וקטן כרצוננו.



למשל: הנקודה $2 - \frac{1}{1001}$ וכל הנקודות שאחריה נמצאות במרחק

הקטן מ- $\frac{1}{1000}$ מהמספר 2.

איור 3.1

הנקודה $2 - \frac{1}{1000001}$ וכל הנקודות שאחריה נמצאות במרחק הקטן מ- $\frac{1}{10^6}$ מ-2 וכך נוכל למצוא לכל

מספר קטן שנבחר איבר שכל האברים אחריו נמצאים קרוב יותר מהמספר הקטן שבחרנו. מצב מסוג זה אנו מאפיינים ע"י כך שאומרים: **גבול הסדרה הוא 2.**

אם x הוא משתנה המקבל את ערכי הסדרה הנ"ל, נאמר כי x שואף ל-2 כגבול ונכתוב $x \rightarrow 2$ או $\lim x = 2$.

במלים אחרות: אם החל ממקום מסוים בסדרה כל האברים נמצאים במרחק קטן כרצוננו מ- a - אזי a הוא גבול הסדרה.

נביא עתה הגדרה מתמטית מדויקת לגבול של משתנה או סדרה:

3.2. הגדרה

המספר הקבוע a יקרא **גבול** של משתנה x המקבל ערכים של סידרה אם לכל ε חיובי וקטן כרצוננו נוכל למצוא ערך של המשתנה x כך שעבור כל ערכי x שבאים אחריו יתקיים אי השוויון $|x - a| < \varepsilon$. אז נכתוב $x \rightarrow a$ או $\lim x = a$.

הערה: $|x - a|$ משמעותו המרחק של x מ- a , ראה איור. **דוגמה 1:** נניח כי המשתנה x מקבל את הערכים הבאים:

$$x_1 = 2, x_2 = 1\frac{1}{2}, x_3 = 1\frac{1}{3}, \dots, x_n = 1 + \frac{1}{n} + \dots$$

נוכיח שמשתנה זה גבולו הוא 1.

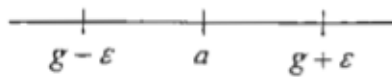
צריך להוכיח שהחל מ- n מסויים קיים $|x_n - 1| < \varepsilon$ לכל ε חיובי וקטן כרצוננו.

$$|x_n - 1| = \left| \left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1 \right| = \frac{1}{n}$$

נחשב:

ואמנם, לכל ε נוכל למצוא n שיקיים את אי השוויון $\frac{1}{n} < \varepsilon$ וזהו $n > \frac{1}{\varepsilon}$ (שיקיים $|x_n - 1| < \varepsilon$).

דרך אינטואיטיבית יותר אבל לא מדויקת להסביר את מושג הגבול היא לומר שלסדרה $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ יש גבול a אם האברים העוקבים "הולכים ומתקרבים" כרצוננו ל- a . שיטה זו משמשת לעתים לשם ניחוש ערך הגבול, אבל צריך להוכיח לפי ההגדרה.

3.3 משמעות גיאומטרית

נתון x עובר על ערכי סידרה, $\lim x = g$ משמעות

שכל הנקודות מלבד מספר סופי שלהן מצטופפות

בכל קטע קטן כרצוננו בין $g - \varepsilon$ לבין $g + \varepsilon$,

3.3 איור

שכן $|x - g| < \varepsilon$ משמעותו $g - \varepsilon < x < g + \varepsilon$ - כלומר - מרחק x מ- g קטן מ- ε .

דוגמה 2 : נתון משתנה x המקבל את ערכי הסדרה -

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2} \quad x_2 = 1 + \frac{1}{2^2} \quad x_3 = 1 - \frac{1}{2^3} \quad \dots \quad x_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{2^n}$$

וכיח שגבול הסדרה הוא 1. צ"ל שהחל מ- n מסוים $|x_n - 1| < \varepsilon$ לכל ε חיובי וקטן

כרצוננו.

אם נמצא את אותו n מסוים סיימנו את ההוכחה!

נחשב:

$$|x_n - 1| = \left| \left(1 + (-1)^n \frac{1}{2^n} \right) - 1 \right| = \frac{1}{2^n}$$

לכל ε נוכל למצוא n המקיים $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ - נמצא את ה- n הזה:

$$2^n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n \log 2 > \log \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log 2}$$

מצאנו את n לכל ε שנבחר. כלומר, כל ערכי x עם n כזה יקיימו $|x_n - 1| < \varepsilon$!

שים לב כי במקרה זה ערכי המשתנה גדולים או קטנים מהגבול, והמשתנה מגיע לגבול ע"י תנודות סביב הגבול (אוסצילציות).

הגדרה: אם קיים גבול לסדרה היא נקראת **מתכנסת** אחרת היא **מתבדרת**.

דוגמה 3: נעונה הסדרה $\dots, \frac{n}{n+1}, \dots, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ - המשתנה x מקבל את ערכי

הסדרה. מהו גבול הסדרה? אנו רואים באופן אינטואיטיבי שסביב המספר 1 מצטופפים אינסוף מספרים, או בכל סביבה קרובה ל-1 שנבחר נוכל למצוא איבר בסדרה שהחל ממנו

כל האברים נמצאים בסביבה. כלומר $|x - 1| < \varepsilon$ לכל ε שנבחר.

וכיח עתה ש-1 הוא אמנם גבול הסדרה:

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n - n - 1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}$$

ואמנם קיים n כזה כך ש- $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ לכל ε שנבחר. נוכל למצוא את ה- n הזה:

$$\varepsilon = \frac{1}{100} \Rightarrow n > 99 \quad n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

כלומר: אם $\varepsilon = \frac{1}{100}$ אזי אם $n > 99$ נקבל שהם קרובים ל-1 יותר מאשר $\frac{1}{100}$. האיבר

ה-100, מרחקו מ-1 הוא: $\left| \frac{100}{101} - 1 \right| = \frac{1}{101}$ וכל המספרים אחריו ודאי יהיו קרובים יותר ל-1 לכן 1 יהיה גבול הסדרה.

מסקנות:

א. אם נתונה הסדרה $x = c$ (קבוע) ברור שהגבול של קבוע הוא הקבוע עצמו, שכן תמיד קיים אי השוויון $|x - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ לכל ε חיובי.

ב. לא לכל משתנה המקבל ערכים של סדרה יש גבול. נסתכל למשל על המשתנה המקבל את ערכי הסדרה הבאה:

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = 1 - \frac{1}{4} \quad x_3 = \frac{1}{8} \quad x_4 = 1 - \frac{1}{16} \quad \dots \quad x_{2n} = 1 - \frac{1}{2^{2n}} \quad x_{2n-1} = \frac{1}{2^{2n-1}}$$

עבור n מספיק גדול, הערכים של x_{2n} וכל אלו שאחריו עם מספר סידורי זוגי יהיו קרובים ל-1 כרצוננו. ואילו הערכים של x_{2n+1} וכל אלו שאחריו עם מספר סידורי אי-זוגי יהיו קרובים ל-0 כרצוננו. ולכן לפי הגדרת הגבול, למשתנה x אין גבול שכן לא כל ערכי x אחרי n מסוים קרובים ל-1 או ל-0 כרצוננו.

הגדרה: אנו אומרים ש- x שואף חיובית לאינסוף ($x \rightarrow +\infty$) אם החל ממקום מסוים בסדרה יהיה x גדול מכל מספר חיובי גדול שנבחר.

לדוגמה: אם x מקבל את הערכים $1, 2, 3, 4, \dots$ אזי $x \rightarrow \infty$ או $\lim x = \infty$.

באותו אופן $x \rightarrow -\infty$ אם החל ממקום מסוים בסדרה יהיה x קטן מכל מספר שלילי נתון קטן ככל שיהיה.

לדוגמה: $x \rightarrow -\infty$ על פני הסדרה $-2, -4, -6, \dots$

נאמר כי x שואף לאינסוף אם $x \rightarrow \infty$ או $x \rightarrow -\infty$ כלומר אם $|x| \rightarrow \infty$ או $x \rightarrow -\infty$.

4. הגבול של פונקציה

בפרק זה נדון במה שקורה לפונקציה $y = f(x)$ כאשר המשתנה הבלתי תלוי x שואף לגבול מסוים a או ל- ∞ . נתבונן בפונקציה $y = 3x - 2$. נבדוק כיצד תתנהג הפונקציה כאשר x יקבל ערכים השואפים ל-2. x יכול לשאוף ל-2 בדרכים שונות, לאינסוף. נתבונן למשל בסדרת המספרים הבאה שגבולה 2:

$$3, 2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{8}, 2\frac{1}{16}, 2\frac{1}{32}, \dots$$

הערכים המתאימים לפונקציה $y = 3x - 2$ הם: $7, 5\frac{1}{2}, 4\frac{3}{4}, 4\frac{3}{8}, 4\frac{3}{16}, 4\frac{3}{32}, \dots$

ניתן אפוא לצפות שהפונקציה $y = 3x - 2$ שואפת ל-4 כש- x שואף ל-2. נבדוק מה יקרה אם x ישאף ל-2 בדרך אחרת. האם הגבול ישתנה? למשל, x יכול לקבל את הערכים הבאים $1, 1.9, 1.99, 1.999, 1.9999, \dots$

הערכים המתאימים לפונקציה $y = 3x - 2$ הם: $1, 3.7, 3.97, 3.997, 3.9997, \dots$ רואים שגם כאן הפונקציה שואפת ל-4.

אם הפונקציה שואפת לאותו גבול בכל דרך שבה x שואף ל-2, אנו נאמר שזהו גבול הפונקציה (כלומר, אם הגבול של x הוא 2 (אם שואף ל-2) אזי גבול הפונקציה הוא 4) ונכתוב זאת $\lim_{x \rightarrow 2} 3x - 2 = 4$.

בסעיף הבא נביא הגדרה מתמטית לגבול.

4.1 הגדרת הגבול:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ אם לכל מספר חיובי ε , קטן כרצוננו, קיים $\delta > 0$ כך שלכל x (שונה מ- a) המקיים את

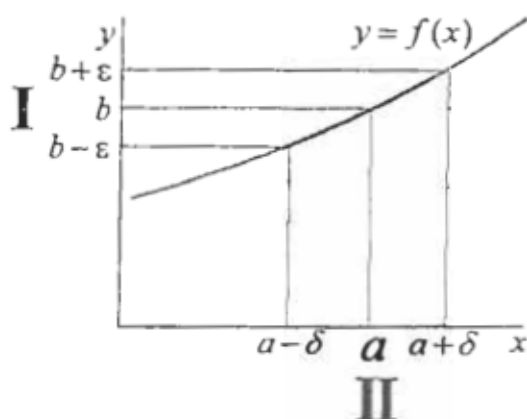
$$|x - a| < \delta \quad \text{מתקיים גם} \quad |f(x) - b| < \varepsilon.$$

הערות:

1. כאשר אנו מעוניינים בגבול אנו דנים בערכים של הפונקציה בסביבת נקודה a שהם שונים מ- a !
2. כדי שלפונקציה יהיה גבול כאשר $x \rightarrow a$ אין זה הכרחי שהפונקציה תהיה מוגדרת בנקודה $x = a$.
3. שים לב כי $x \rightarrow a$ בכל דרך שהיא - כלומר בכל סדרה שנבחר.

על מנת להסביר את ההגדרה נתבונן בגרף של הפונקציה $y = f(x)$. אנו אומרים כי $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

כאשר לכל $\varepsilon > 0$ שנבחר קטן כרצוננו נוכל למצוא δ כך שכל x הנמצא ברווח $|x - a| < \delta$ (ראה איור



3.3) קיים $|f(x) - b| < \varepsilon$. ואמנם לכל x ברווח הנייל הפונקציה נמצאת ברווח $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$, לכן b הוא גבול הפונקציה.

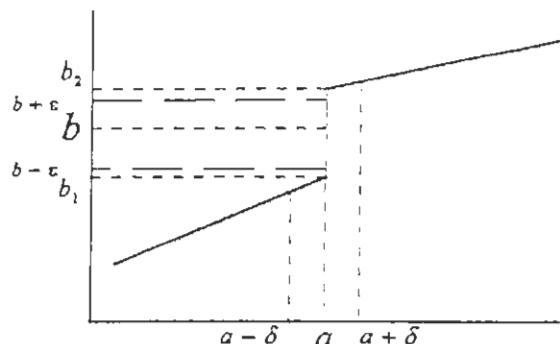
העיקר בהגדרה זו שאחרי בחירה של ε (אינטרוול I) ניתן למצוא $\delta > 0$ הקובע את אינטרוול II כך שכאשר $x \neq a$ ונמצא באינטרוול II, $f(x)$ נמצא באינטרוול I.

איור 4.1: הגדרת הגבול

4.2 דוגמאות לנקודות בהן אין גבול לפונקציה

דוגמה 1:

אם ניקח למשל את הפונקציה שבאיור 4.2, ניתן לראות כי כאשר מתקרבים לנקודה a משמאל (בערכים גדלים והולכים), שואף ערך הפונקציה לערך b_1 , ואילו כאשר מתקרבים לנקודה a מימין (בערכים קטנים והולכים), שואף ערך הפונקציה לערך b_2 - ולכן אין גבול לפונקציה בנקודה a .



או: אם נבחר ε כמו באיור, לא נוכל למצוא $\delta > 0$ שעבור כל ערכי x המקיימים $|x-a| < \delta$ מתקיים גם $|f(x)-b| < \varepsilon$. (ראה איור 4.2)

איור 4.2

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 2 \\ x^2 - 1 & x < 2 \end{cases}$$

דוגמה 2: נתונה הפונקציה:

לפונקציה זו אין גבול! כאשר מתקרבים ל-2 משמאל, הפונקציה מתקרבת ל-3. אולם כאשר מתקרבים ל-2 מימין, הפונקציה מתקרבת ל-4.

4.3 דוגמאות להוכחות גבול ע"פי הגדרה

נתונה הפונקציה $f(x) = x^2$. נוכיח כי $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$. עלינו להראות שלכל $\varepsilon > 0$ וקטן כרצוננו נוכל

למצוא $\delta > 0$ כך שלכל $|x-2| < \delta$ מתקיים $|x^2 - 4| < \varepsilon$. נניח $\delta < 1$:

$$|x^2 - 4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2| \cdot |x+2| < \delta \cdot |x+2| < 5\delta$$

אם נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ נקבל שלכל $|x-2| < \delta$ מתקיים $|x^2 - 4| < \varepsilon$. כלומר - הוכחנו את הטענה! זוהי שיטה של הוכחת הגבול ע"פי ההגדרה.

השיטות המעשיות למציאת הגבול שונות ונעזרות במשפטים הבאים:

4.4 משפטי גבול

אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ו- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ אזי:

$$\lim_{x \rightarrow a} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

כאשר k קבוע:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \pm B$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B}$$

בתנאי ש- $B \neq 0$! אם $B = 0$ ו- $A \neq 0$ הפונקציה שואפת ל- ∞ !

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^m = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^m = A^m$$

בתנאי ש- A^m מספר ממשי.

שים לב כי המצבים $0; \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ אינם מוגדרים!

נוכיח רק את המשפט השני. שאר ההוכחות ניתן למצוא בספרות שהובאה במבוא.
 עלינו להוכיח שעבור כל $\varepsilon > 0$ נוכל למצוא $\delta > 0$ כך שלכל $|x - a| < \delta$ יתקיים אי השוויון
 $|f(x) + g(x) - (A + B)| < \varepsilon$. במקרה זה $A + B$ יהיה גבול של $f(x) + g(x)$.
 נחשב: $|f(x) + g(x) - (A + B)| = |(f(x) - A) + (g(x) - B)| \leq \dots$
 ועפ"י משפט הערך המוחלט, ערך מוחלט של סכום הוא קטן או שווה לסכום הערכים המוחלטים.
 ולכן: $\dots \leq |f(x) - A| + |g(x) - B|$
 אבל לפי הנתון, לכל ε שנבחר (למשל $\frac{\varepsilon}{2}$) קיים δ_1 כך שעבור כל $|x - a| < \delta_1$ יהיה $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$.
 וכמו כן, קיים δ_2 כך שעבור כל $|x - a| < \delta_2$ יהיה $|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$.
 ואם נבחר δ שיהיה הקטן מבין δ_1 ו- δ_2 נקבל שעבור $|x - a| < \delta$ מתקיים גם -
 $|f(x) + g(x) - (A + B)| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. מ.ש.ל.

4.5 שימושים במשפטי גבול

ניעזר עתה במשפטים שלמדנו על מנת למצוא את הגבולות באופן מעשי. דוגמאות:

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 2x + 7 = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} (-2x) + \lim_{x \rightarrow 2} 7 =$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 2} x\right)\left(\lim_{x \rightarrow 2} x\right) + \left(\lim_{x \rightarrow 2} (-2)\right)\left(\lim_{x \rightarrow 2} x\right) + \lim_{x \rightarrow 2} 7 = 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 + 7 = 7$$

שכן לפי ההגדרה $\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$ משמעותו $x \rightarrow 2$ באופן מעשי נהוג להשמיט את שלבי הביניים:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 4} (25 - x^2)} = \sqrt{9} = 3$$

אנו משתמשים כאן בגבול של משתנה על מנת למצוא גבול של פונקציה

הערה: אסור להניח שתמיד $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. כפי שהוגדר לעיל, כאשר $x \rightarrow a$, x לעולם אינו שווה

ל- a . x מתקרב יותר ויותר אך אינו שווה ל- a ! לדוגמה: לפונקציה $y = \sqrt{25 - x^2}$ אין גבול כאשר $x \rightarrow 5$, כי מימין הפונקציה לא מוגדרת ולא ניתן לומר שבכל דרך שבה $x \rightarrow 5$ הפונקציה שואפת לאפס.

4.6 המצב של 0/0

לעתים קורה שמקבלים גבול של מנה שגבול המונה הוא אפס וכן גם גבול המכנה אפס וגודל זה $\frac{0}{0}$

איננו מוגדר. אולם ישנה שיטה איך לחשב גבולות כאלו.

דוגמה 1:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x^2 - x - 12}$$

אם נחשב גבול המונה וגבול המכנה נקבל $\frac{0}{0}$ שאינו מוגדר. אולם:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{x^2 - x - 12} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x + 3} = \frac{1}{7}$$

מותר לחלק ב- $x - 4$ לפני המעבר לביצוע הגבול היות ולפי ההגדרה כאשר $x \rightarrow 4$ קיים $x \neq 4$ ולכן $x - 4$ אינו אפס.

דוגמה 2:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

להלן טבלה המסבירה את הדוגמה האחרונה:

$\frac{x^2 - 1}{x - 1}$	$x^2 - 1$	x^2	x
2.1	0.21	1.21	1.1
2.01	0.0201	1.0201	1.01
2.001	0.002001	1.002001	1.001

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} \right) \cdot (x^2 - 1)$$

ניתן לכתוב את הדוגמה האחרונה בצורה $\infty \cdot 0$ ונקבל בתשובה שהגבול הוא מספר סופי 2. הצורה $\infty \cdot 0$ יכולה להיות גם אפס או אינסוף כמו בדוגמאות הבאות:

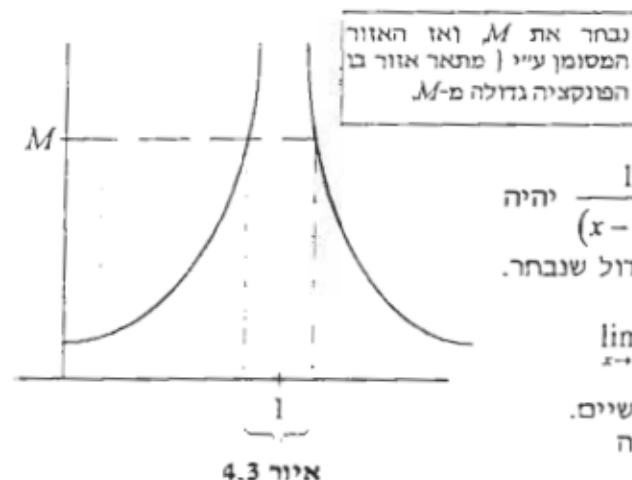
$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} \right) \cdot (x^2 - 1) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} \right) \cdot (x^2 - 1)^2 = 0$$

תלוי מה שואף יותר מהר הפונקציה ל- ∞ או הפונקציה לאפס.

4.7 שאיפת פונקציה לאינסוף

הפונקציה $f(x)$ שואפת ל- ∞ כאשר $x \rightarrow a$ (או $x \rightarrow \infty$) אם כאשר x מתקרב ל- a (בלי לקבל את הערך a) תהיה $f(x)$ החל ממקום מסוים גדולה מכל מספר חיובי נתון (או קטנה מכל מספר שלילי נתון).
לדוגמה:



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

בכל סידרה ש- x יתקרב ל-1, הערך של $\frac{1}{(x-1)^2}$ יהיה החל ממקום מסוים גדול מכל מספר חיובי גדול שנבחר.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[-\frac{1}{(x-1)^2} \right] = -\infty$$

כמו כן,

חשוב לציין כי הציון ∞ אינו מספר השייך לממשיים. זהו סימן המציין התנהגות של פונקציה. במקרהזה גם לא קיים גבול, אף על פי שמציניים $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.המשפטים שהבאנו בסעיף 4.4 אינם נכונים אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ו- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$! הם נכונים רקבמקרה שקיימים גבולות סופיים ל- $f(x)$ ו- $g(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty ;$$

דוגמה נוספת:

ישנם מקרים שבהם $x \rightarrow \infty$ והפונקציה שואפת לגבול סופי. למשל $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

עלינו להוכיח שעבור ε שנבחר מתקיים אי השוויון $|\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon$.

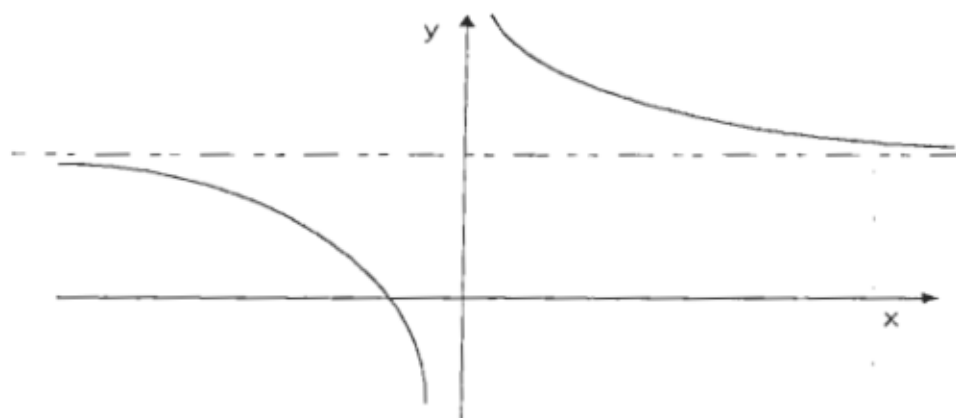
ואמנם, תמיד נוכל למצוא x מספיק גדול כך שכל ה- x אחריו יקיימו $|\frac{1}{x}| < \varepsilon$ עבור ε קטן כרצוננו. כל

שעלינו לעשות הוא לפתור את אי-השוויון $|\frac{1}{x}| < \varepsilon$. המקרה $\frac{\infty}{\infty}$.

דוגמאות:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1} = 1$$

תאור גרפי של הפונקציה הנ"ל:



איור 4.4

אילו היינו פותרים רגיל היינו מקבלים $\frac{\infty}{\infty}$ שזהו גודל בלתי מוגדר.

כלומר $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

ו- $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \neq 0$ ואילו $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

אם $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq 0$ ו- $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x-5}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7-\frac{5}{x}}{2+\frac{3}{x}} = \frac{7-0}{2+0} = 3\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x-5}{x^3+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^3}}{1+\frac{3}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{0} = \infty$$

דוגמה למצב בו אין גבול:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ בכל סדרה עלולים לקבל תוצאה שונה, וזה נובע מצורת הפונקציה



איור 4.5

אין גבול לפונקציה $y = \sin x$ למשל, עבור הסידרה

$x_n = n\pi$ נקבל $y_n \rightarrow 0$ עבור הסידרה

$x_n = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ נקבל $y_n \rightarrow (-1)^n$

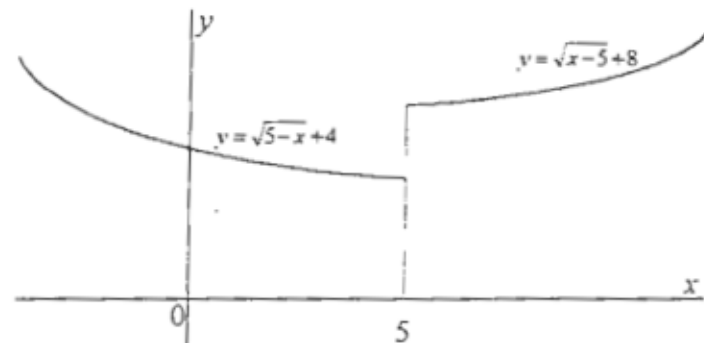
4.8 גבול ימני וגבול שמאלי

דוגמה למקרה בו אין גבול: $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{25 - x^2}$. לפי הגדרת הגבול בכל סדרה בה $x \rightarrow 5$ צריכה הפונקציה לשאוף לאותו גבול. במקרה זה, אם השאיפה ל-5 באה ממספרים גדולים מ-5, למשל דרך הסדרה $5\frac{1}{2}, 5\frac{1}{4}, 5\frac{1}{8}, 5\frac{1}{16}, \dots$, אזי הפונקציה לא מוגדרת עבור x אלו (לא מספר ממשי) ולכן לא קיים גבול. במקרה זה אנו אומרים כי לפונקציה קיים **גבול שמאלי** (מספרים מתחת ל-5) ו**לא קיים גבול ימני** (מספרים מעל 5) ולכן לפונקציה אין גבול. לפונקציה יש גבול אם יש לה גבול ימני וגם גבול שמאלי ושניהם שווים - ולהפך!

ישנם מקרים בהם יש לפונקציה גבול שמאלי וגם גבול ימני ושניהם אינם שווים.

למשל: לפונקציה (ראה איור 3.5)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-5}+8, & x > 5 \\ \sqrt{5-x}+4, & x < 5 \end{cases}$$



איור 4.6

יש גבול ימני, ויש גבול שמאלי בנקודה $x = 5$, אך הם אינם שווים (הגבול הימני 8 והשמאלי 4) ולכן לפונקציה אין גבול. פונקציה כזו נקראת גם פונקציה בלתי רציפה. הגדרה מדויקת יותר ניתן בהמשך.

סימון:

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 8 \text{ גבול ימני:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 4 \text{ גבול שמאלי:}$$



איור 4.7

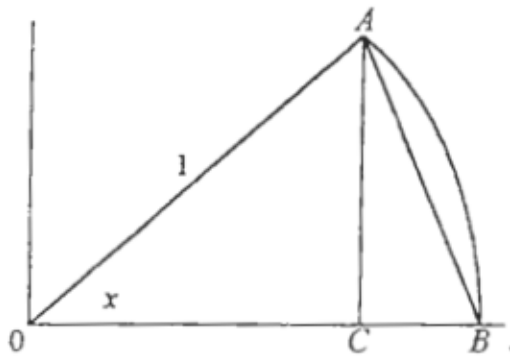
דוגמה נוספת: לפונקציה $y = \frac{x}{|x|}$ - אין גבול ב-0 (ראה איור 4.7).

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = 1 \text{ גבול ימני הוא:} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = -1 \text{ גבול שמאלי הוא:}$$

4.9 דוגמאות לחישוב גבולות בפונקציות

טריגונומטריות.

הוכח כי $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$



איור 4.8

נניח כי $x > 0$. אם נצייר זווית x כאשר $OA = 1$ אזי

$AC = \sin x$. אורך הקשת $\widehat{AB}$ שווה לגודל הזווית x

כיון שהרדיוס (OA) שווה ל-1. ברור כי $\widehat{AB} > AB$

(אורך הקשת AB גדול מאורך הקטע AB)

ו- $AB > AC$. כלומר ש- $x > AB > AC$ ולכן

$x > \sin x$. לכן אם $x \rightarrow 0$ הרי ברור שגם

$\sin x \rightarrow 0$. כלומר ש- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

באותו אופן ניתן להראות כי $\lim_{x \rightarrow 0} \tan x = x$

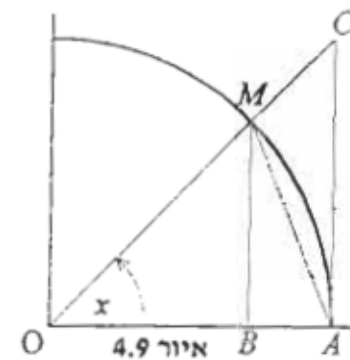
נמצא את הגבול - $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}) = 1 - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x} = \sqrt{1 - 0} = \sqrt{1} = 1$$

דרך אחרת:

נמצא את הגבול - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$



הפונקציה אינה מוגדרת עבור $x=0$ היות וגם המונה וגם המכנה של

המנה מתאפסים. נוכל למצוא את גבול הפונקציה כאשר $x \rightarrow 0$.

נתאר מעגל יחידה. הזווית MOB היא הזווית x . ראה שרטוט:

$$S_{\triangle AMO} < S_{\triangle AMO} < S_{\triangle AOC}$$

$$S_{\triangle AMO} = \frac{1}{2} OA \cdot MB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin x$$

$$S_{\triangle AMO} = \frac{1}{2} OA \cdot \widehat{AM} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x = \frac{1}{2} x$$

$$S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

$x > 0$

$$\sin x < x < \tan x$$

כעת נחלק ב- $\sin x$:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

כלומר -

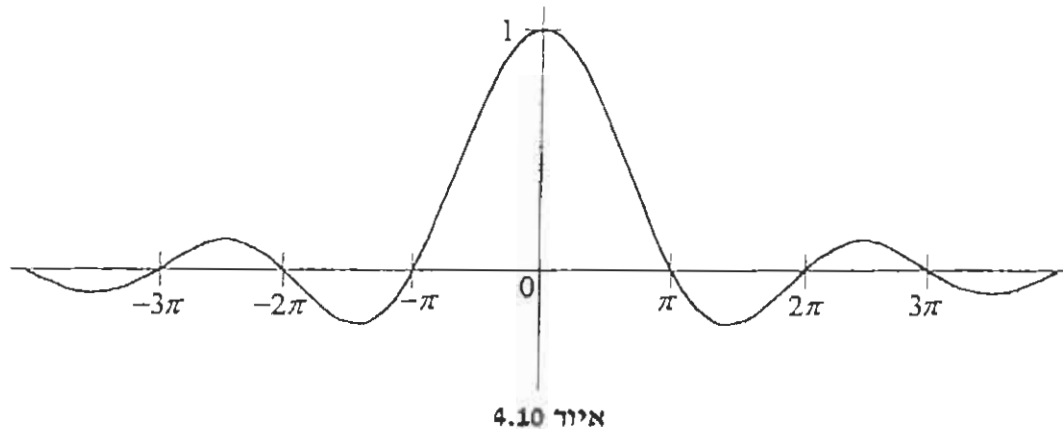
$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

הערות:

א. הקשר בין אורך קשת לשטח גזרה: $\frac{x}{2\pi} = \frac{L}{2\pi R} = \frac{s}{2\pi R^2}$ שטח הגזרה; L - אורך הקשת

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < \frac{1}{c} \text{ או } a > b > c$$

אם x שואף לאפס אנך שמאל נשאר 1, אנך ימין שואף כפי שראינו ל-1 ולכן הביטוי האמצעי שביניהם חייב לשאוף גם הוא ל-1 - כלומר $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ואמנם, התיאור הגרפי של $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ נראה כך:



נחשב $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = ?$

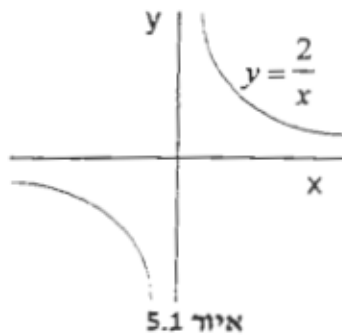
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 4 \frac{\sin 4x}{4x} = 4 \lim_{4x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 4 \cdot 1 = 4$$

$(x \rightarrow 0 \Rightarrow 4x \rightarrow 0)$

באופן כללי:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k$$

5. רציפות5.1 התנאים לרציפות

איור 5.1

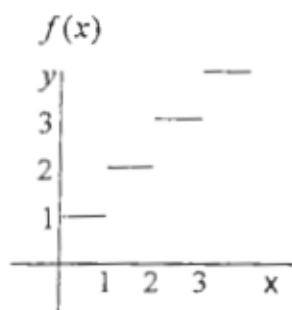
אנו נטפל במסגרת קורס זה בעיקר בפונקציות רציפות לכל x פרט למספר סופי של ערכי x . לכן חשוב להבין את המשמעות של פונקציה רציפה.

ננסה לענות על השאלה מתי פונקציה תהיה רציפה בתחום $a \leq x \leq b$. התשובה הטבעית עשויה להיות: כאשר הגרף של הפונקציה ניתן לאיור ללא הרמת העפרון מהנייר. זה יכול להיעשות למשל עבור הפונקציה $y = 2/x$ בין $x = 1$ ל- $x = 3$, אך זה אינו אפשרי בתחום $-1 \leq x \leq 1$.

כיוון שבנקודה $x=0$ צריכים להרים את העפרון מהנייר (ראה איור 5.1), ואז נאמר שהפונקציה איננה רציפה בנקודה $x=0$.

דוגמה נוספת: נתונה הפונקציה -

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1 \\ 2, & 1 < x \leq 2 \\ 3, & 2 < x \leq 3 \\ \vdots & \end{cases}$$



איור 5.2

זוהי פונקציה מדרגות (ראה איור 5.2). היא אינה רציפה בנקודות $x=1, 2, 3, \dots$ והן נקראות נקודות אי רציפות.

מה הן הבעיות עם נקודות אלו? במקרה של הפונקציה $y = \frac{2}{x}$ נדגיש שהפונקציה אינה מוגדרת בנקודה $x=0$. במקרה של פונקציה המדרגות, אם נצייר את הגרף נבחין שאנו יכולים לצייר את הגרף משמאל בתחום בין 0 ל-1 כולל הנקודה $x=1$ אולם אז צריכים לקפוץ

אם רוצים להמשיך לערכי x גדולים מ-1. אם מציירים מימין נגיע כאשר x מתקרב ל-1 לנקודה $y=2$ במקום $y=1$ המתקבלת כאשר מציירים הפונקציה משמאל. הקושי נובע, כמובן, מכך שלפונקציה אין גבול עבור $x \rightarrow 1$.

5.2 הגדרה:

נגדיר אי-רציפות של פונקציה $y = f(x)$ בצורה מדויקת: ל- $y = f(x)$ אי-רציפות בנקודה $x=a$ אם קיים אחד התנאים הבאים:

א. הפונקציה אינה מוגדרת בנקודה $x=a$.

ב. הפונקציה מוגדרת בנקודה $x=a$ אך אין לה גבול עבור $x \rightarrow a$.

ג. הפונקציה מוגדרת בנקודה $x=a$ ויש לה גבול עבור $x \rightarrow a$ אך ערך הגבול אינו שווה לערך הפונקציה בנקודה זו.

$$y = \frac{x^2 - 2x}{x - 2} \quad \text{לדוגמה:}$$

לפונקציה זו יש אי-רציפות בנקודה $x=2$ היות והיא לא מוגדרת בנקודה $x=2$ מצד שני, מתקיים -

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = 2 \quad \text{כלומר שיש לה גבול ב-} x \rightarrow 2.$$

נוכל להגדיר את ערך הפונקציה בנקודה $x=2$ לפי רצוננו שהרי איננה מוגדרת בנקודה $x=2$. נניח שנגדיר בנקודה $x=2$ $y=10$ ($f(2)=10$). האם במקרה זה תהיה הפונקציה רציפה? מבדיקת שלושת

התנאים עולה כי תנאים א' ו-ב' אינם קיימים, אך תנאי ג' קיים שהרי $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$ ולכן

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \neq f(2) = 10 \quad \text{כלומר הפונקציה איננה רציפה.}$$

אולם, אם נגדיר כי $f(2) = 2$ אזי הפונקציה תהיה רציפה.

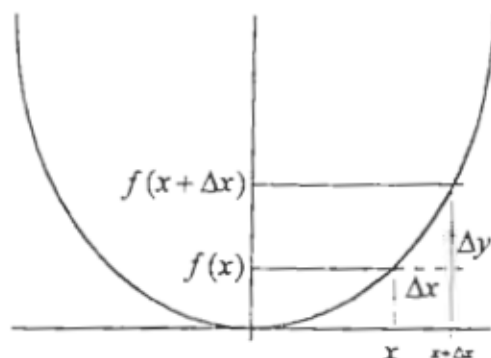
לסיכום אפשר להגדיר **רציפות** בנקודה: פונקציה $f(x)$ נקראת רציפה בנקודה $x=a$ אם ורק אם היא מוגדרת בנקודה, וגבול הפונקציה כאשר $x \rightarrow a$ שווה לערך הפונקציה בנקודה $x=a$.

כתיבה קצרה:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{אם ורק אם } x=a \text{ רציפה ב-}$$

נגדיר רציפות באינטרוול:

פונקציה $f(x)$ נקראת רציפה בתחום $a \leq x \leq b$ אם היא רציפה בכל נקודות התחום.

6. נגזרות**6.1 קצב גדול**

איור 6.1

נתבונן בפונקציה $y = f(x) = x^2$ (ראה איור 6.1). מהגרף אנו רואים שהפונקציה גדלה לאט מאוד כאשר x גדל במקצת מ-0. כאשר x גדול יותר, הפונקציה מתחילה לעלות מהר יותר. מדון אפוא עתה בקצב הגידול של הפונקציה y . מה תהיה ההגדרה המתאימה לגדל כזה? לאחר מחשבה קצרה נוכל לומר שאם נשנה את x במעט למשל מ- x ל- $x + \Delta x$ (הוא השינוי בערך x), נראה מה יהיה השינוי המתאים ב- y כלומר ב- $f(x)$: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. נגדיר את קצב הגידול באופן הבא כיחס בין השינוי ב- y לשינוי ב- x :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

לדוגמה, במקרה שלנו -

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

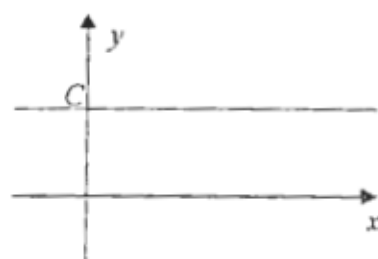
אנו רואים שככל ש- x קרוב יותר לאפס קצב הגידול קטן יותר וככל שהוא מתרחק מאפס קצב הגידול הולך וגדל. קצב הגידול תלוי ב- x וגם ב- Δx .

6.2 נגזרות

הנגזרת מוגדרת כגבול של קצב גידול הפונקציה כאשר השינוי במשתנה הבלתי-תלוי Δx שואף לאפס. כלומר:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y' \quad (6.1)$$

$f'(x)$ נקראת הנגזרת של הפונקציה $f(x)$. בצד ימין של המשוואה (6.1) כתובים סימונים נוספים



איור 6.2

לנגזרת. במקרה של הדוגמה הקודמת, $y = x^2$, מתקיים

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

כלומר הנגזרת של הפונקציה $y = x^2$ היא $y' = 2x$ ונוכל לראות שעבור $x = 0$ קיים $y' = 0$. כלומר קצב

הגידול יהיה אפס, ויגדל עם עליית x .

נראה עתה דוגמאות לגזירת פונקציות נוספות. למשל נגזור את הפונקציה $y = C$ או $f(x) = C$ כאשר C - קבוע,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

נשים לב כי Δx לעולם שונה מאפס ולכן קיים הגבול הנ"ל. כלומר קצב הגידול הוא אפס, ואמנם פונקציה קבועה קצב הגידול שלה אפס.

תרגיל: לחשב נגזרות של $y = x$, $y = x^2$, ו- $y = x^3$. על פי ההגדרה (6.1).

נחשב עתה את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = x^n$ כאשר n מספר טבעי. לצורך זה נציג קודם את הבינום של ניוטון:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{ידועה הנוסחה}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \text{וכן}$$

באופן כללי לכל n טבעי אפשר להוכיח באינדוקציה כי:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \dots + nab^{n-1} + b^n$$

פיתוח זה נקרא בשם הבינום של ניוטון. ואמנם עבור $n=1, n=2, n=3$ מקבלים את הנוסחאות הנ"ל.

נחשב עתה את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = x^2$ לפי ההגדרה, משוואה (6.1).

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right] \end{aligned}$$

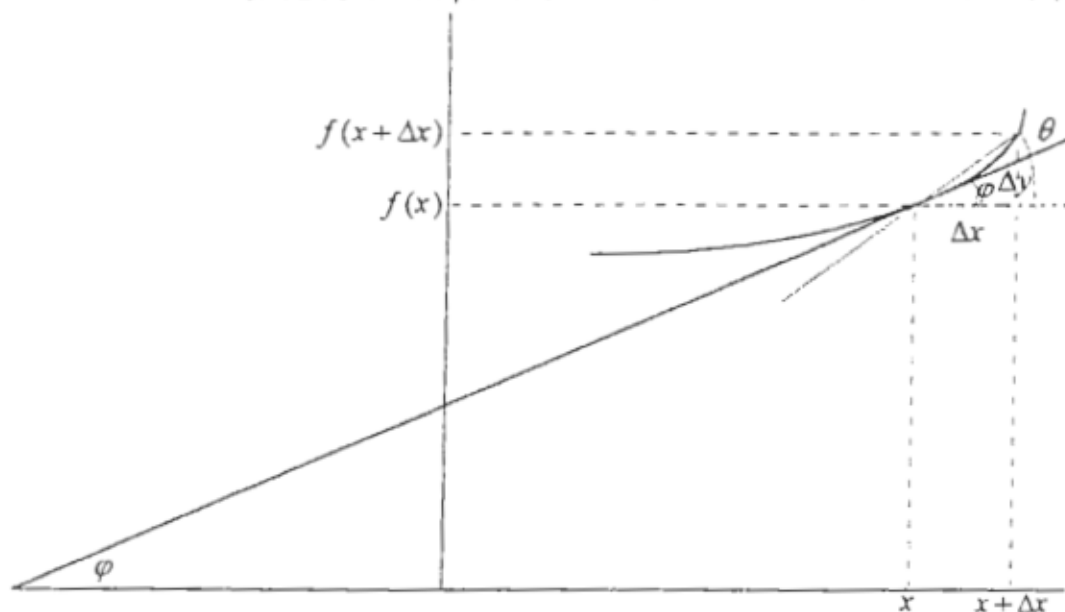
$$y = x^2 \quad \text{כומר אם:}$$

$$y' = nx^{n-1} \quad \text{אזי:}$$

והנוסחה נכונה לכל n טבעי או אפס.

6.3 המשמעות הגיאומטרית של הנגזרת

טונה הפונקציה $y = f(x)$ (ראה איור 6.3) נסתכל על המשיק בנקודה כלשהי x (משיק נוגע בפונקציה רק בנקודה אחת). הוא יוצר זווית φ עם הכיוון החיובי של ציר x . הגודל $\tan \varphi$ נקרא שיפוע המשיק. (שיפוע ישר הוא טנגנס הזווית שיוצר הישר עם הכיוון החיובי של ציר x).



איור 6.3

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \tan \vartheta$$

אם נתבונן עתה על הגודל

הוא שווה ל- $\tan \vartheta$, כאשר $\tan \vartheta$ הוא שיפוע המיתר החותך את הפונקציה בנקודות x ו- $x + \Delta x$. כאשר

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \tan \varphi$$

$\Delta x \rightarrow 0$ הזווית ϑ תשאף לזווית φ ולכן

כלומר $f'(x)$ הנגזרת של $f(x)$ בנקודה x שווה לשיפוע המשיק לפונקציה בנקודה זו.

לדוגמה: $f(x) = x^2$ הנגזרת $f'(x) = 2x$.

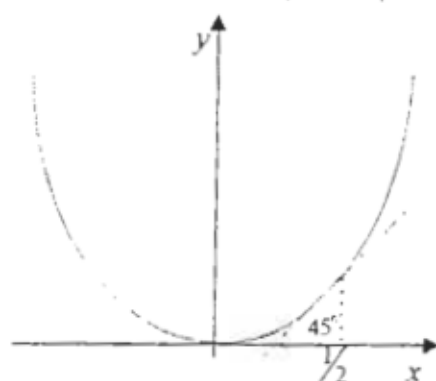
ואמנם, בנקודה $x=0$, $f'(x) = 0$ השיפוע שיוצר המשיק

בנקודה זו הוא אפס שכן המשיק היא ציר x בעצמו.

אם x הולך וגדל, השיפוע (טנגנס הזווית) ילך ויגדל. בנקודה

$x = \frac{1}{2}$ כלומר $f'(x) = 1$ $\tan \vartheta = 1$ והזווית שיוצר המשיק

עם ציר x תהיה 45° . (ראה איור 6.4)



איור 6.4: המשיק לפונקציה $y = x^2$ ב- $x = \frac{1}{2}$.

6.4 חוקי גזירה

$$\frac{d}{dx} [C \cdot f(x)] = C \cdot f'(x) \quad \text{א. } C\text{-קבוע}$$

$$\frac{d}{dx} [f(x) \pm g(x)] = \frac{df(x)}{dx} \pm \frac{dg(x)}{dx} \quad \text{ב.}$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{ג.}$$

$$\frac{d}{dx} [f(x) \cdot g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{ד.}$$

כפי שנראה להלן, אפשר להוכיח חוקים אלו בעזרת הגדרת הנגזרת, נוסחה (6.1).

חוקים אלו יעזרו לנו מאד בחשוב נגזרות. למשל עבור $y = 7x^3$, $y' = 7(3x^2) = 21x^2$, $y = 2x^2 - 5x^5 + 10$ אזי $y' = 2 \cdot 2x - 5 \cdot 5x^4 + 0 = 4x - 25x^4$.

או למשל אם $y = 2x^2 - 5x^5 + 10$ אזי $y' = 2 \cdot 2x - 5 \cdot 5x^4 + 0 = 4x - 25x^4$.
נוכיח עתה חוקים אלו:

א.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [C \cdot f(x)] &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C \cdot f(x + \Delta x) - C \cdot f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} C \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \\ &\text{ובתורת הגבולות למדנו שקבוע אפשר להוציא לפני הגבול:} \\ &= C \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = C \cdot f'(x) \end{aligned}$$

ב.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [f(x) + g(x)] &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - (f(x) + g(x))}{\Delta x} = \\ &\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x) + g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \\ &\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

נגזרת הסכום שווה לסכום הנגזרות. ללא קושי ניתן לראות שנגזרת ההפרש שווה להפרש הנגזרות:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [f(x) - g(x)] &= \frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} g(x) \\ \frac{d}{dx} [f(x) \cdot g(x)] &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ &\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x)g(x) + f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ &\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \\ &f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x) \end{aligned} \quad \text{ג.}$$

.7

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot g(x+\Delta x)g(x)} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) - (f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x))}{\Delta x \cdot g(x+\Delta x)g(x)} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \cdot \left[g(x) \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f(x) \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] = \\
 &= \frac{1}{g^2(x)} \left[g(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] = \\
 &= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}
 \end{aligned}$$

$$y = x^4(x^3 + x + 1)$$

דוגמאות:

$$y' = 4x^3(x^3 + x + 1) + x^4(3x^2 + 1) = 7x^6 + 5x^4 + 4x^3$$

נוסחה לגזרת של מכפלת שלש פונקציות.

$$y = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x) = (u \cdot v) \cdot w$$

$$\frac{dy}{dx} = (u \cdot v) \frac{dw}{dx} + \frac{d(u \cdot v)}{dx} \cdot w = (u \cdot v) \frac{dw}{dx} + \left(\frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx} \right) \cdot w =$$

$$\frac{du}{dx} \cdot v \cdot w + u \cdot w \cdot \frac{dv}{dx} + u \cdot v \cdot \frac{dw}{dx}$$

ואותו דבר גם לגבי מכפלה של מספר רב של פונקציות. לדוגמה:

$$y = x^4(x^2 + 1)(x^3 - 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3(x^2 + 1)(x^3 - 1) + x^4(2x)(x^3 - 1) + x^4(x^2 + 1)(3x^2) = 9x^8 + 7x^6 - 6x^5 - 4x^3$$

דוגמה לגזרת של מנה:

$$y = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 9}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2(x^2 + 9) - (x^3 + 1)(2x)}{(x^2 + 9)^2} = \frac{x^4 + 27x^2 - 2x}{(x^2 + 9)^2}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{f(x)} \right) = \frac{0 \cdot f(x) - 1 \cdot f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

נשתמש במנה לחישוב:

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

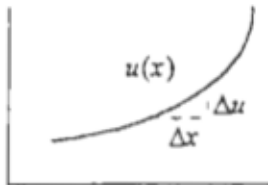
ומכאן:

$$y' = \frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

כלומר שהחוק $(x^m)' = mx^{m-1}$ שהוכחנו אותו למספרים טבעיים, וגם לאפס, וגם למספרים שלמיםשליליים. לדוגמה: אם $y = x^{-3}$ או $y' = -3x^{-4}$.

6.5 נגזרת של פונקציה מורכבת

נניח שנתונה לנו הפונקציה $y = (2x^2 + 5)^{10}$. על מנת לגזור ביטוי זה לפי החוקים שלמדנו עד עתה, יהיה עלינו להעלות בחזקה עשירית את הביטוי, שזה $2^{10} = 1024$ איברים, ולגזור אחד אחד. נראה עתה דרך פשוטה יותר לחשוב נגזרות כאלו:



איור 6.5

$$u = 2x^2 + 5$$

נסמן

$$y = f(u) = u^{10}$$

ולכן

ניתן להראות את y פונקציה של u ו- u פונקציה של x לכן קוראים ל- y פונקציה מורכבת.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

ישנו משפט שאומר שאם u פונקציה רציפה של x אז אם $\Delta x \rightarrow 0$ אז גם $\Delta u \rightarrow 0$ (ראה הסבר באיור 6.5) ולכן אפשר לכתוב:

$$= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{du} = 10u^9 \quad \frac{du}{dx} = 4x$$

נחשב את הנגזרת של הדוגמה הקודמת:

$$\frac{dy}{dx} = 10u^9 \cdot 4x = 10(2x^2 + 5)^9 \cdot 4x = 40x(2x^2 + 5)^9$$

ולכן:

כלומר - פתרנו את הבעיה בקלות.
באופן כללי:

$$y = u^n(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = nu^{n-1}(x) \cdot \frac{du}{dx}$$

לכל n שלם.**6.6 גזירה של פונקציה לא מפורשת**

לעתים ניתן הקשר בין x ל- y בצורה לא מפורשת (פונקציה מפורשת מופיע y באגף אחד לבד, ואיברים עם x או חופשיים באגף השני).

למשל: $y = 5x^2 + 7$ היא פונקציה מפורשת אבל

הפונקציה $y^3x^2 + y^2x - xy + 7 = 0$ אינה מפורשת.

במקרה זה מחשבים את הנגזרת $\frac{dy}{dx}$ ע"י גזירת שני האגפים לפי x :

$$3y^2 \frac{dy}{dx} \cdot x^2 + y^3 \cdot 2x + 2y \frac{dy}{dx} \cdot x + y^2 - y - x \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} [3y^2x^2 + 2yx - x] = y - y^2 - 2xy^2$$

ממשואה זה ניתן לחלץ את $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - y^2 - 2xy^2}{3y^2x^2 + 2yx - x}$$

נמצא את הנגזרת של $y = x^{n/m}$ כאשר n ו- m שלמים

נוכל לכתוב בצורה אחרת - $y^m = x^n$. צורה זו נקראת צורה הבלתי מפורשת של אותה הפונקציה. נגזור את שני האגפים לפי x :

$$my^{m-1} \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n}{m} \frac{x^{n-1}}{y^{m-1}} = \frac{n}{m} \frac{x^{n-1}}{x^{\frac{m}{2}(m-1)}} = \frac{n}{m} x^{[n-1-\frac{m}{2}(m-1)]} = \frac{n}{m} x^{[n-1-\frac{m}{2}m+\frac{m}{2}]} = \frac{n}{m} x^{[\frac{n}{2}-1]}$$

$$y = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$$

כלומר אם:

$$y' = \frac{n}{m} x^{[\frac{n}{2}-1]}$$

אזי

נכון לכל a שהוא מספר רציונלי.

$$y = x^a; y' = ax^{a-1}$$

אם כן, החוק

$$y = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

למשל:

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+4}}$$

דוגמה בורכבת יותר:

$$y' = \frac{1 \cdot \sqrt[3]{x^2+4} - x \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x^2+4})}{(x^2+4)^{\frac{2}{3}}}$$

$$g(x) = \sqrt[3]{x^2+4}$$

$$g = \sqrt[3]{u} = u^{\frac{1}{3}} \text{ אזי } u = x^2 + 4$$

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{du} \frac{du}{dx} = \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{2x}{1} (x^2+4)^{-\frac{2}{3}}$$

$$y' = \frac{\sqrt[3]{x^2+4} - \frac{2x^2}{3} (x^2+4)^{-\frac{2}{3}}}{(x^2+4)^{\frac{2}{3}}}$$

עד כה למדנו שיטות לגזור כל פונקציה אלגברית.

6.7 נגזרות מסדרים גבוהים יותר

בדיוק כפי ששאלנו בתחילה מהו קצב הגדול של $f(x)$, אנו יכולים עתה לשאול מהו קצב הגידול של $f'(x)$ שכן $f'(x)$ היא פונקציה חדשה ונוכל לחקור מהו קצב הגידול שלה.

זאת נוכל לעשות ע"י גזירת הנגזרת. כלומר: $\frac{d}{dx} \frac{dy}{dx}$. גודל זה נקרא **נגזרת שנייה**, ומסומן בצורה

הבאה: $\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \equiv \frac{d^2 y}{dx^2} \equiv y''$. באותו אופן, אפשר גם לגזור את הנגזרת השנייה. נסמן זאת:

$\frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) \equiv \frac{d^3 y}{dx^3}$. וזוהי **הנגזרת השלישית** של y . באופן כללי, $\frac{d^n y}{dx^n}$ היא הנגזרת ה- n ית של

הפונקציה. סימון אחר: $y^{(n)}$, $y^{(4)}$ או אף $y^{(n)}$.

$$y''' = 72x - 36$$

$$y = 3x^4 - 6x^3 + x^2 + 7$$

לדוגמה:

$$y^{(IV)} = 72$$

$$y' = 12x^3 - 18x^2 + 2x$$

$$y^{(V)} = 0$$

$$y'' = 36x^2 - 36x + 2$$

כלומר ש- $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = 0$ עבור $n \geq 5$ (עבור פונקציה זו).

דוגמה נוספת:

$$\begin{aligned} y''' &= -2 \cdot 3x^{-4} & y &= \frac{1}{x} = x^{-1} \\ y^{(IV)} &= 2 \cdot 3 \cdot 4x^{-5} & y' &= -1 \cdot x^{-2} \\ & & y'' &= 2x^{-3} \end{aligned}$$

ובמקרה זה, ניתן לומר כי באופן כללי אפשר לכתוב: $y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-(n+1)}$. לא תמיד אפשר למצוא נוסחה כללית עבור הנגזרת ה- n -ית.

בהמשך נדון בגזירה של פונקציות טרנסצנדנטיות. עד כה טיפלנו בפונקציות אלגבריות. בפונקציות אלגבריות יכולות להופיע רק הפעולות חיבור, חיסור, כפל, חילוק, הוצאת שורש והעלאה בחזקה, ובתנאי שהחזקה/בסיס השורש אינם תלויים ב- x לדוגמה:

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}} + \sqrt[3]{x^2} \qquad y = \sqrt[4]{x^2+7} - 15$$

כל הפונקציות האחרות, כלומר אלו שמכילות פעולות שונות מהנ"ל כגון הפונקציות הטריגונומטריות, הפונקציות הלוגריתמיות והפונקציות המעריכיות הן פונקציות טרנסצנדנטיות. לדוגמה:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{\log_{10} x} & y &= \sqrt{\log_2(x+7)} & y &= \sqrt{\tan(2x+3)} & y &= \sin x \\ y &= x^x & y &= 6^{\sqrt{x}} & y &= 2^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

6.8 נגזרות של פונקציות טריגונומטריות

נחשב את הנגזרת לפי הגדרה: $y = \sin x$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} =$$

נשתמש עתה בנוסחה מטריגונומטריה - $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$ כאשר אצלנו $\alpha = x + \Delta x$ ו- $\beta = x$ ולכן נקבל:

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{2x+\Delta x}{2} \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \right] \cdot \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{\Delta x}{2} \right)}{\frac{\Delta x}{2}} \right] =$$

$$\cos x \cdot 1 = \cos x \Rightarrow y' = \cos x$$

הערה: נשים לב כי תוצאה זו נכונה רק עבור x ברדיאנים:

נחשב עתה את הנגזרת של הפונקציה $y = \cos x$:

$$y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$y' = \frac{d}{dx} \cos x = \frac{d}{dx} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{d}{du} (\sin u) \frac{du}{dx} = \cos u \cdot (-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$$

$$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$$

$$u = \frac{\pi}{2} - x \text{ שים לב: הצבנו } x = \frac{\pi}{2} - u$$

לחישוב הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ ראה עמ' 28.

נחשב עתה את הנגזרות של הפונקציות הטריגונומטריות האחרות: $(\cot x)'$, $(\tan x)'$.

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\cot x)' &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\tan x} \right) = \frac{-(\tan x)'}{(\tan x)^2} = -\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\tan^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = \\ &= -\csc^2 x \quad \left[\csc x = \frac{1}{\sin x} \right] \end{aligned}$$

נחשב $\frac{d}{d\theta} \sec \theta$:

$$\frac{d}{d\theta} \sec \theta = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\cos \theta} \right) = -\frac{(\cos \theta)'}{\cos^2 \theta} = -\frac{(-\sin \theta)}{\cos^2 \theta} = \sec \theta \tan \theta$$

נחשב $\frac{d}{d\theta} \csc \theta$:

$$\frac{d}{d\theta} \csc \theta = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \right) = -\frac{(\sin \theta)'}{\sin^2 \theta} = -\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} = -\cot \theta \csc \theta$$

תרגיל: השתמש בהגדרת הנגזרת והוכח: $\frac{d}{dx} (\sin^2 x) = 2 \sin x \cos x$

דוגמאות:

1. מצא את הנגזרת של $y = \sin\left(\frac{3}{5}x + \frac{\pi}{4}\right)$:

$$y = \sin u \quad u = \frac{3}{5}x + \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \cos u \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \cos\left(\frac{3}{5}x + \frac{\pi}{4}\right)$$

2. חשב הנגזרות של $y = \tan^3 2\theta$:

$$y = \tan^3 2\theta \quad u = \tan 2\theta \quad v = 2\theta \Rightarrow y = u^3 \quad u = \tan v$$

$$y' = \frac{d}{d\theta} \tan^3 2\theta = \frac{dy}{du} \frac{du}{dv} \frac{dv}{d\theta} = 3u^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 v} \cdot 2 = 6 \tan^2 2\theta \cdot \frac{1}{\cos^2 2\theta} = 6 \tan^2 2\theta \sec^2 2\theta$$

3. מצא את $\frac{dy}{dx}$:

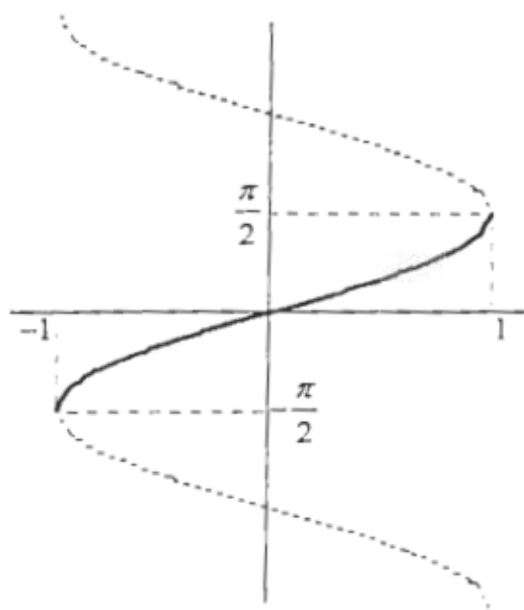
$$y = x^3 \tan^2 \frac{x}{4}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x^3 \frac{d}{dx} \left(\tan^2 \frac{x}{4} \right) + (x^3)' \cdot \tan^2 \frac{x}{4} = 2x^3 \tan \frac{x}{4} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{4}} \cdot \frac{1}{4} + 3x^2 \tan^2 \frac{x}{4} = \\ &= \frac{1}{2} x^2 \tan \frac{x}{4} \left(x \sec^2 \frac{x}{4} + 6 \tan \frac{x}{4} \right) \end{aligned}$$

6.9 הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות

א. הפונקציה $y = \arcsin x$

הגדרנו את הפונקציה $y = \sin^{-1} x$ או $y = \arcsin x$ כפונקציה ש- y היא הזווית ברדיאנים שהסינוס שלה הוא x . כלומר - המקיימת את הקשר $y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$. x מקבל אפוא ערכים בין -1 ל-1. היות ויש אינסוף ערכי y המתאימים לכל x (למשל ל- $x=0$ - $y=0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$), החלטנו לבחור תחום בו הפונקציה היא חד-ערכית. קראנו לתחום ענף ראשי או ענף ראשי. במקרה שלנו מדובר בתחום $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.



איור 6.6

על מנת לגזור את הפונקציה $y = \arcsin x$ נוכל לגזור פונקציה השקולה לה: $x = \sin y$, להלן:

$$1 = \cos y \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

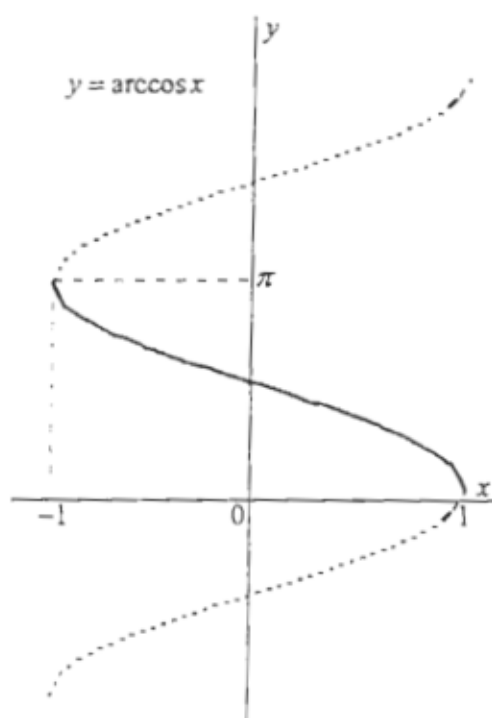
כידוע קיים הקשר $\cos y = \pm \sqrt{1 - \sin^2 y}$. היות

ו- $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ הרי הוא חייב להיות חיובי (ברביע הראשון וברביע הרביעי ה- $\cos$ חיובי). ולכן:

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

מסקנה: אם $y = \arcsin x$, הרי ש-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$



איור 6.7

ב. הפונקציה $y = \arccos x$

נגזור עתה את $y = \arccos x$ שהיא שקולה ל- $x = \cos y$, כלומר מהי הזווית שהקוסינוס שלה הוא x . פונקציה זו הערך הראשי שלה הוא: $0 \leq y \leq \pi$. נחשב y' ע"י כך שנגזור את שני האגפים ב- $x = \cos y$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}(\cos y) \Rightarrow 1 = -\sin y \frac{dy}{dx} \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{\sin y} \end{aligned}$$

ובתחום הנדון, $\sin y \geq 0$ ולכן:

$$\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{d}{dx} \cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{או:}$$

הערה: א. אילו היינו בוחרים בענף ראשי אחר למשל בין $-\pi \leq y \leq 0$ אזי $\sin y$ היה שלילי

והיינו מציבים $\sin y = -\sqrt{1 - x^2}$ והנגזרת הייתה חיובית כמו ב- $\arcsin x$.

ג. הפונקציה $y = \arctan x$

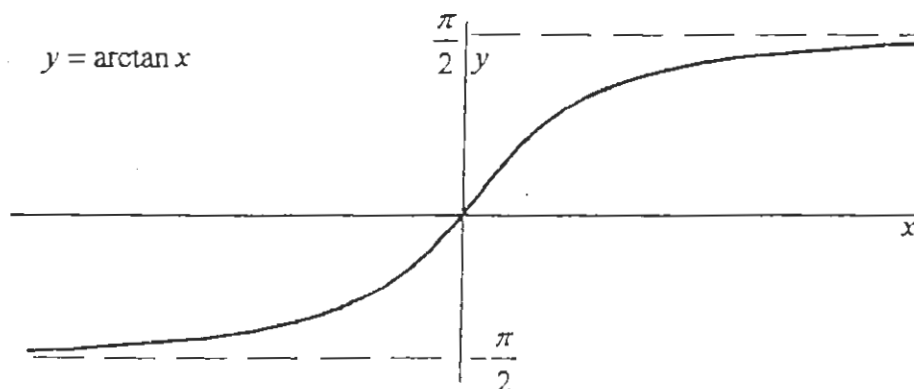
נחשב עתה את הנגזרת של הפונקציה - $y = \tan^{-1} x = \arctan x$:

פונקציה זו משמעותה היא ש- y היא הזווית שהטנגנס שלה הוא x כלומר $x = \tan y$ (ראה איור) הענף

הראשי הוא: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. אם כן נחשב עתה את $\frac{dy}{dx}$ ע"י גזירת שני אגפי המשוואה $x = \tan y$

לפי x : תע"י שימוש בקשר $\cos^2 \alpha = \frac{1}{\tan^2 \alpha}$ טריגונומטריה:

$$1 = \frac{1}{\cos^2 y} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$



איור 6.8

ד. הפונקציה $y = \operatorname{arccot} x$

נחשב עתה את הנגזרת של הפונקציה - $y = \cot^{-1} x = \operatorname{arccot} x$:

פונקציה זו משמעותה היא ש- y היא הזווית שהקוטנגנס שלה הוא x כלומר $x = \cot y$. נחשב את

$\frac{dy}{dx}$ ע"י גזירת שני אגפי המשוואה $x = \cot y$ לפי x

$$1 = \csc^2 y \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\csc^2 y} = -\frac{1}{1 + \cot^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

וע"י טריגונומטריה:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1 + x^2}$$

כלומר:

דוגמאות:

1.

$$\frac{d}{dx} \cos^{-1} \left(\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{x^4} \right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(-\frac{2}{x^3} \right) = \frac{2x^2}{x^3 \sqrt{x^4 - 1}} = \frac{2}{x \sqrt{x^4 - 1}}$$

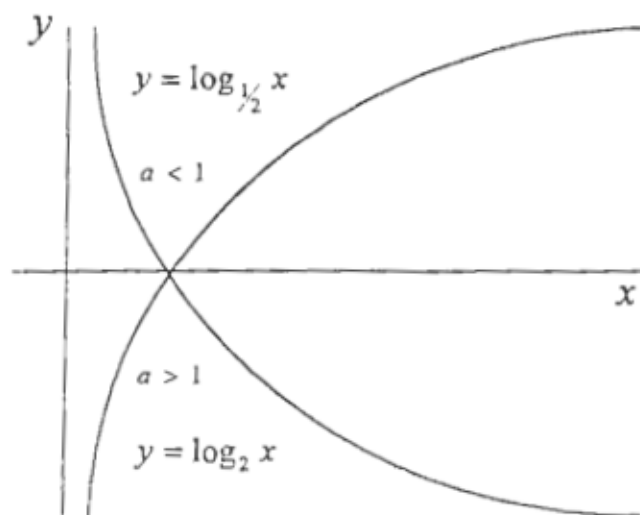
2.

$$\frac{d}{dx} \arctan(\sqrt{1+x}) = \frac{1}{1+(1+x)} \cdot \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2(2+x)\sqrt{1+x}}$$

6.10 הפונקציה הלוגריתמית והפונקציה המעריכית

הפונקציה הלוגריתמית $y = \log_a x$ שקולה לפונקציה $x = a^y$ כלומר היא הפונקציה ההפוכה לפונקצית החזקה $y = a^x$. a נקרא **הבסיס** $a > 0, a \neq 1$.

באיור 6.9 רואים את התיאור הגרפי של הפונקציה הלוגריתמית (שים לב לשני המצבים האפשריים):



איור 6.9

מעבר בין בסיסי לוגריתמים

ניתן לבצע מעבר מבסיס אחד לבסיס אחר לפי הנוסחה: $\log_B A = \frac{\log_C A}{\log_C B}$

הוכחה: $\log_B A = x \Leftrightarrow B^x = A$

ניקח לוג של שני האגפים לפי בסיס C ונקבל:

$\log_C B^x = \log_C A$

$x \log_C B = \log_C A$

$x = \frac{\log_C A}{\log_C B}$

מכאן:

דוגמה:

$$\log_8 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 8} = \frac{4}{3}$$

על מנת לחשב את העזרת של הפונקציה הלוגריתמית נחשב תחילה את הגבול:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

בעזרת פיתוח הבינום של ניוטון עבור n שלמים:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \dots + b^n$$

מכאן:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^n = \\ &= 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

אם ניקח

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

וטור זה, אם מחברים את איבריו מקבלים תוצאה סופית (כמו בטור גיאומטרי אינסופי):

$$1 + 1 + 0.5 + 0.16666.. + 0.04166.. + 0.008333.. + 0.0013888..$$

ככל שמחשבים יותר איברים מקבלים תוצאה יותר מדויקת. את הגבול עצמו (שהוא תוצאת חיבור כל אינסוף האיברים) נסמן באות האנגלית e :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.718281828459...$$

בשנת 1884 חישובו 346 מקומות אחרי הנקודה העשרונית את e . היום מחשבים בעזרת מחשבים מליוני מקומות אחרי הנקודה. נחשב עתה את הנגזרת של $y = \log_e x$:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_e(x + \Delta x) - \log_e(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x}{x \cdot \Delta x} \log_e \frac{x + \Delta x}{x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_e \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \dots \end{aligned}$$

$$u \equiv \frac{x}{\Delta x} \quad \text{וכעת נגדיר}$$

$$\text{אם } \Delta x \rightarrow 0 \text{ אז } u \equiv \frac{x}{\Delta x} \rightarrow \infty$$

$$\dots = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \log_e \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = \frac{1}{x} \lim_{u \rightarrow \infty} \log_e \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = \frac{1}{x} \log_e e$$

שים לב: הנחנו כאן כי גבול של לוגריתם שווה ללוגריתם של הגבול.

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x} \log_e e$$

כלומר שהנגזרת של פונקציית הלוגריתם היא:

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x} \log_e e = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}$$

אם נבחר את בסיס הלוגריתם כ- e נקבל:

תוצאה זו מסבירה את היעילות בבחירת e כבסיס הלוגריתמים שכן הגורם $\log_e e$ מצטמצם ל-1.

דוגמאות:

$$y = \log_4(3x + 7)$$

1.

$$y' = \frac{1}{3x + 7} (\log_4 e) \cdot 3 = \frac{3 \log_4 e}{3x + 7}$$

ניקח $u = 3x + 7$ כמתווך:

$$2. \quad y = \ln[33x^3(x^2 + 3)^2(4x - 3)^4] \quad \text{חשב } y'$$

$$y = \ln 33 + 3 \ln x + 2 \ln(x^2 + 3) + 4 \ln(4x - 3)$$

כדאי לכתוב:

$$y' = 0 + 3 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x^2 + 3} \cdot 2x + \frac{4 \cdot 4}{4x - 3} = \frac{3}{x} + \frac{4x}{x^2 + 3} + \frac{16}{4x - 3} =$$

$$= \frac{3(x^2 + 3)(4x - 3) + 4x^2(4x - 3) + 16x(x^2 + 3)}{x(x^2 + 3)(4x - 3)} = \frac{44x^3 - 21x^2 + 84x - 27}{x(x^2 + 3)(4x - 3)}$$

3. חשב $\frac{dy}{dx}$ עבור $y = \ln^2(3x+4)$.

נציב $z = \ln(3x+4)$ ו- $u = 3x+4$:

$$y = z^2 \quad z = \ln u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2z \cdot \frac{1}{u} \cdot 3 = \frac{6}{3x+4} \cdot \ln(3x+4)$$

4. לעתים קל יותר לחשב נגזרת על ידי שימוש בלוגריתמים. לדוגמה, חשב:

$$y = \frac{x(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

תרגיל זה מסובך לחישוב ע"י השיטה הרגילה. יש כאן גם מנה וגם מכפלה ולכן כדאי לחשב תחילה $\ln$ של שני האגפים:

$$\ln y = \ln x + 2 \ln(1-x^2) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

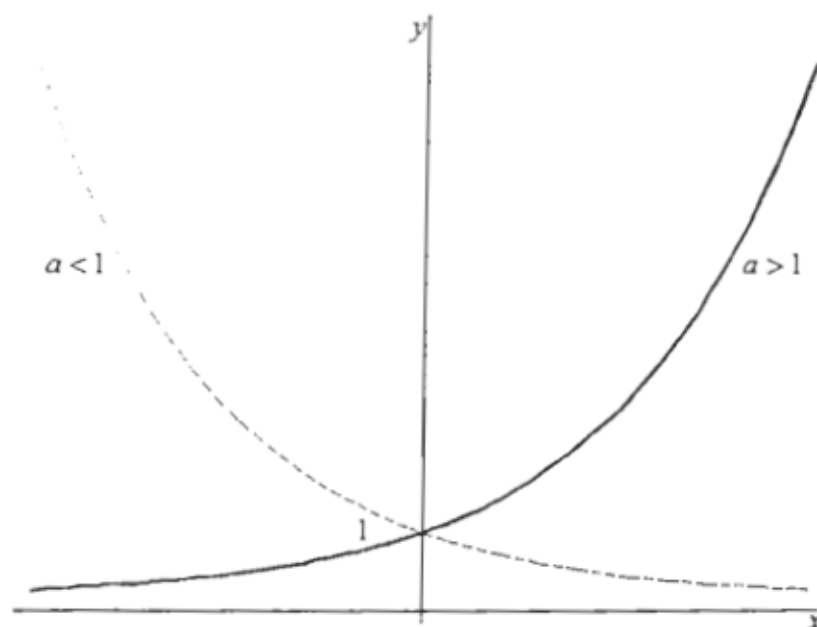
גוזרים את שני האגפים לפי x :

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{2 \cdot (-2x)}{1-x^2} - \frac{2x}{2(1+x^2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{x} - \frac{4x}{1-x^2} - \frac{x}{1+x^2} \right) = \frac{(1-5x^2-4x^4)(1-x^2)}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

6.11 הפונקציה המעריכית

נמצא את הנגזרת של הפונקציה ההפוכה ללוגריתמית - הפונקציה המעריכית: $y = a^x$. אנו נטפל אך ורק במצב בו $a > 0$, $a \neq 1$. תיאורה הגרפי של הפונקציה:



איור 6.10

$$\log_a y = x$$

על מנת לגזור ניקח לוגריתם של שני האגפים:
נגזור לפי x :

$$\frac{\log_a e \cdot dy}{y \cdot dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\log_a e} = a^x \log_a a = a^x \ln a$$

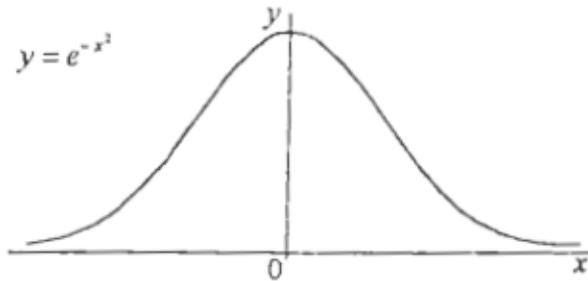
כלומר $(a^x)' = a^x \ln a$. אם נגזור את הפונקציה e^x נקבל: $(e^x)' = e^x \ln e = e^x \cdot 1 = e^x$.

מסקנה מעניינת - הנגזרת של הפונקציה e^x היא e^x וחוזר חלילה. כלומר השיפוע או מידת הגידול של הפונקציה ושל כל הנגזרות שלה יהיו שוות ל- e^x .
דוגמאות:

1. גזור - $y = e^{-x^2}$:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2xe^{-x^2}$$

צורת הפונקציה היא צורה של פעמון.
ב- $x = 0$ השיפוע הוא אפס, ב- $x > 0$ השיפוע שלילי, וב- $x < 0$ השיפוע חיובי.



איור 6.11

2. $y = 10^{\sin x}$:

$$\frac{dy}{dx} = 10^{\sin x} \ln 10 \cdot \cos x$$

3. $x = e^{-at} \sin \omega t$ (α ו- ω קבועים):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= e^{-at} \cdot (-\alpha) \sin \omega t + e^{-at} \cos \omega t \cdot \omega = \\ &= e^{-at} (\omega \cos \omega t - \alpha \sin \omega t) \end{aligned}$$

חשב $\frac{dx}{dt}$:

4. גזור את: $y = \ln(e^x + 1)$

$$y' = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

עתה אנו יכולים לחשב את נוסחת הנגזרת של $y = x^n$ כאשר n הוא כל מספר ממשי (רציונלי או אי-רציונלי):

$$y = x^n \Rightarrow \ln y = n \ln x$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = n \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = n \cdot \frac{y}{x} = n \cdot \frac{x^n}{x} = nx^{n-1}$$

כאן לא השתמשנו בשום הנחה לגבי n ולכן הנוסחה $(x^n)' = nx^{n-1}$ נכונה לכל n ממשי.

6.12 נגזרות של פונקציות טרנסצנדנטיות המכילות את x גם בבסיס וגם במעריך:

$$y = u(x)^{v(x)} \quad \text{באופן כללי:}$$

על מנת למצוא את הנגזרת נוח ביותר לקחת $\ln$ של שני האגפים ולגזור לפי x :

$$\ln y = v(x) \ln u(x)$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = v'(x) \ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)} u'(x)$$

לדוגמה:

$$y = x^x \quad 1.$$

$$\ln y = x \ln x$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = x^x (\ln x + 1)$$

$$y = x^{\ln x} \quad 2.$$

$$\ln y = \ln x \ln x = (\ln x)^2 = \ln^2 x$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x^{\ln x - 1} \cdot \ln x$$

$$y = x^{x^2} \quad 3.$$

$$\ln y = x^2 \ln x$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{x^2+1} (2 \ln x + 1)$$

6.13 נגזרות של פונקציות היפרבוליות

לעתים קרובות מופיעות קומבינציות של פונקציות אקספוננציאליות אשר חוזרות על עצמן, ולכן ראוי לתת להם שמות של פונקציות. למשל: e^x מופיע לעתים קרובות בקומבינציה $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. פונקציה זו נקראת **סינוס היפרבולי של x** ומסמנים אותה ב- $\sinh x$.

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{כלומר:} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{וכמו כן מגדירים}$$

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad \text{בנוסף:} \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

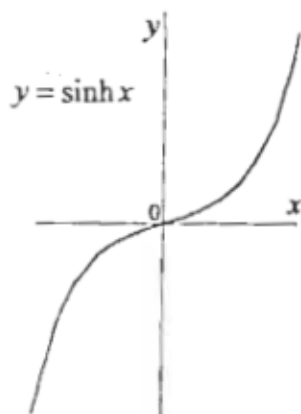
נבדוק עתה את ההתנהגות של פונקציות אלה. נשים לב כי $\sinh 0 = 0$ וכן כי $\sinh(-x) = -\sinh x$. פונקציה כזו נקראת אי-זוגית.

$$\sinh x \rightarrow \frac{1}{2}e^x \quad \text{כמו כן אם } x \rightarrow \infty$$

$$\sinh x \rightarrow -\frac{1}{2}e^{-x} \quad \text{וכן אם } x \rightarrow -\infty$$

כלומר שהפונקציה נראית כמו באיור 6.12.

נגזור:



איור 6.12

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \sinh x &= \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \right] = \\ &= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \cosh x\end{aligned}$$

נשים לב גם לקשר החשוב $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \\ &= \frac{1}{4} (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - \frac{1}{4} (e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = 1\end{aligned}$$

נטאר את הפונקציה $y = \cosh x$ (ראה איור 6.13).



איור 6.13

$$\cosh 0 = 1$$

$$\cosh(-x) = \cosh(x)$$

$$\cosh x \rightarrow \frac{1}{2} e^x$$

$$\cosh x \rightarrow \frac{1}{2} e^{-x}$$

יש לשים לב בביצוע הנגזרת כי:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \right] = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \sinh x$$

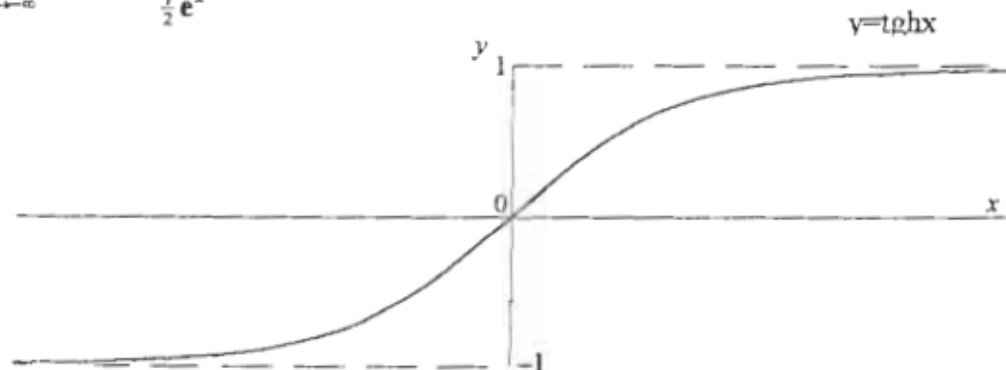
לא כמו הסימן ההפוך כאשר גוזרים את פונקציית הקוסינוס הרגילה.

הפונקציה $y = \tanh x$

$$\tanh 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x = \frac{\frac{1}{2} e^x}{\frac{1}{2} e^x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = \frac{-\frac{1}{2} e^x}{\frac{1}{2} e^x} = -1$$



איור 6.14

$$\frac{d}{dx} \tanh x = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sinh x}{\cosh x} \right) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

נגדיר:

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2 \cosh^2 x - 1 = 1 + 2 \sinh^2 x \quad \text{כמו כן, קל להוכיח כי:}$$

באופן דומה להוכחות שהבאנו ניתן להוכיח כי:

$$\frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$$

6.14 הצגה פרמטרית של פונקציה

נוכיח תחילה נוסחה חשובה: נתונה הפונקציה $u = u(v)$ אזי $\frac{du}{dv} = 1 / \frac{dv}{du}$ הוכחה:

$$\frac{du}{dv} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta v} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v / \Delta u} = \frac{1}{\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \Delta v / \Delta u} = 1 / \frac{dv}{du}$$

נעזרנו בהנחה אם $\Delta v \rightarrow 0$ גם $\Delta u \rightarrow 0$ שזה נכון בכל פונקציה רציפה.

$$\frac{dy}{dx} = 1 / \frac{dx}{dy} \quad x = y^{1/3}$$

דוגמאות:

$$y = x^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y^{-2/3}}{3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} = \frac{1}{3x^2}$$

לעתים קרובות נוה לבטא את העובדה ש- y פונקציה של x באמצעות משתנה שלישי הנקרא פרמטר. כלומר גם x וגם y הם פונקציות של פרמטר t למשל:

$$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t)$$

לכל ערך של t נקבעים x ו- y ומקבלים קשר בין x ו- y . למשל אם נציב $t = \varphi^{-1}(x)$ במשוואה השנייה

נקבל $y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$ - וזו פונקציה של x בלבד! לדוגמה:

$$x = 2t + 1 \quad y = t^2 - 4$$

$$t = \frac{x-1}{2}$$

$$y = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - 4 = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} - \frac{15}{4}$$

וזוהי פרבולה.

לא תמיד נוה לחלץ ולכתוב את y כפונקציה מפורשת של x ולעתים קרובות מעניין אותנו הערך של

הנגזרת $\frac{dy}{dx}$. ברור שניתן לחשב את $\frac{dx}{dt}$ ו- $\frac{dy}{dt}$. השאלה היא איך נחשב את $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$$

לפי כלל השרשרת:

אבל $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$ ולכן $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ אם נחזור לדוגמה הקודמת:

$x = 2t + 1$ $y = t^2 - 4$: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{2} = t$ והנגזרת בנקודה $t=3$ היא 3. הנקודה $t=3$ היא $(x, y) = (7; 5)$.

באופן אחר קיבלנו ש- $y = \frac{(x-1)^2}{4} - 4$ $\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{2} = t$

כלומר התוצאה זהה בשתי השיטות. נראה עתה דוגמה פיסיקלית בהצגה פרמטרית.

מקומו של חלקיק הנע ע"פ עקומה נתון בכל זמן t ע"י המשוואות הפרמטריות:

$$x = 2 - 3 \cos t \quad y = 3 + 2 \sin t \quad \text{כאשר } x \text{ ו-} y \text{ נמדדים במטרים ו-} t \text{ בשניות.}$$

א. מצא את קצב השינוי בזמן של הקואורדינטה x ב- $t = \frac{\pi}{3}$ (למעשה רכיב ה- x של מהירות החלקיק ברגע הנתון).

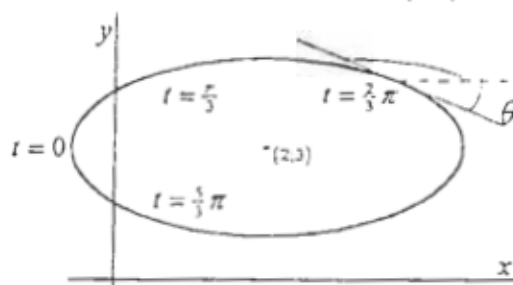
ב. מצא את קצב השינוי בזמן של הקואורדינטה y ב- $t = \frac{\pi}{3}$ (למעשה רכיב ה- y של מהירות החלקיק ברגע הנתון).

ג. מצא את θ - זווית הנטייה של המשיק ב- $t = \frac{2\pi}{3}$ (זהו כיוון התנועה באותה שניה).

נוכל לכתוב את x כפונקציה של y :

$$\frac{y-3}{2} = \sin t \quad \frac{x-2}{3} = -\cos t \Rightarrow \left(\frac{y-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-2}{3}\right)^2 = 1$$

זהו הקשר בין x ל- y וזו למעשה משוואת אליפסה שמרכזו ב- $(2; 3)$.



איור 6.15

א. $\frac{dx}{dt} = 3 \sin t$ ובנקודה $t = \frac{\pi}{3}$ מקבלים:

$$\frac{dx}{dt} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

של $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ מטרים לשניה (מהירות בכיוון x). על מנת

$$\frac{dy}{dt} = 2 \cos t = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

למצוא את המהירות: $\frac{dy}{dt} = 2 \cos t = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ ואז המהירות שווה ל- $\sqrt{1 + \frac{9 \cdot 3}{4}}$ $v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ שזה $\frac{\sqrt{31}}{2}$ מ' לשניה.

$$\frac{dy}{dt} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad \Leftarrow \quad \cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad t = \frac{5\pi}{3} \quad \frac{dy}{dt} = 2 \cos t$$

ב. קואורדינטת ה- y גדלה בקצב של 1 מ' לשניה.

ג. נמצא את ϑ : $\tan \vartheta = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2 \cos t}{3 \sin t} = \frac{2}{3} \cot t$$

$$\vartheta = \arctan\left(\frac{2}{3} \cot t\right) = \arctan\left(\frac{2}{3} \cot \frac{2\pi}{3}\right) = \arctan\left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \arctan\left(-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right) = -21.05^\circ$$

ד. נוכל לחשב גם גודל נוסף והוא קצב השינוי בזמן של הזווית ϑ , כלומר את $\frac{d\vartheta}{dt}$:

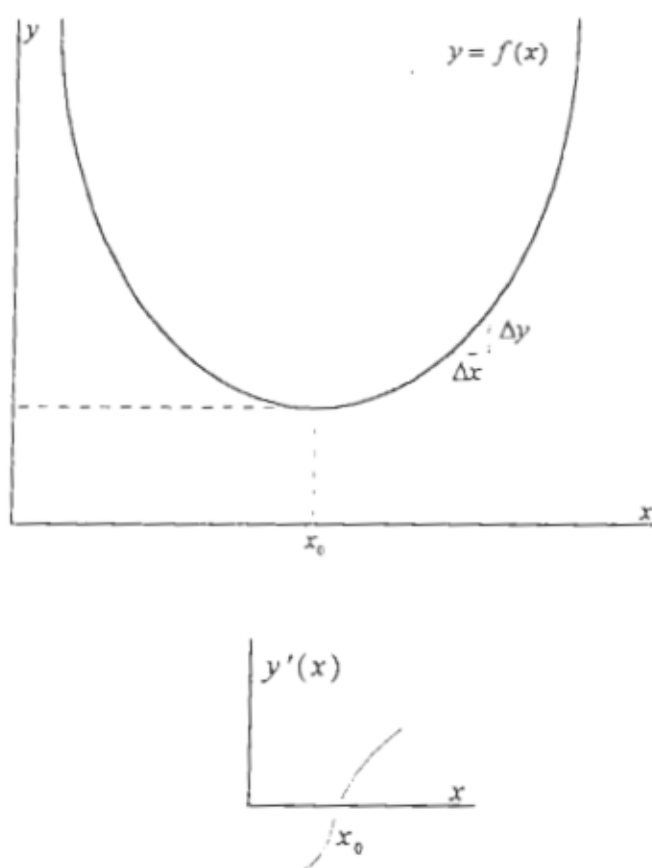
$$\vartheta = \arctan\left(\frac{2}{3} \cot t\right) \Rightarrow \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sin^2 t}}{1 + \left(\frac{2}{3} \cot t\right)^2} = \frac{-6 \csc^2 t}{9 + 4 \cot^2 t}$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{-6\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2}{9 + 4\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^2} = -\frac{24}{31} \quad \text{ועבור } t = \frac{2\pi}{3} \text{ נקבל:}$$

כלומר שזווית הנטייה של המשיק קטנה בקצב (מהירות) של $\frac{24}{31}$ רדיאנים לשניה.

7. פונקציה עולה ויורדת נקודות קיצוניות.**7.1 פונקציה עולה ויורדת**

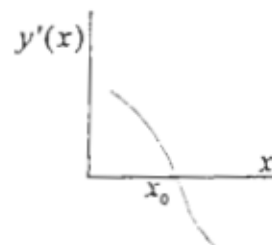
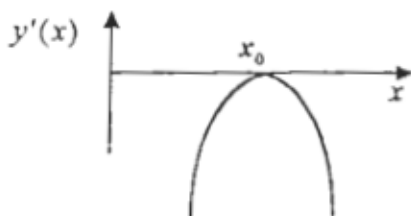
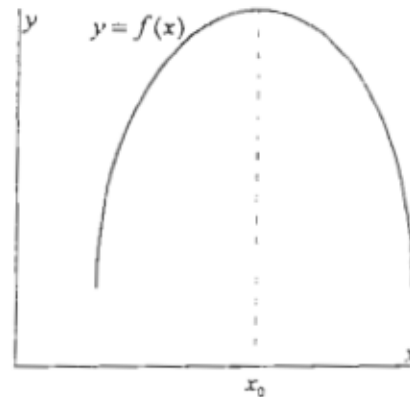
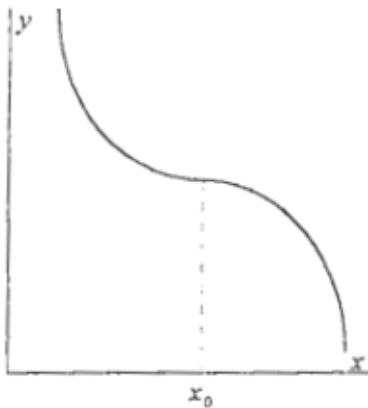
נניח הפונקציה $y = f(x)$. הפונקציה עולה בתחום שבו x גדל גם y גדל. הפונקציה יורדת בתחום שבו x גדל ו- y קטן. אם נתבונן בגרף, נוכל לראות שעבור $x > x_0$ הפונקציה עולה, ואילו עבור $x < x_0$ הפונקציה יורדת. אם מתקיים $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ הפונקציה עולה שכן Δx חיובי פירושו שגם Δy חיובי $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) > 0$. אם $y' < 0$ הפונקציה יורדת, שכן Δx חיובי גורר אחריו Δy שלילי $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) < 0$. אפשר להסתכל גם מבחינת השיפוע. אם השיפוע חיובי ($\tan \theta > 0$) הפונקציה עולה, ואם השיפוע שלילי ($\tan \theta < 0$) אז הפונקציה יורדת.



איור 7.1: נקודת מינימום

7.2 מינימום ומכסימום- תנאי הכרחי.

אם נסתכל על הגרף באיור 7.1 ונשאל את עצמנו מהי הנגזרת בנקודה $x = x_0$ התשובה היא: $f'(x_0) = 0$. בנקודה זו הנגזרת עוברת מערך שלילי לחיובי ולכן היא חייבת לעבור דרך האפס. או: בנקודה זו, המשיק לפונקציה מקביל לציר ה- x . הנקודה (x_0, y_0) נקראת **נקודת מינימום**. בשרטוט הנראה באיור 7.2, (x_0, y_0) היא נקודת מקסימום, וגם בנקודה זו קיים $f'(x_0) = 0$. ישנה עוד אפשרות אחת שבה הנגזרת שווה לאפס ($f'(x_0) = 0$). זהו המקרה שהפונקציה לא משנה את כיוונה מעליה לירידה או להפך, אבל השיפוע שלה ב- x_0 הוא אפס (ראה איור 7.3). נקודה כזו נקראת **נקודת פיתול**. בנקודות בהן $f'(x) = 0$ יש נקודה קיצונית (מינימום או מקסימום) או נקודת פיתול.



איור 7.3: נקודת פיתול.

איור 7.2: נקודת מכסימום.

7.3 דוגמה למינימום ומכסימום.

נתבונן בדוגמה הבאה.

$$y = x^4 - ax^2 + b \quad a > 0$$

נמצא את נקודות ה- x שעבורן יש נקודות קיצוניות ונשרטט את הפונקציה.

אנו רואים את העובדות הבאות:

$$א. f(x) = f(-x) \text{ - הפונקציה סימטרית (זוגית)}$$

ב. עבור $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ הפונקציה שואפת ל- ∞ .כיוון ש- x^4 שולט והופך ל- ∞ .

נבדוק מהן הנקודות הקיצוניות:

$$f'(x) = 4x^3 - 2ax = 2x(2x^2 - a)$$

נקודות קיצוניות אפשריות כאשר:

$$א. x = 0$$

$$ב. x = \pm \frac{\sqrt{a}}{2}$$

נחשב:

$$f(0) = b$$

$$f\left(\pm \frac{\sqrt{a}}{2}\right) = \frac{a^2}{4} - a \frac{a}{2} + b = b - \frac{a^2}{4}$$

הפונקציה לא יכולה לרדת עבור $x > \frac{\sqrt{a}}{2}$ כי אז

היה לה מינימום שם. נתונים אלו מספיקים כדי

לצייר את הפונקציה ולקבוע מהם

נקודות המינימום והמכסימום, ראה איור

7.5

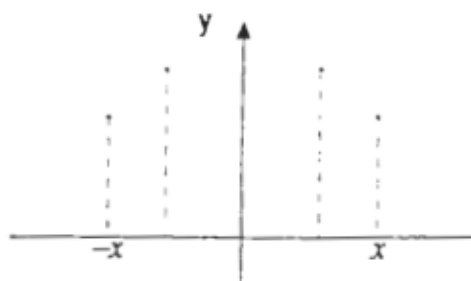
זה המצב כאשר $\frac{a^2}{4} > b > 0$. אם

$$b < \frac{a^2}{4}$$

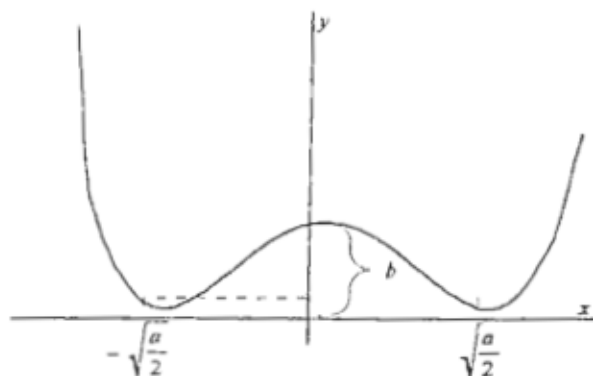
באיור 7.6.

אם היה $a < 0$ היינו מקבלים פתרון בודדעבור $f'(x) = 0$, והוא $x = 0$, והגרף היה

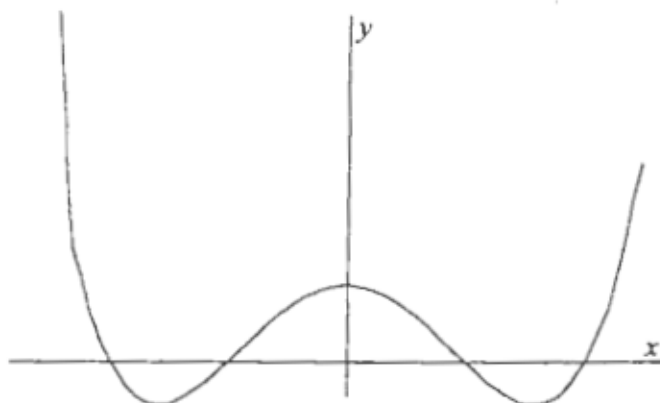
נראה כך:



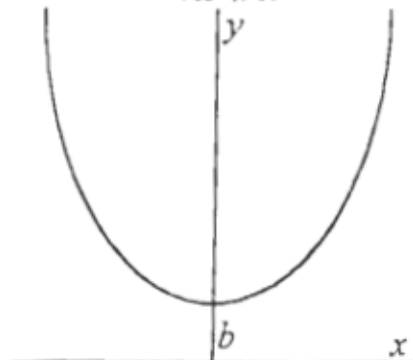
איור 7.4: פונקציה זוגית.



איור 7.5



איור 7.6



איור 7.7

7.4 נקודות קיצוניות- תנאי מספיק.

בנקודה x_0 שבה הנגזרת הראשונה מתאפסת, $f'(x_0) = 0$, עדיין איננו יודעים אם לפונקציה יש בנקודה זו מקסימום, מינימום או נקודת פיתול. מהם הקריטריונים לדעת מה טיבה של הנקודה המקיימת $f'(x) = 0$ או מהם התנאים המספיקים.

משפט:

אם $f'(x_0) = 0$ ו- $f''(x_0) > 0$ יש לפונקציה נקודת מינימום ב- $x = x_0$.

אם $f'(x_0) = 0$ ו- $f''(x_0) < 0$ יש לפונקציה נקודת מקסימום ב- $x = x_0$.

אם $f'(x_0) = 0$ ו- $f''(x_0) = 0$ המצב לא נקבע, תיתכן נקודת מינימום, מקסימום או פיתול.

הוכחה:

א. בנקודה x_0 , הנתונים $f'(x_0) = 0$,

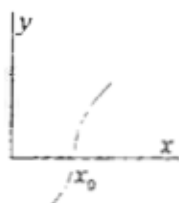
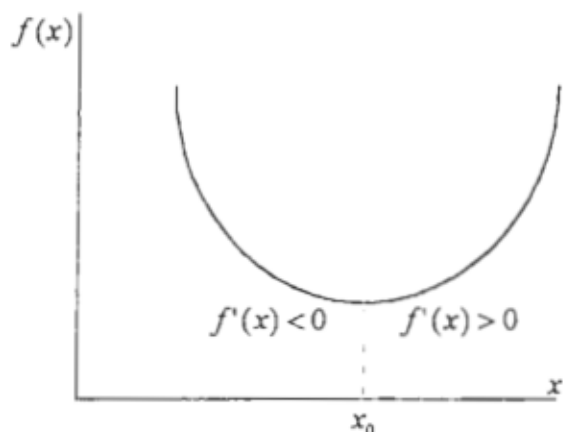
ו- $f''(x_0) > 0$ משמעותם שהפונקציה $f'(x)$ נמצאת בעליה, כלומר: עוברת מערך שלילי לערך חיובי דרך האפס, ולכן יש נקודת מינימום (איור 7.8)

ב. בנקודה x_0 , הנתונים $f'(x_0) = 0$,

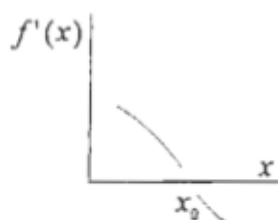
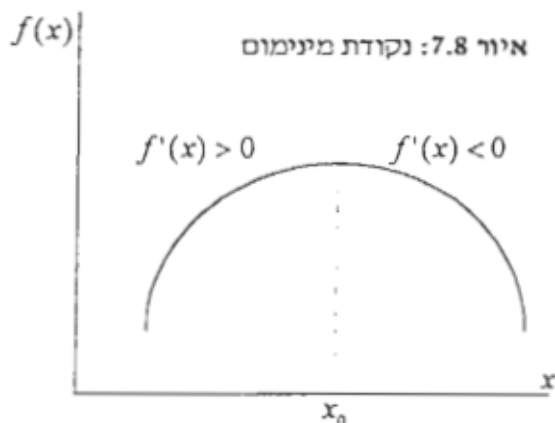
ו- $f''(x_0) < 0$ משמעותם שהפונקציה $f'(x)$ נמצאת בירידה, עוברת מערך חיובי לערך שלילי דרך האפס, ולכן יש נקודת מקסימום:

ג. אם $f'(x_0) = 0$ ו- $f''(x_0) = 0$, תיתכן

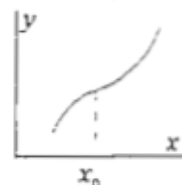
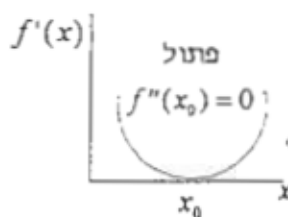
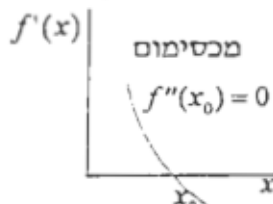
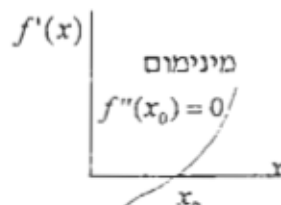
נקודת מקסימום, מינימום או פיתול. נוכל לראות זאת בדוגמאות הבאות:



איור 7.8: נקודת מינימום



איור 7.9: נקודת מקסימום



איור 7.10

במקרה זה נבדוק אם הנגזרת הראשונה משנה סימן בסביבות x_0 ולפי זה נקבע אם הנקודה מינימום, מקסימום או פיתול.

נחזור לדוגמה הקודמת בסעיף 7.3.

$$y' = 4x^3 - 2ax = 0$$

$$y = x^4 - ax^2 + b \quad a > 0$$

$$x_1 = 0 \quad y'' < 0 \quad \text{מקסימום}$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{a}{2}} \quad y'' = 12\frac{a}{2} - 2a > 0 \quad \text{מינימום}$$

$$x_3 = -\sqrt{\frac{a}{2}} \quad y'' > 0 \quad \text{מינימום}$$

אם a שלילי, מקבלים רק נקודת מינימום ב- $x = 0$.
דוגמה

$$y = (x-1)^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(x-1)^2 = 0$$

הנגזרת שווה לאפס עבור $x = 1$:

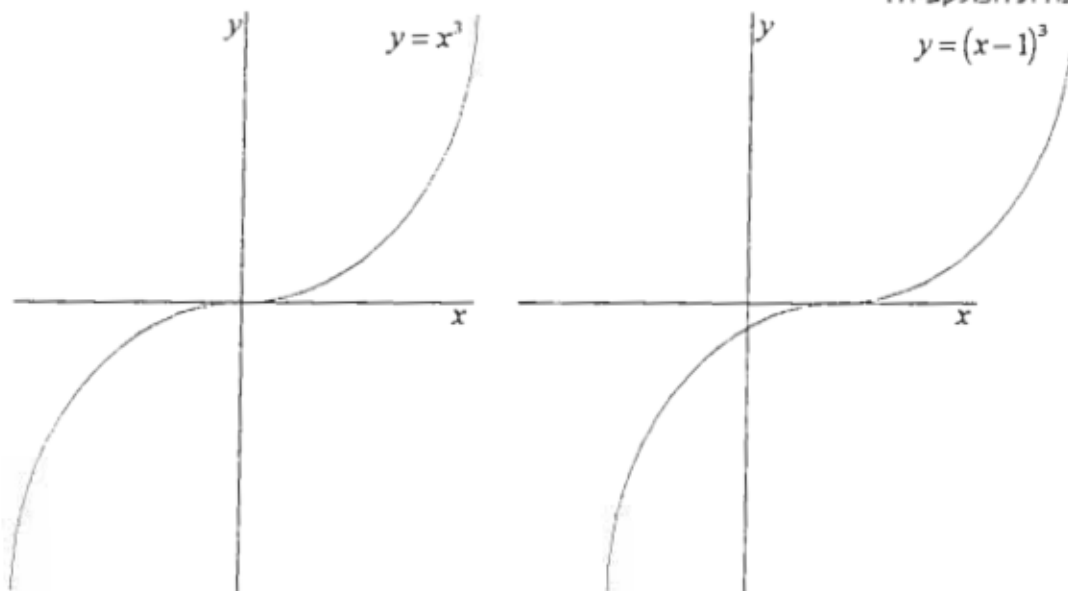
הנגזרת השניה אף היא אפס ב- $x = 1$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6(x-1) = 0$$

אם כן, גם הנגזרת הראשונה וגם הנגזרת השניה מתאפסות ב- $x = 1$.
נבדוק את הנגזרת הראשונה:

עבור $x < 1$ קיים $\frac{dy}{dx} > 0$ וגם עבור $x > 1$ קיים $\frac{dy}{dx} > 0$.

כלומר, הפונקציה לא משנה את כיוון השיפוע שלה ולכן אין מקסימום או מינימום אלא נקודת פיתול.
צורת הפונקציה:



איור 7.11

השיפוע חיובי והוא הולך וקטן עד לאפס, ואז שוב חוזר וגדל!

פונקציה זו דומה לפונקציה $y = x^3$ (ראה איור) אלא שהיא מוזזת ימינה ביחידה.

דוגמה נוספת $y = x^4$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 = 0$$

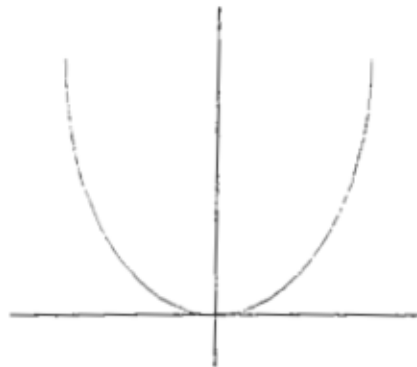
העזרת שווה לאפס ב- $x = 0$.
נבדוק מהי העזרת השנייה:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 = 0$$

גם היא שווה לאפס ב- $x = 0$.
לכן נבדוקמה קורה לעזרת בסביבות $x = 0$:

$$\frac{dy}{dx} (x > 0) > 0$$

$$\frac{dy}{dx} (x < 0) < 0$$

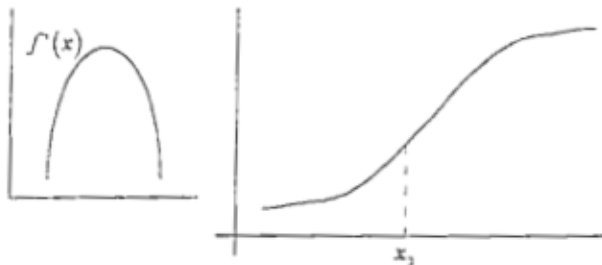


איור 7.12

העזרת הראשונה הופכת משלילית לחיובית ולכן יש כאן נקודת מינימום!
יתכן גם מקרה בו יש תמיד נקודת פיתול והוא:

$$f''(x_0) = 0 \quad f'(x_0) \neq 0$$

השיפוע הולך וגדל עד לערך מסוים ואחר-כך הולך וקטן נקודת המעבר נקראת נקודת פיתול.
במקרה זה העזרת הראשונה לא משנה



איור 7.13

סימן (ראה איור).
ואילו העזרת השנייה משנה סימן. במקרה זה מסימן חיובי לשלילי (ראה איור 7.13).

7.5 סיכום התנאים המספיקים וההכרחיים לנקודות מכסימום מינימום ופיתול

- אם $f'(x_0) = 0$ ו- $f''(x_0) > 0$ אזי x_0 היא נקודת מינימום
 - ב. אם $f'(x_0) = 0$ ו- $f''(x_0) < 0$ אזי x_0 היא נקודת מכסימום
 - ג. אם $f'(x_0) \neq 0$ ו- $f''(x_0) = 0$ אזי x_0 היא נקודת פיתול
 - ד. אם $f'(x_0) = 0$ ו- $f''(x_0) = 0$: מצב לא ברור (יתכן מינימום, מכסימום ופיתול)
- אם $\frac{df}{dx} \Big|_{x < x_0} > 0$ ו- $\frac{df}{dx} \Big|_{x > x_0} < 0$ הם בעלי סימנים הפוכים, יש מינימום או מכסימום.
ואם הם בעלי אותו סימן יש נקודת פיתול.

סוג הנקודה	$\frac{df}{dx} \Big _{x < x_0}$	$\frac{df}{dx} \Big _{x > x_0}$
מינימום	-	+
מכסימום	+	-
נקודת פיתול	+	+
נקודת פיתול	-	-

דוגמא:

נתונה פונקציה: $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 22$
מצא נקודות מינימום, מקסימום ופיתול:
נגזרת:

$$y' = 3x^2 + 6x - 9 = 0$$

נחשב את הנגזרת ונשווה לאפס:

$$x_1 = -3 \quad x_2 = 1$$

נחשב את הנגזרת השנייה בנקודות אלו:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x + 6 \quad \left| \begin{array}{ll} x_1 = -3 & y'' < 0 \\ x_2 = 1 & y'' > 0 \end{array} \right.$$

נק' מקסימום

נק' מינימום

נבדוק האם יש נקודה בה הנגזרת השנייה מתאפסת והראשונה לא.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x + 6 = 0$$

$$x = -1$$

בנקודה זו מתקיים ש- $\frac{dy}{dx} \neq 0$ ולכן זוהי נקודת פיתול. ואמנם השיפוע הולך וקטן עד לערך מסוים

ושוב הולך וגדל. השיפוע משנה את מגמתו ולכן הנקודה $x = -1$ היא נקודת פיתול.

דוגמה שימושית לבעיות מינימום ומקסימום.

אדם נמצא בסירה בנקודה P במרחק 5 ק"מ מנקודה A שנמצאת על החוף. הוא רוצה להגיע לנקודה B המרוחקת 6 ק"מ מנקודה A (לאורך החוף). אם הוא שט במהירות של 2 קמ"ש וצועד במהירות של 4 קמ"ש איפה עליו לרדת לחוף על מנת להגיע בזמן הקצר ביותר?

נניח שהוא ירד לחוף בנקודה C במרחק X מ-A, הזמן שלקח לו להגיע מ-P ל-B הוא:

$$t = \frac{\sqrt{5^2 + X^2}}{2} + \frac{6-X}{4}$$

אותנו מענין מהו t המינימלי. כלומר עבור איזה X, t הוא מינימום. נחשב את הנגזרת: $\frac{dt}{dX}$

נחשב מתי הנגזרת מתאפסת.

$$\frac{dt}{dX} = \frac{2X}{4\sqrt{5^2 + X^2}} - \frac{1}{4} = \frac{2X - \sqrt{5^2 + X^2}}{4\sqrt{5^2 + X^2}}$$

$$2X - \sqrt{5^2 + X^2} = 0$$

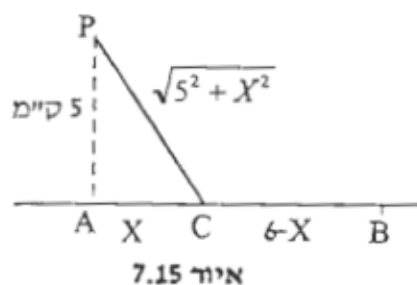
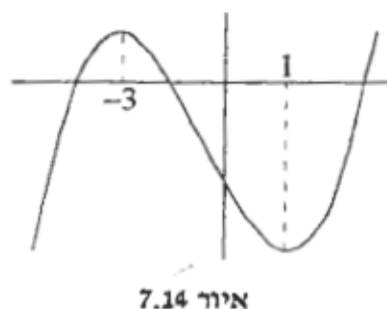
$$2X = \sqrt{5^2 + X^2}$$

$$4X^2 = 25 + X^2$$

$$3X^2 = 25$$

$$X = \frac{5}{3}\sqrt{3} = 2.89$$

נוכל לבדוק נגזרת שניה ולוודא שזו אכן נקודת מינימום. זה אומר שעליו לרדת לחוף בנקודה C המרוחקת 2.89 ק"מ מנקודה A לכיוון נקודה B.



8. דיפרנציאלים

מושג הדיפרנציאל הינו שימושי למדי בפיסיקה. אם נתונה הפונקציה $y = f(x)$ ואנו שואלים את עצמנו בכמה משתנה הפונקציה y הודות לשינוי זעיר (אינפיניטסימלי) Δx של x אזי :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \Delta x.$$

כאשר $\Delta x \rightarrow 0$ נוכל לסמן את השינוי באופן הבא: $dy = f'(x)dx$.

dy נקרא הדיפרנציאל של y , dx נקרא הדיפרנציאל של x .

המשמעות: הנגזרת של y כפול השינוי dx נותן את השינוי ב- y : dy .
דוגמאות:

$$y = 5e^{-x^2+3} \quad (6)$$

$$y = x^2 + 1 \quad \text{או} \quad d(x^2 + 1) = 2x dx \quad (1)$$

$$dy = 2x dx$$

$$dy = 5(-2x)e^{-x^2+3} dx$$

$$= -10xe^{-x^2+3} dx$$

$$y = \cos(x) \quad (2)$$

$$dy = -\sin(x) dx$$

$$d(5e^{-x^2+3} dx) = -10xe^{-x^2+3} dx \quad (3)$$

$$x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2} \quad (7) \quad \text{נגזור}$$

$$\frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}y^{-1/2} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$dy = -\frac{y^{1/2}}{x^{1/2}} dx$$

$$y = e^x \quad (4)$$

$$dy = e^x dx$$

$$y = 8 \sin(x^2 + 1) \quad (5)$$

$$dy = -16x \cos(x^2 + 1) dx$$

לתרגיל:

$$y = x^x \quad y = \tan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$dy = ?$$

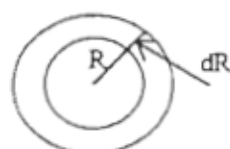
$$dy = ?$$

בעיות:

(1) מה השינוי בנפח כדור הודות לשינוי זעיר ברדיוסו?

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$dV = \frac{dV}{dR} dR = 4\pi R^2$$



איור 8.1

(2) חשב בקירוב $\sqrt[4]{627}$, נבחר כי קרוב ל 625 ששורשו הרביעי הוא 5. נתבונן בפונקציה

: $y = \sqrt[4]{x} = x^{1/4}$ אם $x = 625$ אז $y = 5$. אותנו מעניין: כאשר $\Delta x = 2$ מה ערכו של $y + \Delta y$:

: $y + \Delta y = \sqrt[4]{x + \Delta x}$ נחשב את Δy :

$$y + dy = 5 + 0.004 = 5.004 \quad \text{לכן} \quad dy = \frac{1}{4}x^{-3/4} dx = \frac{1}{4}(625)^{-3/4} \cdot 2 = \frac{2}{4 \cdot 5^3} = \frac{1}{2 \cdot 125} = 0.004$$

נזכיר שוב כי dy נכתב כקרוב עבור Δy , ולכן נקבל $\sqrt[4]{627} = 5.004$.

(3) עבור אלו ערכים של x ניתן להשתמש בביטוי $\sqrt[4]{x}$ במקום ב $\sqrt[4]{x+1}$ אם נדרוש שהשגיאה תהיה קטנה מ- 0.001? $y = \sqrt[4]{x}$

השגיאה: $\Delta y = \sqrt[4]{x+\Delta x} - \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x}$

$$dy = \frac{1}{4} x^{-3/4} dx = \frac{1}{4} x^{-3/4} \cdot 1 < 0.001$$

$$\frac{1}{4x^{3/4}} < 0.001$$

$$4x^{3/4} > 1000$$

$$x^{3/4} > 250$$

$$x > (250)^{4/3} = 250^{1.33} = 250 \cdot 6.3 = 1575$$

זאת אומרת שעבור $x > 1575$ השגיאה בשימוש ב $\sqrt[4]{x}$ במקום ב $\sqrt[4]{x+1}$ תהיה קטנה מ 0.001.

מתי השגיאה תהיה קטנה מאחוז אחד?

$$\frac{dy}{y} < 0.01$$

$$\frac{x^{-3/4}}{4x^{1/4}} < 0.01$$

$$\frac{1}{x} < 0.04$$

$$x > 25$$

בדרך כלל בכדי למצוא את השגיאה היחסית (באחוזים) של פונקציה $y = f(x)$ נקח $\ln y = \ln f(x)$.

נחשב הדיפרנציאל בשני האגפים ונקבל $\frac{1}{y} dy = \frac{f'(x)}{f(x)} dx$, וזה במקרים רבים פשוט יותר.

לדוגמה:

רדיוס כדור 10 מ' עם אפשרות שגיאה של 0.02 מ', מה השגיאה היחסית בנפח הכדור?

מתוך $V = \frac{4\pi}{3} r^3$ מצאנו $dV = 4\pi r^2 dr$ נחלק ב V ונמצא פתרון. אולם נוכל לבצע את החישוב בדרך אחרת

$$\ln V = \ln \frac{4\pi}{3} r^3 = \ln \frac{4\pi}{3} + 3 \ln r$$

$$\frac{dV}{V} = 3 \frac{dr}{r} = \frac{3 \cdot 0.02}{10} = 0.006$$

נזור ונקבל 0.006, כלומר באחוזים השגיאה בנפח הכדור היא 0.6%.

9. חשבון אינטגרלי.

עד כה עסקנו בבעיות של מציאת הנגזרת של פונקציה נתונה. נשאלת השאלה בהינתן נגזרת האם נוכל למצוא את הפונקציה המקורית (הפונקציה שנגזרתה נתונה)?
זוהי שאלה קשה יותר, חשבון אינטגרלי דן בבעיה הזו. במקרים רבים התשובה תהיה פשוטה.
לדוגמא:

$$\text{נתון } \frac{dy}{dx} = 5x^4 \text{ קל לראות ש } y = x^5.$$

במקום לחפש פונקציה שהנגזרת שלה נתונה אנו יכולים לחפש פונקציה שהדיפרנציאל שלה נתון.
לדוגמא: נתון: $dy = 5x^4 dx$ ולכן $y = x^5$.

הסימון $\int 5x^4 dx$ משמעותו מהי הפונקציה ש $5x^4 dx$ הוא הדיפרנציאל שלה (כלומר $dy = 5x^4 dx$)
סימון זה נקרא אינטגרל. האינטגרל הוא אפוא הפעולה ההפוכה לפעולת חישוב הדיפרנציאל. כלומר:

$$d(x^2) = 2x dx$$

$$\int 2x dx = x^2$$

$$d(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$$

נשאלת השאלה האם x^2 היא הפונקציה היחידה שהדיפרנציאל שלה הוא $2x dx$? התשובה היא לא!
לדוגמא: גם הפונקציה $y = x^2 + 5$ או באופן כללי יותר $y = x^2 + C$ לכל C קבוע, הדיפרנציאל שלה
 $dy = 2x dx$ לכן באופן כללי נכתוב $\int 2x dx = x^2 + C$.

לסיכום:

בכתיבה $\int 2x dx$ אנו שואלים מהי הפונקציה שהנגזרת שלה היא $2x$ או מהי הפונקציה שהדיפרנציאל

שלה הוא $2x dx$. התשובה היא $x^2 + C$. לאינטגרל שאין לו תשובה חד ערכית אנו קוראים אינטגרל

בלתי מסוים.
דוגמאות נוספות:

$$\int 2 \cos 5x dx = \frac{2}{5} \sin 5x + C$$

כי הדיפרנציאל של $\frac{2}{5} \sin 5x$ הוא $2 \cos 5x dx$ או הנגזרת של $\frac{2}{5} \sin 5x$ היא $2 \cos 5x$.

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C$$

עד כאן מצאנו עיני ניחוש את הפונקציות, נלמד עתה לחשב אותן בדרך שיטתית.
נוכיח תחילה משפט:

אם $\int f(x) dx = F(x)$ וכן $\int f(x) dx = G(x)$ אזי $G(x) = F(x) + C$.

כלומר לא יתכן שלפונקציה אחת יהיו שני אינטגרלים שיתנו שתי פונקציות שונות מלבד שינוי בקבוע.
הוכחה:

לפי הגדרת האינטגרל

$$F'(x) = f(x)$$

$$G'(x) = f(x)$$

$$[G(x) - F(x)]' = G'(x) - F'(x) = 0$$

כלומר

$$G(x) - F(x) = C$$

לכן פתרון של אינטגרל הוא פונקציה אחת עד כדי קבוע.

9.1 אינטגרלים מיידיים.

לא קל לחשב אינטגרל של דיפרנציאל נתון. אמנם ישנם דיפרנציאלים שאת האינטגרל שלהם נוכל לרשום מיד על סמך נוסחאות ידועות מחשבון דיפרנציאלי. אינטגרלים כאלו נקראים אינטגרלים מיידיים. האינטגרלים המיידיים:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (1)$$

שכן הגזרת של אגף ימין נותנת x^n או הדיפרנציאל נותן $x^n dx$. נוסחה זו נכונה עבור כל n ממשי פרט למקרה $n = -1$. במקרה זה

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$\text{שכן } (\ln x + C)' = \frac{1}{x} \quad \text{דוגמאות:}$$

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x^{3/2} + C$$

$$\int x^3 \sqrt{x} dx = \int x^{4/3} dx = \frac{7}{3} x^{7/3} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad (2)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad (3)$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad (5)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (6)$$

$$\left(\frac{a^x}{\ln a} + C \right)' = \frac{a^x \ln a}{\ln a} = a^x \quad \text{שכן}$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C \quad (7)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C \quad (8)$$

אלו הן הנוסחאות העיקריות של האינטגרלים המיידיים. נוסף מספר כללים פשוטים לחישוב אינטגרלים מסובכים יותר.

$$\int c \cdot f(x) dx = c \int f(x) dx \quad \text{א.}$$

כלומר האינטגרל של קבוע כפול פונקציה שווה לקבוע כפול האינטגרל של הפונקציה.

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \quad \text{ב.}$$

כלומר אינטגרל של סכום (או הפרש) של פונקציות שווה לסכום (או הפרש) של האינטגרלים.

קל מאד להוכיח את שני המשפטים האלו ולכן נוותר על הוכחתם.

נעבור אפוא לשיטות שונות לפתירת אינטגרלים. צריך להעיר כי בניגוד לנגזרות:

(א) אין שיטה אחת לחישוב אינטגרלים.

(ב) לא לכל פונקציה ניתן למצוא את האינטגרל שלה.

9.2 שיטת הצבה

מדון תחילה בשיטת הצבה המביאה לפונקציות מהצורה x^μ :

$$\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

דוגמאות:

(1)

$$\int \left(17x^4 - 6x^2 + \frac{5}{x} \right) dx = 17 \int x^4 dx - 6 \int x^2 dx + 5 \int \frac{1}{x} dx = \frac{17x^5}{5} - \frac{6x^3}{3} + 5 \ln x + C$$

$$(2) \text{ נחשב } \int (x+2)^n dx \quad \text{קל לנחש כי התוצאה היא: } \frac{(x+2)^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{עבור } n \neq -1 \text{ ואילו}$$

עבור $n = -1$

התוצאה היא $\ln(x+2) + C$.

אך במקום לנחש ניתן למצוא את התשובה ע"י שיטה הנקראת שיטת הצבה או החלפת משתנים:

$$\text{נסמן } s = x+2 \text{ ואז } ds = dx \text{ ונוכל לכתוב } \int (x+2)^n dx = \int s^n ds$$

$$= \frac{s^{n+1}}{n+1} + C = \frac{(x+2)^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{ואז לפי הנוסחה}$$

עבור $n \neq -1$.

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C \quad \text{כלומר ע"י החלפת משתנים קבלנו אינטגרל מדי, באופן כללי}$$

עבור $n \neq -1$.

(3) חשב את האינטגרל

$$\int (2x^2 + 7)^2 x dx$$

גם כאן נוכל להגיע לצורה של אינטגרל מדי ע"י החלפת משתנים:

$$s = 2x^2 + 7$$

$$ds = 4x dx$$

ונקבל:

$$\int (2x^2 + 7)^2 x dx = \frac{1}{4} \int s^2 ds = \frac{1}{4} \frac{s^3}{3} + C = \frac{1}{12} (2x^2 + 7)^3 + C$$

הערה: שים לב, את האינטגרל $\int (2x^2 + 7)^2 dx$ לא ניתן לפתור ע"י החלפת המשתנים שעשינו.

(4) חשב את האינטגרל

$$\int \frac{x}{2x^2 + 7} dx = \frac{1}{4} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{4} \ln u + C = \frac{1}{4} \ln(2x^2 + 7) + C$$

$$u = 2x^2 + 7$$

$$du = 4x dx$$

שוב ע"י החלפת משתנים

(5) חשב את האינטגרל

$$\int x^2 \sqrt{x^3 + 3} dx =$$

$$u = x^3 + 3$$

$$du = 3x^2 dx$$

אם נציב

נקבל:

$$= \frac{1}{3} \int u^{1/2} du = \frac{1}{3} \frac{2u^{3/2}}{3} + C = \frac{2}{9} (x^3 + 3)^{3/2} + C$$

נשים לב כי $x^2 dx$ הוא הדיפרנציאל (עד כדי הכפלה הקבוע) של $x^3 + 3$ ולכן קיבלנו אינטגרל מדי ע"י החלפת משתנים.

בדוגמאות אלו נשים לב כי האינטגרל מורכב מ חזקה של פונקציה מוכפלת בגורם פרופורציונלי

לדיפרנציאל של הפונקציה ולכן אנחנו מקבלים אינטגרלים מן הסוג $\int u^n du$

(6) חשב את האינטגרל

$$\int \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + \cos \theta}} d\theta$$

החזקה של הפונקציה במקרה הזה היא $(1 + \cos \theta)^{-1/2}$ והיא מוכפלת בגורם שהוא פרופורציונלי

לדיפרנציאל.

שכן $d(1 + \cos \theta) = -\sin \theta d\theta$, ולכן ע"י החלפת משתנים נקבל:

$$U = 1 + \cos \theta$$

$$dU = -\sin \theta d\theta$$

$$\int d\theta \frac{\sin \theta}{(1 + \cos \theta)^{1/2}} = -\int \frac{dU}{U^{1/2}} = -\int dU U^{-1/2} = -\frac{U^{1/2}}{1/2} + c = -2(1 + \cos \theta)^{1/2} + c$$

גם כאן ללא $\sin \theta$ במונה לא היינו מצליחים לפתור בשיטה זו את הבעיה.

(7) חשב:

$$\int \sin 2\theta \cos^5 2\theta d\theta$$

זהו גם אנטגרל מטפוס של חזקה. יש לנו חזקה של פונקציה $\cos 2\theta$ המוכפלת בגודל $-2 \sin 2\theta$ שזה פרופורציונלי לדיפרנציאל של $\cos 2\theta$.

כלומר אם נציב:

$$U = \cos 2\theta$$

$$dU = -2 \sin 2\theta d\theta$$

נקבל:

$$= -\frac{1}{2} \int dU U^3 = -\frac{U^6}{2 \cdot 6} + c = -\frac{U^6}{12} + c = -\frac{\cos^6 2\theta}{12} + c$$

(8) חשב את האנטגרל:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+5}} =$$

אם נציב: $U = 2x + 5$ אזי:

$$dx = \frac{dU}{2} \leftrightarrow dU = 2dx$$

נקבל:

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dU}{U^{1/2}} = \frac{1}{2} \int U^{-1/2} dU = \frac{1}{2} \frac{U^{1/2}}{1/2} + c = \sqrt{2x+5} + c$$

(9) חשב את האנטגרל:

$$\int \frac{7x dx}{x^2 + 1} =$$

נציב:

$$x^2 + 1 = U$$

$$2x dx = dU$$

$$\begin{aligned}
 xdx &= \frac{dU}{2} \\
 &= \int \frac{7 \cdot \frac{1}{2} dU}{U} = \frac{7}{2} \int \frac{dU}{U} = \frac{7}{2} \ln U + c = \frac{7}{2} \ln(x^2 + 1) + c \\
 \int \frac{e^x dx}{e^x + 1} &= \\
 e^x + 1 &= U \\
 te^x dx &= dU \\
 &= \frac{1}{t} \int \frac{dU}{U} = \frac{1}{t} \ln U + c = \frac{1}{t} \ln(e^x + 1) + c
 \end{aligned}$$

(10) חשב את האנטגרל

עד עתה הבאנו שיטות הצבה או החלפת משתנים באופן ישיר.

עתה נראה דוגמאות שמביאות אף הן לצורה x^m בעזרת הצבה אלא שקודם עלינו להביא האנטגרנד (הפונקציה שעליה מבצעים אנטגרל) לצורה שונה.

נדגים את הדבר:

(1) חשב את האנטגרל

$$\int \frac{1}{e^x + 1} dx$$

כאן אם נציב $e^x + 1 = U$ לא נקבל שהמונה $e^x dx = dU$ אבל אם נשנה את צורה הפונקציה נוכל להגיע לתוצאה של x^n . נכפיל במונה ובמכנה ב- e^{-x}

$$\frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

כלומר:

$$\int \frac{1}{e^x + 1} dx = \int \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx =$$

אם נציב עתה:

$$1 + e^{-x} = U$$

נקבל:

$$-e^{-x} dx = dU$$

כלומר עכשיו חזקה של הפונקציה מוכפלת בדיפרנציאל שלה (עד כדי פרופורציה).

$$= - \int \frac{dU}{U} = - \ln U + c = - \ln(1 + e^{-x}) + c$$

(2) חשב

$$\int dx \sin^3 x$$

אם נציב:

$$U = \sin x$$

נקבל:

$$dU = \cos x dx$$

כלומר אין לנו דפרנציאל מוכפל בחזקה של הפונקציה.

אולם נוכל לכתוב האנטגרנד בדרך הבאה:

$$\int dx \sin^3 x = \int dx \sin x (1 - \cos^2 x)$$

ואם נציב:

$$U = \cos x \\ -\sin x dx = dU$$

נקבל:

$$= -\int dU (1 - U^2) = -U + \frac{1}{3} U^3 + c = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x$$

(3) חשב:

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x}$$

אם נציב:

$$U = \cos x \\ dU = -\sin x dx$$

נקבל:

$$= -\int \frac{dU}{U} = -\ln U + c = -\ln \cos x + c$$

שים לב: אנו עוסקים בפונקציות טריגונומטריות ומצאנו אנטגרל של פונקציות אלו בלי צורך לדעת אנטגרלים של פונקציות טריגונומטריות !!!

(4) חשב:

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} =$$

אם נציב:

$$U = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$dU = \frac{1}{2} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{1}{U} dU = \ln U + c = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + c$$

9.3 אנטגרלים של פונקציות טריגונומטריות.

ראינו את האנטגרלים המדויקים:

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx =$$

כ"כ ראינו:

$$\cos x = U$$

$$-\sin x dx = dU$$

$$= -\int \frac{dU}{U} = -\ln U + c = -\ln \cos x + c = \ln \sec x + c$$

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{dU}{U} = \ln U + c = \ln \sin x + c$$

$$\sin x = U$$

$$\cos x dx = dU$$

נחשב עתה:

$$\int \sec x dx =$$

אם נכפיל האנטגרנד ב- $\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$ נקבל:

$$= \int \frac{\sec^2 x + \tan x \sec x}{\tan x + \sec x}$$

אם נציב:

$$U = \tan x + \sec x$$

$$dU = (\sec^2 x + \tan x \sec x) dx$$

נקבל:

$$= \int \frac{dU}{U} = \ln U + c = \ln(\tan x + \sec x) + c$$

: באותו אופן:

$$\int dx \csc x = \int \frac{\csc^2 x + \csc x \cot x}{\csc x + \cot x} dx =$$

$$U = \csc x + \cot x$$

$$dU = -(\csc x \cot x + \csc^2 x) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= -\int \frac{dU}{U} = -\ln(\csc x + \cot x) + c = -\ln\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) + c = -\ln\left(\frac{1 + \cos x}{\sin x}\right) + c = \\
 &= -\ln\left(\frac{2 \sin^2 x/2}{2 \sin x/2 \cos x/2}\right) + c = \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right) + c
 \end{aligned}$$

תוצאה שקיבלנו קודם! דבר זה מראה שאין שתי תשובות שונות לאותו אנטגרל, רק עד כדי קבוע (משפט שהוכחנו קודם).

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

בזאת סיימנו אנטגרלים של כל הפונקציות הטריגונומטריות האלמנטריות.

דוגמאות:

בדוגמאות הבאות נחפש הצבה שתביא אותנו לאנטגרלים של הפונקציות האלמנטריות.

(1) חשב:

$$\int \sin(2x + 7) dx =$$

$$U = 2x + 7$$

$$dU = 2dx$$

$$\frac{dU}{2} = dx$$

$$= \int \sin U \frac{dU}{2} = \frac{1}{2} \int \sin U dU = -\frac{1}{2} \cos U + c = -\frac{1}{2} \cos(2x + 7) + c$$

(2) חשב

$$\int \sec^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) dx =$$

$$U = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$dU = \frac{1}{2} dx$$

$$= 2 \int \sec^2 U dU = 2 \operatorname{tg} U + c = 2 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + c$$

(3) חשב

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int dx (1 + \cos 2x) = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \int dx \cos 2x = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \int \frac{dU}{U} \cos U =$$

$$U = 2x$$

$$dU = 2 dx$$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin U + c = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + c$$

כלומר ע"י הצבות פשוטות הצלחנו להביא לצורה של פונקציות אלמנטריות.

(4) חשב:

$$\int dx \cdot x^2 \cot(x^3) =$$

אם נציב:

$$x^3 = U$$

$$3x^2 dx = dU$$

$$x^2 dx = \frac{dU}{3}$$

$$= \int \frac{dU}{3} \cot U = \frac{1}{3} \int dU \cot U = \frac{1}{3} \ln \cos U + c = \frac{1}{3} \ln(\cos(x^3)) + c$$

כלומר יש לנו באנטגרל $\cot$ של פונקציה כפול הדפרנציאל שלה (מוכפל בקבוע) ולכן בשיטת ההצבה מקבלים אנטגרל של $\cot$ בלבד.

(5) חשב:

$$\int dx \frac{x}{\sin^2 x^2} =$$

אם נציב:

$$x^2 = U$$

$$2x dx = dU$$

$$x dx = \frac{dU}{2}$$

נקבל:

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dU}{\sin^2 U} = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} U + c = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} x^2 + c$$

(6) חשב:

$$\int \frac{1}{1 + \cos x} dx =$$

לפי הנוסחה:

$$\frac{1 + \cos x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2}$$

נוכל לכתוב:

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 x/2} = \int \frac{dU}{\cos^2 U} = \operatorname{tg} U + c = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + c$$

$$\frac{x}{2} = U; \frac{dx}{2} = dU$$

(7) חשב:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \operatorname{tg} x - x + c$$

9.4 אנטגרלים של פונקציות אקספוננציאליות.

הבאנו את האנטגרלים המיידים.

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

דוגמאות:

(1) חשב:

$$\int e^{2x} dx =$$

נציב:

$$U = 2x$$

$$dU = 2dx$$

$$= \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int e^U dU = \frac{1}{2} e^U + c = \frac{1}{2} e^{2x} + c$$

(2) חשב:

$$\int x e^{-x^2} dx =$$

אם נציב:

$$U = -x^2$$

$$dU = -2x dx$$

$$-\frac{dU}{2} = x dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int dU e^U = -\frac{1}{2} e^U + c = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c$$

כאן היה לנו מקרה של פונקציה המוכפלת בדפרנציאל של המעריך של הפונקציה.

(3) חשב:

$$\int \frac{e^{3x} dx}{1 + e^x} =$$

$$\frac{y^3}{1+y} = y^2 - y + \frac{y}{y+1}$$

שים לב:

$$= \int \left(e^{2x} - e^x + \frac{e^x}{e^x + 1} \right) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + \ln(1 + e^x) + c$$

(4) חשב:

$$\int e^{\sin y} \cos y dy =$$

אם נציב:

$$\sin y = U$$

$$\cos y dy = dU$$

$$= \int e^U dU = e^U + c = e^{\sin y} + c$$

(5) חשב:

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x + 6}} =$$

אם נציב:

$$e^x + 6 = U$$

$$e^x dx = dU$$

$$= \int \frac{dU}{\sqrt{U}} = \int U^{-1/2} dU = 2U^{1/2} + c = 2\sqrt{e^x + 6} + c$$

9.5 הפונקציות הטריגונומטריות ההפוכות.

כתבו האנטגרלים המיידים.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + c$$

נראה עתה עוד אנטגרל חשוב לצורך זה נגזור את הפונקציה $y = \operatorname{arcsec} x$

כלומר:

$$x = \sec y = \frac{1}{\cos y}$$

נגזור את שני האגפים של המשוואה לפי x .

$$1 = -\frac{(-\sin y) dy}{\cos^2 y} = \frac{\sin y dy}{\cos^2 y} = \operatorname{tg} y \cdot \sec y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{tg} y \sec y}$$

אבל:

$$\operatorname{tg} y = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 y} - 1} = \sqrt{\sec^2 y - 1}$$

לכן:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \sqrt{\sec^2 y - 1}} = \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\int \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}} dx = \operatorname{arcsec} x + c$$

נחשב:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{dx}{a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} =$$

נציב:

$$\frac{x}{a} = U$$

$$\frac{dx}{a} = dU$$

$$dx = adU$$

$$= \int \frac{dU}{\sqrt{1 - U^2}} = \arcsin U + c = \arcsin \frac{x}{a} + c$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c}$$

כ"כ:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{dx}{a^2 \left(1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} =$$

$$dU = \frac{dx}{a}$$

$$\frac{x}{a} = U$$

$$dx = adU$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{dU}{1 + U^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} U + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{dx}{x \cdot a \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}} =$$

$$\frac{x}{a} = U$$

$$\frac{dx}{a} = dU$$

$$= \int \frac{dU}{aU\sqrt{U^2-1}} = \frac{1}{a} \int \frac{dU}{U\sqrt{U^2-1}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} U + c$$

$$\boxed{\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + c}$$

דוגמאות:

(1)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-25x^2}} =$$

אם נציב:

$$U = 5x$$

$$dU = 5dx$$

$$\frac{dU}{5} = dx$$

$$= \frac{1}{5} \int \frac{dU}{\sqrt{16-U^2}} = \frac{1}{5} \arcsin \frac{U}{4} + c = \frac{1}{5} \arcsin \frac{5x}{4} + c$$

(2)

$$\int \frac{dx}{11+7x^2} =$$

אם נציב:

$$U = \sqrt{7}x$$

$$dU = \sqrt{7}dx$$

$$\frac{dU}{\sqrt{7}} = dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} \int \frac{dU}{11+U^2} = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{U}{\sqrt{11}} + c = \frac{1}{\sqrt{77}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{7}{11}} x + c$$

(3)

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-49}} =$$

אם נציב:

$$2x = U$$

$$2dx = dU$$

$$dx = \frac{dU}{2}$$

$$= \int \frac{dU}{U\sqrt{U^2-49}} = \frac{1}{7} \operatorname{arcsec} \frac{U}{7} + c = \frac{1}{7} \operatorname{arcsec} \frac{2x}{7} + c$$

נקבל:

(4)

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}} =$$

אם נציב:

$$x^3 = y$$

$$3x^2 dx = dy$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{3} \arcsin y + c = \frac{1}{3} \arcsin x^3 + c$$

(5)

$$\int \frac{x}{x^4+3} dx =$$

אם נציב:

$$x^2 = y$$

$$2x dx = dy$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^2+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{3}} + c = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{\sqrt{3}} + c$$

(6)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+1)^2}} =$$

אם נציב:

$$x+1 = U$$

$$dx = dU$$

$$= \int \frac{dU}{\sqrt{9-U^2}} = \arcsin \frac{U}{3} + c = \arcsin \frac{x+1}{3} + c$$

(7)

$$\int \frac{x-7}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

אם נציב:

$$1-x^2 = U$$

$$-2x dx = dU$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx - 7 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{dU}{\sqrt{U}} - 7 \arcsin x + c = -\frac{1}{2} 2U^{1/2} - 7 \arcsin x + C \\ &= -(1-x^2)^{1/2} - 7 \arcsin x + c \end{aligned}$$

9.6 דוגמאות עם שיטת השלמה לרבע.

(1)

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 7} = \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4 + 3} = \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 3} =$$

אם נציב:

$$U = x + 2$$

$$dU = dx$$

$$= \int \frac{dU}{U^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{U}{\sqrt{3}} + c = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{3}} + c$$

(2)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{20 + 8x - x^2}} = \int \frac{dx}{[36 - (x^2 - 8x + 16)]^{1/2}} = \int \frac{dx}{[36 - (x-4)^2]^{1/2}} =$$

אם נציב:

$$U = x - 4$$

$$dU = dx$$

$$\int \frac{dU}{\sqrt{36 - U^2}} = \arcsin \frac{x-4}{6} + c$$

(3)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 4x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x^2 - 4x + 4)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x-2)^2}} = \arcsin \frac{x-2}{2} + c$$

(4)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{21 + 12x - 9x^2}} =$$

נפתח את הביטוי בתוך השורש

$$21 + 12x - 9x^2 = 21 - (9x^2 - 12x + 4) + 4 =$$

$$= 25 - (9x^2 - 12x + 4) = 25 - (3x - 2)^2$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25 - (3x-2)^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dy}{\sqrt{25 - y^2}} =$$

$$3x - 2 = y$$

$$3dx = dy$$

$$dx = \frac{dy}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x-2}{5} + c$$

(5)

$$\int \frac{dx}{3x^2 + 4x + 5} = \int \frac{3dx}{9x^2 + 12x + 15} = 3 \int \frac{dx}{(3x+2)^2 + 11} =$$

אם נציב:

$$3x = U$$

$$3dx = dU$$

$$= \int \frac{dU}{U^2 + 11} = \frac{1}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} U = \frac{1}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{3x+2}{\sqrt{11}} + c$$

(6)

$$\int \frac{x+1}{x^2-4x+8} dx = \int \frac{(x+1)dx}{(x-2)^2+4} = \int \frac{x-2+3}{(x-2)^2+4} dx = \int \frac{(x-2)}{(x-2)^2+4} dx + 3 \int \frac{1}{(x-2)^2+4} dx$$

נביא את המונה לצורה של נגזרת המכנה.
באנטגרל הראשון אם נציב:

$$U = (x-2)^2 + 4$$

$$dU = 2(x-2)dx$$

כלומר המונה דפרנציאל של המכנה.

$$x-2 = y$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dU}{U} + 3 \int \frac{1}{y^2+4} dy = \frac{1}{2} \ln U + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{y}{2} + c = \frac{1}{2} \ln[(x-2)^2+4] + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{2} + c$$

(7)

$$\int \frac{x+4}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx$$

נביא את המונה לצורה שיהיה בו הדפרנציאל מתחת לשורש.

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x-4-4}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x-4}{\sqrt{5-4x-x^2}} + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$$

אם נציב:

$$y = 5-4x-x^2$$

$$dy = (-4-2x)dx$$

$$5-4x-x^2 = 5-(x^2+4x+4)+4 =$$

$$= 9-(x^2+4x+4)$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{dy}{y^{1/2}} + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = -\frac{1}{2} y^{1/2} + 2 \arcsin \frac{x+2}{3} + c = -\sqrt{5-4x-x^2} + 2 \arcsin \frac{x+2}{3} + C$$

לסכום:

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \sec \frac{x}{a} + c$$

לכן אנטגרל של הפונקציה שאפשר להביא לצורה זו, למען השלמות נוכל להוסיף כאן אנטגרלים.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + c$$

לכן:

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left[\frac{x-a}{x+a} \right] + c$$

נוכל להוכיח אנטגרלים אלו ע"י גזירה של אגף ימין, בהמשך נראה איך לקבל אנטגרלים אלו.

דוגמאות:

(1)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2 + 25}} =$$

נציב:

$$U = 4x$$

$$dU = 4dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{dU}{\sqrt{U^2 + 5}} = \frac{1}{4} \ln(U + \sqrt{U^2 + 5}) + c = \frac{1}{4} \ln(4x + \sqrt{16x^2 + 25}) + c$$

(2)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 4x + 5}} =$$

נכפיל ב $\sqrt{3}$ במונה ובמכנה:

$$= \sqrt{3} \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 12x + 15}} = \sqrt{3} \int \frac{dx}{\sqrt{(3x+2)^2 + 11}} =$$

$$U = 3x + 2$$

$$dU = 3dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{dU}{\sqrt{U^2+11}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \ln(U + \sqrt{U^2+11}) + c = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3} \ln(3x+2 + \sqrt{(3x+2)^2+11}) + c = \frac{\sqrt{3}}{3} \ln(3x+2 + \sqrt{9x^2+12x+15}) + c \\
&\int \frac{dx}{2x^2+5x-1} = 2 \int \frac{dx}{4x^2+10x-2} = 2 \int \frac{dx}{\left(2x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 2} = \\
&= 2 \int \frac{dx}{\left(2x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{33}{4}} = \int \frac{dU}{U^2 - \frac{33}{4}} = \frac{1 \cdot 2}{2\sqrt{33}} \ln \left(\frac{U - \frac{\sqrt{33}}{2}}{U + \frac{\sqrt{33}}{2}} \right) + c = \quad (3) \\
&U = 2x + \frac{5}{2} \\
&dU = 2dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{33}} \ln \left(\frac{24 - \sqrt{33}}{24 + \sqrt{33}} \right) + c = \frac{1}{\sqrt{33}} \ln \left(\frac{4x+5-\sqrt{33}}{4x+5+\sqrt{33}} \right) + c
\end{aligned}$$

9.7 אנטגרלים של פונקציות היפרבוליות.

$$\int \sinh x dx = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + c$$

$$\int \sec h^2 x dx = \tanh x + c$$

$$\int \csc h^2 x dx = -\coth x + c$$

$$\int \tanh x dx = \int \frac{\sinh x}{\cosh x} dx = \int \frac{1}{U} dU = \ln(\cosh x) + c$$

$$\cosh x = U$$

$$\sinh x dx = dU$$

$$\int \coth x dx = \ln(\sinh x) + c$$

דוגמאות:

$$\int \cosh(2x) dx = [2x = U, 2dx = dU] = \frac{1}{2} \int \cosh U dU = \frac{1}{2} \sinh 2x + c \quad (1)$$

$$\int e^x \cosh x dx = \int e^x \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int (e^{2x} + 1) dx = \quad (2)$$

$$U = 2x$$

$$dU = 2dx$$

$$= \frac{1}{2} \int e^{2x} dx + \frac{1}{2} \int dx = \frac{1}{4} \int e^U dU + \frac{x}{2} + c = \frac{1}{4} e^{2x} + \frac{x}{2} + c$$

10. שיטות אנטגרציה

עד כה עסקנו בעיקר באנטגרלים מיידים + שיטת הצבה שהביאה אותנו לאנטגרלים כאלה בהמשך נכיר מספר שיטות אנטגרציה שבהם נוכל להיעזר כפתורות אנטגרלים מסובכים. נכיר תחילה את שיטה האנטגרציה לפי חלקים.

10.1 אנטגרציה לפי חלקים:

נחזור לרגע לעזרות:

$$\frac{d}{dx}[U(x)V(x)] = \frac{dU(x)}{dx}V(x) + U(x)\frac{dV(x)}{dx}$$

אם נכפיל ב- dx את שני האגפים נקבל:

$$d[U \cdot V] = dU \cdot V + U \cdot dV$$

$$UdV = d(U \cdot V) - VdU$$

אם נעשה אנטגרציה על שני האגפים נקבל:

$$\int UdV = \int d(U \cdot V) - \int VdU$$

או:

$$\boxed{\int UdV = U \cdot V - \int VdU} \quad (10.1)$$

האנטגרל פעולה הפוכה לדפרנציאל. נוסחה זו נקראת נוסחת האנטגרציה לפי חלקים.

נראה דוגמה לשמוש בנוסחה זו.

$$\int xe^x dx =$$

נסמן:

$$dU = dx$$

$$U = x$$

$$dV = e^x dx$$

$$V = \int e^x dx = e^x$$

$$= x \cdot e^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

הערה: שים לב אם נציב $V = e^x + k$ הקבוע יתבטל, ולכן אין צורך בקבוע k . הכללים הם איפוא:

על מנת להשתמש בנוסחה (10.1) לביצוע האנטגרציה יש לפרק את האנטגרל הנתון לשני חלקים אחד יסומן ב- U והשני יחד עם dx ב- dV . (זו הסיבה לשם אנטגרציה בחלקים)

הכללים החשובים הם:

$$(א) \quad \int VdU \quad \text{לא יהיה מסובך יותר מ-} \int UdV$$

(ב) dV ניתן לאנטגרציה פשוטה.
דוגמאות:

(1)

$$\int dx \cos 2x$$

אף שיטה עד כה לא טפלה באנטגרל כזה. אולם נציב:

$$dV = \cos 2x dx$$

$$x = U$$

אזי:

$$V = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$dx = dU$$

נקבל:

$$\int dx \cos 2x = \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + c$$

אילו היינו בוחרים:

$$dV = x dx$$

$$U = \cos 2x$$

$$V = \frac{x^2}{2}$$

$$dU = -2 \sin 2x dx$$

אזי:

$$\int dx \cos 2x = \frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \int x^2 \sin 2x dx + c$$

והאנטגרל $\int x^2 \sin 2x dx$ הינו מסובך יותר.

(2)

$$\int x^\mu \ln x dx \quad ; \quad [\mu \neq -1]$$

אם נבחר:

$$dV = x^\mu dx$$

$$U = \ln x$$

$$V = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$$

$$dU = \frac{1}{x} dx$$

$$\begin{aligned}\int x^\mu \ln x dx &= \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} \ln x - \int \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} \ln x - \frac{1+\mu}{\mu} \int x^\mu dx = \\ &= \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} \ln x - \frac{1}{(\mu+1)^2} x^{\mu+1} + c = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} \left(\ln x - \frac{1}{\mu+1} \right) + c\end{aligned}$$

נשים לב כי עבור $\mu = 0$ נקבל:

$$\boxed{\int \ln x dx = x \ln x - x + c}$$

(3)

$$\int \arctg x dx = x \cdot \arctg x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx =$$

נציב:

$$\xi = 1 + x^2$$

$$d\xi = 2x dx$$

$$= x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{d\xi}{\xi} = x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

ואמנם אם נגזור אגף ימין:

$$\arctg x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2} \frac{1 \cdot 2x}{1+x^2} = \arctg x$$

(4)

$$I = \int e^{-ax} \cos bxdx =$$

אם נבחר:

$$dV = \cos bxdx$$

$$U = e^{-ax}$$

$$V = \frac{1}{b} \sin bx$$

$$dU = -ae^{-ax} dx$$

נקבל:

$$I = \frac{1}{b} e^{-ax} \sin bx + \frac{a}{b} \int \sin bxe^{-ax} dx$$

לכאורה זה נראה שכלל לא התקדמנו שהרי קבלנו במקום $\cos bx$ האנטגרנד $\sin bx$. אך אם נמשיך נראה מיד מה קורה כאן.

נמשיך לפי חלקים:

$$\int \sin bx e^{-ax} dx = -\frac{1}{b} e^{-ax} \cos bx - \frac{a}{b} \int \cos bx e^{-ax} dx$$

אם נבחר:

$$dV = \sin bx dx$$

$$U = e^{-ax}$$

$$V = -\frac{1}{b} \cos bx$$

$$dU = -ae^{-ax}$$

סייה קיבלנו:

$$I = \frac{1}{b} e^{-ax} \sin bx - \frac{a}{b^2} e^{-ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \int \cos bx e^{-ax} dx$$

אבל האנטגרל האחרון שווה ל I .

$$I = \frac{1}{b} e^{-ax} \sin bx - \frac{a}{b^2} e^{-ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} I$$

קיבלנו איפוא משוואה עבור I (האנטגרל הרצוי) ופתרונה יתן את I .

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) I = \frac{e^{-ax}}{b} \left(\sin bx - \frac{a}{b} \cos bx\right)$$

$$I = e^{-ax} \frac{b \left(\sin bx - \frac{a}{b} \cos bx\right)}{a^2 + b^2}$$

(5)

$$\int x^n e^{-x} dx = -x^n e^{-x} + n \int x^{n-1} e^{-x} dx + c$$

אם נבחר:

$$U = x^n$$

$$dV = e^{-x} dx$$

$$dU = nx^{n-1} dx$$

$$V = -e^{-x}$$

בצורה זו אם n טבעי ממשיכים הלאה לפי חלקים עד שמורידים את n ל-0. ונשאר $\int e^{-x} dx$.
נעבור עתה לשיטה נוספת של אנטגרציה המיוחדת לאנטגרלים טריגונומטריים.

10.2 אנטגרלים טריגונומטריים.

נדון ב-4 סוגים של אנטגרלים.

א. אנטגרל מהטיפוס

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

כאשר:

n או m מספר אי זוגי חיובי, נניח n - איזוגי נוכל לכתוב:

$$\sin^m x \cos^n x = \sin^m x \cos^{n-1} x \cos x$$

עכשיו n-1 זוגי ונוכל לכתוב כחזקה של $\cos^2 x = (1 - \sin^2 x)$ ולכן $\sin^m x \cos^{n-1} x$ הופך להיותלסכום נקבל חזקות של סינוס $\sin^m x \cos x (1 - \sin^2 x)^{(n-1)/2}$,מוכפל ב- $\cos x dx$ שהוא הדפרנציאל של $\sin x$. ולכן ניתן לחשב האנטגרל.נניח m - איזוגי אותו טפול רק ב- $\sin^m x$.

דוגמאות:

(1)

$$\int \sin^2 x \cos^5 x dx = \int \sin^2 x \cos^4 x \cos x dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx =$$

$$= \int \sin^2 x (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) \cos x dx = \int \sin^2 x \cos x dx - 2 \int \sin^4 x \cos x dx + \int \sin^6 x \cos x dx$$

אם נציב:

$$\sin x = U$$

$$\cos x dx = dU$$

$$= \int U^2 dU - 2 \int U^4 dU + \int U^6 dU =$$

$$= \frac{U^3}{3} - 2 \frac{U^5}{5} + \frac{U^7}{7} + c = \frac{\sin^3 x}{3} - 2 \frac{\sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7} + c$$

(2)

$$\int \sin^3 x \cos^{1/3} x dx =$$

כאן הסינוס בחזקה אי-זוגית חיובית

$$\int \sin^2 x \cos^{2/3} x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^{2/3} x \sin x dx = \int (\cos^{2/3} x - \cos^{8/3} x) \sin x dx$$

אם נציב:

$$\cos x = U$$

$$-\sin x dx = dU$$

$$= -\int (U^{2/3} - U^{1/3}) dU = -3 \frac{U^{5/3}}{5} + 3 \frac{U^{4/3}}{4} + c = -\frac{3}{5} \cos^{5/3} x + \frac{3}{4} \cos^{4/3} x + c$$

ב. סוג ב' של אינטגרלים :

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

כאשר m ו- n שניהם זוגיים חיוביים או אפס. באינטגרלים כאלו נעזר בקשרים :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

דוגמאות :

(1)

כאן $m=4, n=0$

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x dx &= \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \left(1 - 2 \cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) \right) dx = \frac{1}{4} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \sin 4x + c = \\ &= \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx = \int \frac{1}{4} \sin^2 2x \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \int (1 - \cos 4x) dx + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \int \sin^2 2x \cos 2x dx = \end{aligned}$$

אם נציב:

$$\sin 2x = U$$

$$2 \cos 2x dx = dU$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \int (1 - \cos 4x) dx + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \int U^2 dU = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{16} \frac{\sin^3 3x}{3} + c$$

ג. סוג שלישי של אנטגרלים הוא מהטיפוס $\int \cot^m x \csc^n x dx$ או $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x dx$

ניתן לפתור אותם בעזרת הזהויות:

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$$

1. בתנאי ש- n מספר חיובי זוגי.
2. או m מספר שלם חיובי ו- $n = 0$.
3. או m ו- n איזוגיים חיוביים.

דוגמאות:

$$(1) \quad \int \operatorname{tg}^3 x dx = \int \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg} x dx = \int (\sec^2 x - 1) \operatorname{tg} x dx = \int \sec^2 x \operatorname{tg} x dx - \int \operatorname{tg} x dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln(\cos x) + c$$

$$\operatorname{tg} x = U$$

$$\sec^2 x dx = dU$$

$$(2) \quad \int \cot^4 x dx = \int \cot^2 x \cot^2 x dx = \int \cot^2 x (\csc^2 x - 1) dx = \int \cot^2 x \csc^2 x dx - \int \cot^2 x dx =$$

$$= -\frac{1}{3} \cot^3 x - \int (\csc^2 x - 1) dx = -\frac{1}{3} \cot^3 x + \cot x + x + c$$

2 דוגמאות אלו הן מקרה 2, נראה דוגמה למקרה 1.

$$(3) \quad \int \operatorname{tg}^3 x \sec^4 x dx = \int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x \sec^2 x dx = \int \operatorname{tg}^3 x (1 + \operatorname{tg}^2 x) \sec^2 x dx =$$

$$= \int (\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^5 x) \sec^2 x dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} + c$$

דוגמה למקרה 3:

$$(4) \quad \int \operatorname{tg}^3 x \sec^5 x dx = \int \operatorname{tg}^2 x \sec^4 x \sec x \operatorname{tg} x dx = \int (\sec^2 x - 1) \sec^4 x \sec x \operatorname{tg} x dx =$$

$$= \int (\sec^6 x - \sec^4 x) \sec x \operatorname{tg} x dx$$

אם נציב:

$$\sec x = U$$

$$= \int (U^6 - U^4) dU = \frac{\sec^7 x}{7} - \frac{\sec^5 x}{5} + c$$

ד. סוג רביעי של אנטגרלים הוא מהטיפוס מכפלות של פונקציות טריגונומטריות שהארגומנטים אינם שווים

$$\int \sin mx \sin nx dx$$

$$\int \cos mx \sin nx dx$$

$$\int \cos mx \cos nx dx$$

במקרה זה נוכל להשתמש בקשרים ההופכים מכפלה לסכום :

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x-y) + \sin(x+y)]$$

דוגמאות:

$$(1) \quad \int \sin 3x \sin 2x dx = \int \frac{1}{2} [\cos(3x-2x) - \cos(3x+2x)] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int (\cos x - \cos 5x) dx = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{10} \sin 5x + c$$

$$(2) \quad \int \cos 4x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 2x + \cos 6x) dx = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{12} \sin 6x + c$$

10.3 הצבות טריגונומטריות.

הרבה אנטגרלים יכולים להיכתב בצורה פשוטה ע"י הצבות של פונקציות טריגונומטריות במקום משתני אנטגרציה. שיטה זו יעילה במיוחד באנטגרנדים הבאים :

$$x = \frac{a}{b} \sin \theta \quad \text{אם האנטגרל מכיל } a^2 - b^2 x^2 \quad \text{נציב}$$

$$x = \frac{a}{b} \tan \theta \quad \text{אם האנטגרל מכיל } a^2 + b^2 x^2 \quad \text{נציב}$$

$$x = \frac{a}{b} \sec \theta \quad \text{אם האנטגרל מכיל } b^2 x^2 - a^2 \quad \text{נציב}$$

דוגמאות:

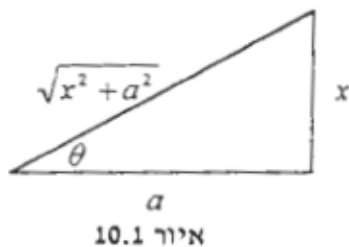
(1) נחשב

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

למעשה כבר קבלנו אנטגרל זה ע"י גזירה. נראה עתה את שיטה לחשב אנטגרל זה. במקרה שלנו $b = 1$. נציב $x = a \cdot \operatorname{tg} \theta$, $dx = a \cdot \sec^2 \theta d\theta$ ונקבל:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{a^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \theta + a^2}} dx = \int \frac{1}{a \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2 \theta + 1}} a \sec^2 \theta d\theta = \\ &= \int \frac{\sec^2 \theta}{\sec \theta} d\theta = \int \sec \theta d\theta = \ln(\sec \theta + \operatorname{tg} \theta) + c \end{aligned}$$

אולם האנטגרל מבוטא באמצעות x לכן אנו מעוניינים לחזור ל- x . וזאת עושים בצורה הבאה:



איור 10.1

$$\sec \theta = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a}; \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{x}{a}$$

ולכן

$$\ln(\sec \theta + \operatorname{tg} \theta) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \ln a$$

הערה: למעשה האנטגרלים שלמדנו בשבוע הקודם ניתנים לפתירה בעזרת הצבה הזו, כגון

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx; \quad \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx; \quad \int \frac{1}{x \sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

(2)

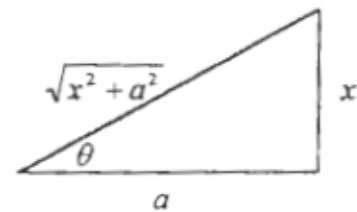
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx &= \int \frac{1}{a^3 (\operatorname{tg}^2 x + 1)^{3/2}} a \sec^2 x dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{\sec^2 x}{\sec^3 x} dx = \\ &= \frac{1}{a^2} \int \cos x dx = \frac{\sin \theta}{a^2} + c \end{aligned}$$

הצבנו

$$x = a \cdot \operatorname{tg} \theta$$

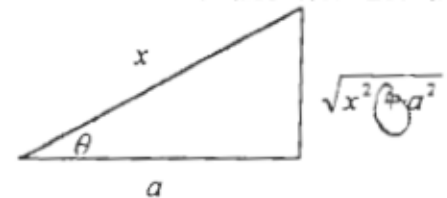
$$dx = a \sec^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} + c$$



(3) חשב את האנטגרל:

$$\int \frac{dx}{x(x^2 - a^2)^{3/2}} =$$

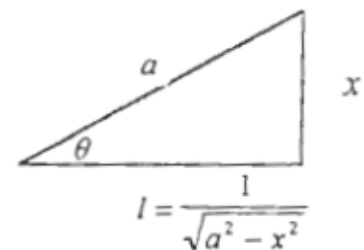


נציב

$$x = a \sec \theta$$

$$dx = a \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$\begin{aligned} &= \frac{a}{a^4} \int \frac{\sec \theta \tan \theta d\theta}{\sec^3 \theta \tan^3 \theta} = \frac{1}{a^3} \int d\theta \cot^2 \theta = \frac{1}{a^3} \int d\theta (\csc^2 \theta - 1) = \\ &= -\frac{1}{a^3} \cot \theta - \frac{1}{a^3} \theta + c = -\frac{1}{a^3} \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{1}{a^3} \arccos \frac{a}{x} + c \end{aligned}$$



שים לב לפשטות האנטגרל בהצבה הנ"ל!

(4) חשב את האנטגרל

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int \frac{a \cos \theta d\theta}{a \cos \theta} = \int d\theta = \theta + c$$

עשינו הצבה:

$$x = a \sin \theta$$

$$dx = a \cos \theta d\theta$$

שים לב לפשטות האנטגרל בהצבה זו.

(5) חשב:

$$\int dx \frac{x}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{1}{2} \int dx \frac{2x - 1 + 1}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{1}{2} \int dx \frac{2x - 1}{(x^2 - x + 1)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x^2 - x + 1)^2} dx =$$

$$(x^2 - x + 1) = U$$

$$(2x - 1)dx = dU$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{dU}{U^2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left[\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}\right]^2} dx = -\frac{1}{2} U^{-1} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left[\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}\right]^2} dx$$

אם נציב:

$$x - \frac{1}{2} = y$$

$$= -\frac{1}{2(x^2 - x + 1)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left[y^2 + \frac{3}{4}\right]^2} dy$$

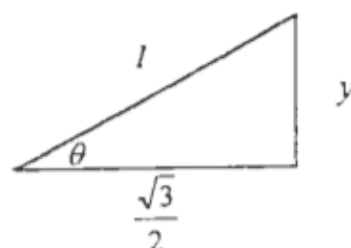
באנטגרל כזה מציבים:

$$y = \operatorname{atg} \theta$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \theta$$

$$dy = \frac{\sqrt{3}}{2} \sec^2 \theta d\theta$$

$$\sec \theta = \frac{\sqrt{y^2 + \frac{3}{4}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$



$$l = \sqrt{y^2 + \frac{3}{4}}$$

$$\sqrt{y^2 + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sec \theta \quad ; \quad \left(y^2 + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{2^4} \sec^4 \theta = \frac{9}{16} \sec^4 \theta$$

$$= -\frac{1}{2(x^2 - x + 1)} + \frac{1}{2} \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \sec^2 \theta d\theta}{\frac{9}{16} \sec^4 \theta} = -\frac{1}{2(x^2 - x + 1)} + \frac{4\sqrt{3}}{9} \int \cos^2 \theta d\theta$$

$$\int \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2y}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta$$

סה"כ נקבל:

$$= -\frac{1}{2(x^2 - x + 1)} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \operatorname{arctg} \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x^2 - x + 1} + c$$

10.4 שיטת השברים החלקיים

בשיטה זו נלמד לבצע אנטגרציה של פונקציות אלגבריות רציונליות. נזכיר, כי פונקציה רציונלית היא פונקציה היכולה להכתב כמנה של שני פולינומים כלומר:

$$\frac{P_n(x)}{P_m(x)} = \frac{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}$$

הפונקציה

היא רציונלית כאשר המקדמים a_n ו- b_n הם מספרים ממשיים ו- m ו- n הם מספרים טבעיים. אם דרגת הפולינום במונה גבוהה או שווה לדרגת המכנה ניתן תמיד לחלק את המונה במכנה ולקבל פולינום פלוס פונקציה רציונלית שבה דרגת המונה קטנה מדרגת המכנה. כלומר, אם $m \geq n > 1$, אזי:

$$\frac{P_n(x)}{P_m(x)} = P(x) + \frac{R_l(x)}{P_m(x)}$$

ומקרה כזה נודק לבצע חלוקה זו כדי לחשב האנטגרל. **דוגמאות:**

$$\frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1} \quad (1)$$

ולכן:

$$\int \frac{x^3}{x^2 + 1} dx = \int \left(x - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c \quad (2)$$

$$\int \frac{x^3 + 1}{x - 1} dx = \int \left(x^2 + x + 1 + \frac{2}{x - 1} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 2 \ln(x - 1) + c$$

ולכן הבעיה תהיה תמיד לטפל בפונקציה רציונלית שבה פולינום במונה בדרגה נמוכה מהמכנה. שיטה הטיפול תהיה **שיטת השברים החלקיים**. נמחיש את השיטה בדוגמאות הבאות:

$$(1) \quad \int \frac{dx}{x^2 - 4}$$

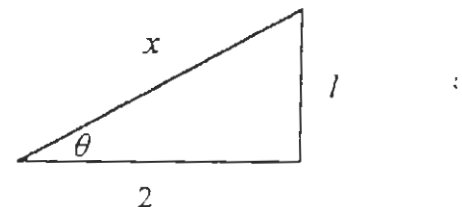
עד כה פתרנו אנטגרל כזה בשתי שיטות:

$$א. \quad \text{למדנו נוסחה: } \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a}$$

ב. בעזרת הצבה הטריגונומטרית

$$נציב: \quad x = 2 \sec \theta$$

$$dx = 2 \sec \theta \tan \theta d\theta$$



$$l = \sqrt{x^2 - 4}$$

כלומר:

$$\int dx \frac{1}{x^2 - 4} = \int \frac{2 \sec \theta \operatorname{tg} \theta d\theta}{4 \operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{1}{2} \int \frac{\sec \theta}{\operatorname{tg} \theta} d\theta = \frac{1}{2} \int \csc \theta d\theta = \frac{1}{2} \ln(\sec \theta - \cot \theta) + c =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} - \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4}} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} = \frac{1}{4} \ln \frac{x-2}{x+2} + c$$

נראה עתה שיטה שלישית הנקראת אנטגרציה בחלקים:

$$\int \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{(x+2)(x-2)}$$

נכתוב

נניח שניתן לכתוב:

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

כאשר A ו-B קבועים.

ונבדוק האם ניתן הצבה, אם נצליח לחשב את A ו-B סימן שהצבו ניתן. נכפיל את שני האגפים ב- $(x-2)(x+2)$ ונקבל:

$$1 = A(x-2) + B(x+2) = x(A+B) + 2(A-B)$$

בשני האגפים מופיעים פולינומים וישנה הגדרה שני פולינומים שנים אם ורק אם כל מקדמיהם שווים. ולכן:

$$2(A-B)+1 ; A-B = \frac{1}{2}$$

$$A+B=0$$

$$2A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$B = -A = -\frac{1}{4}$$

בדיקה:

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{4} \frac{1}{x+2} = \frac{x+2-(x-2)}{4(x-2)(x+2)} = \frac{1}{(x-2)(x+2)}$$

ועתה:

$$\int dx \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+2} = \frac{1}{4} \ln(x-2) - \frac{1}{4} \ln(x+2) = \frac{1}{4} \ln \frac{x-2}{x+2} + c$$

זה נקרא שיטה השברים החלקיים בגלל הפתרון לשברים חלקיים.

הערה: שים לב קל למצוא את B-A בדרך הבאה: (המשוואה נכונה לכל x).

$$1 = A(x+2) + B(x-2) =$$

נציב: $x = 2$ ונקבל $A = \frac{1}{4}$

נציב: $x = -2$ ונקבל $B = -\frac{1}{4}$

נסתכל עתה על דוגמה הבאה:

(3)

$$\int dx \frac{1}{x^4 - 16} = \int \frac{dx}{(x^2 - 4)(x^2 + 4)} = \int \frac{dx}{(x-2)(x+2)(x^2 + 4)}$$

נניח:

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

נכפיל שני האגפים במכנה המשותף $(x-2)(x+2)(x^2+4)$ ונקבל:

$$1 = A(x+2)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2-4)$$

$$1 = x^3(A+B+C) + x^2(2A-2B+D) + x(4A+4B-4C) + 8A-8B-4D$$

שני פולינומים שווים אם מקדמיהם שווים כלומר:

- (1) $A+B+C=0$
- (2) $2A+2B+D=0$
- (3) $4A+4B-4C=0$
- (4) $8A+8B-4D=1$

נודק לפתור 4 משוואות ב-4 נעלמים.

$$4 \times (1) - (3) \rightarrow 8C = 0 \rightarrow C = 0$$

$$A+B=0$$

$$A=-B$$

$$(4) \rightarrow 8A+8A-4D=1$$

$$(2) \rightarrow 2A+2A+D=0$$

$$4 \times (2) \rightarrow 16A+4D=0$$

$$8D=-1 \Rightarrow D=-\frac{1}{8}$$

$$4A=-D=\frac{1}{8} \Rightarrow A=\frac{1}{32} \Rightarrow B=-\frac{1}{32}$$

$$\int \frac{1}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} dx = \frac{1}{32} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{32} \int \frac{1}{x+2} dx - \frac{1}{8} \int \frac{1}{x^2+4} dx =$$

$$= \frac{1}{32} \ln(x-2) - \frac{1}{32} \ln(x+2) - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} + c = \frac{1}{32} \ln \frac{x-2}{x+2} - \frac{1}{16} \arctg \frac{x}{2} + c$$

נשים לב שאם נוכל לפרק לביטויים ליניאריים הרי הסכום יהיה:

$$\frac{1}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\dots} = \frac{A}{(a_1x+b_1)} + \frac{B}{(a_2x+b_2)} + \dots$$

אם מופיע $\frac{1}{(a_2x^2+b_2)}$ שאי אפשר לפרקו הרי במונה יופיע חזקה ליניארית.

במדה שיש לנו שורש כפול חייבים לפרק הדרך הבאה:

למשל:

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2} dx$$

$$x^3 - 2x + x$$

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

$$C=1 \quad \leftarrow \quad x=1$$

$$A=1 \quad \leftarrow \quad x=0; \quad x=2$$

$$1 = A + 2B + 2C$$

$$1 = 1 + 2B + 2$$

$$B = -1$$

$$1 = x^2(A+B) + x(-2A-B+C) + A$$

$$A=1$$

$$B=-A=-1$$

$$-2A-B+C=0$$

$$C=1$$

לסיכום נוכל לומר:

1. לכל גורם ליניארי $ax+b$ המופיע במכנה מתאים חלקי מהצורה $\frac{A}{ax+b}$ כאשר A קבוע שצריך לחשבו.

2. לכל גורם ליניארי $ax+b$ המופיע n פעמים במכנה של פונקציה רציונלית מתאים סכום של n שברים חלקיים מהצורה.

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

כאשר ה-A קבועים שיש לחשבם.

3. לכל גורם רבועי אי פריק $ax^2 + bx + c$ המופיע פעם אחת במכנה של פונקציה רציונלית מתאים שבר חלקי מהצורה $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ כאשר A ו-B קבועים שיש לחשבם.

4. לכל גורם רבועי אי פריק $ax^2 + bx + c$ המופיע n פעמים במכנה של פונקציה רציונלית מתאים סכום של n מנות חלקיות מהצורה.

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

דוגמה למקרה כללי:

$$\frac{1}{(x^2-4)^2(x^2+4)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+4} + \frac{Gx+H}{(x^2+4)^2}$$

דוגמאות:

(1)

$$\int \frac{4+x^2}{8+x} dx$$

דרגת המונה גדולה מהמכנה ולכן נחלק המונה במכנה:

$$\frac{x^2+4}{x+8} = x-8 + \frac{68}{x+8}$$

$$\int \frac{x^2+4}{x+8} dx = \int \left(x-8 + \frac{68}{x+8} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 8x + 68 \ln(x+8) + 1$$

(2)

$$\int \frac{x^2+20}{x^2-16} dx =$$

דרגת המונה שווה למכנה ולכן נחלק:

$$= \int 1 dx + \int \frac{36}{x^2-16} dx = x + \frac{9}{2} \int \frac{1}{x-4} dx - \frac{9}{2} \int \frac{1}{x+4} dx$$

$$\frac{1}{x^2 - 16} = \frac{1}{(x-4)(x+4)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+4}$$

$$1 = A(x+4) + B(x-4)$$

$$1 = x(A+B) + 4(A-B)$$

$$4(A-B) = 1$$

$$A+B = 0$$

$$4 \cdot 2A = 1$$

$$A = \frac{1}{8}$$

$$B = -\frac{1}{8}$$

$$= x + \frac{9}{2} \ln \frac{x-4}{x+4} + c$$

(3)

$$\int \frac{x+2}{(x^2-1)(x^2+1)^2} dx$$

$$\frac{x+2}{(x^2-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$$

מוציאים את המקדמים A, B, C, D, E, F ואז מקבלים את התוצאה.

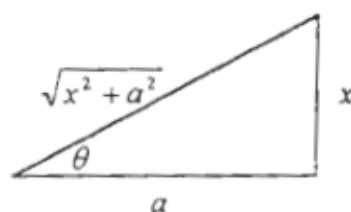
$$A \ln(x-1) + B \ln(x+1) + \frac{1}{2} C \ln(x^2+1) + D \arctg x + \frac{1}{2} \frac{E}{x^2+1} + F \int dx \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

נציב $x = \operatorname{tg} \theta$ לפי שיטת הצבה טריגונומטרית ונקבל:

$$\sqrt{x^2+1} = \sec \theta$$

$$(x^2+1)^2 = \sec^4 \theta$$

$$dx = \sec^2 \theta d\theta$$



$$\int dx \frac{1}{(x^2+1)^2} = \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sec^4 \theta} = \int \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2\theta) d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{2} \frac{\sin 2\theta}{2} + c = \frac{1}{2} \arctg x + \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta + c = \frac{1}{2} \arctg x + \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + c$$

ולכן סייה נקבל:

$$\int \frac{x+2}{(x^2-1)(x^2+1)^2} dx = A \ln(x-1) + B \ln(x+1) + \frac{C}{2} \ln(x^2+1) +$$

$$+ D \cdot \arctg x + \frac{1}{2} \frac{E}{x^2+1} + \frac{F}{2} \cdot \arctg x + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + c$$

$$x+2 = A(x+1)(x^2+1)^2 + B(x-1)(x^2+1)^2 + (Cx+D)(x^2-1)(x^2+1) + (Ex+F)(x^2-1)$$

(4)

$$\int \frac{2x+1}{x^3-7x+6} dx =$$

נפרק תחילה לגורמים את המכנה, למשוואה ממעלה אי זוגית יש תמיד שורש ממשי. נחפש שורשים למשוואה ע"י נחוש ננסה $x = 1$ ואמנם $x = 1$ פתרון.

$$1^3 - 7 \cdot 1 + 6 = 0$$

ולכן $x - 1$ גורם ב- $x^3 - 7x + 6$ נמצא את הגורם השני.

$$x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6) = (x-1)(x-2)(x+3)$$

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

$$\begin{aligned} * \quad 2x+1 &= A(x-2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x-2) \\ 2x+1 &= x^2(A+B+C) + x(A+2B-3C) + (-6A-3B+2C) \\ A+B+C &= 0 \\ A+2B-3C &= 2 \\ -6A-3B+2C &= 1 \end{aligned}$$

הפתרון:

$$A = -\frac{3}{4}$$

$$B = 1$$

$$C = -\frac{1}{4}$$

דרך קלה: נציב במשוואה $x = 1$

$$3 = A(1-2)(1+3) \quad ; \quad -\frac{3}{4} = A$$

$$x = 2 \quad ; \quad 5 = B(2-1)(2+3)$$

$$B = 1 \quad ; \quad x = -3$$

$$2(-3)+1 = C(-3-1)(-3-2)$$

$$-5 = 20C \quad ; \quad -\frac{1}{4} = C$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{x^3-7x+6} dx &= -\frac{3}{4} \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+3} dx = \\ &= -\frac{3}{4} \ln(x-1) + \ln(x-2) - \frac{1}{4} \ln(x+3) + c \end{aligned}$$

10.5 הצבות שונות (אלגבריות).

1. אנטגרל הכלל חזקות שברות של $a + bx$: $(a + bx)^{\frac{n}{m}}$, הצבה מתאימה של z ,
 $z^m = a + bx$ תהפוך אותו לאנטגרל של פונקציה רציונלית.

דוגמאות:
 (1)

$$\int \frac{x^2 dx}{(2+3x)^{2/3}} =$$

אם נציב:

$$z^3 = 2 + 3x$$

$$3z^2 dz = 3dx$$

$$z^2 dz = dx$$

$$z^2 = (2+3x)^{2/3}$$

$$x = \frac{z^3 - 2}{3}$$

$$x^2 = \frac{1}{9}(z^3 - 2)^2$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{(2+3x)^{2/3}} &= \frac{1}{9} \int \frac{(z^3 - 2)^2}{z^2} z^2 dz = \frac{1}{9} \int (z^2 - 2)^2 dz = \frac{1}{9} \int (z^4 - 2z^2 + 4) dz = \\ &= \frac{z^5}{7 \cdot 9} - \frac{2z^3}{36} + \frac{4z}{9} + c = \frac{(2+3x)^{5/3}}{63} - \frac{1}{18}(2+3x)^{4/3} + \frac{4}{9}(2+3x)^{1/3} + c \end{aligned}$$

(2)

$$\int \frac{dx}{4 + \sqrt{4+5x}} =$$

נציב:

$$z^2 = 4 + 5x$$

$$2z dz = 5dx$$

$$dx = \frac{2}{5} z dz$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4 + \sqrt{4+5x}} &= \frac{2}{5} \int \frac{z dz}{4+z} = \frac{2}{5} \int \frac{z+4-4}{z+4} dz = \frac{2}{5} \int \left(1 - \frac{4}{z+4}\right) dz = \\ &= \frac{2}{5} z - \frac{8}{5} \ln(z+4) + c = \frac{2}{5}(4+5x)^{1/2} - \frac{8}{5} \ln(\sqrt{4+5x} + 4) + c \end{aligned}$$

2. אנטגרל המכיל חזקות שברות של $a + bx^n$: הצבה מתאימה של חזקה של z עבור $a + bx^n$
 תביא לאנטגרל של פונקציה רציונלית.
 לדוגמה:

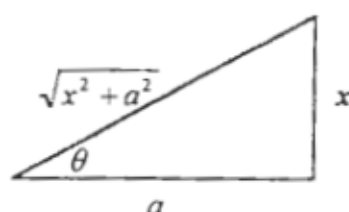
$$\int \frac{(x^2 - a^2)^{3/2}}{x} dx$$

ניתן לפתור ע"י:

$$x = a \sec \theta$$

$$dx = a \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$(x^2 - a^2)^{3/2} = a^3 \tan^3 \theta$$



$$\begin{aligned} \int \frac{a^3 \tan^3 \theta \cdot a \sec \theta \tan \theta d\theta}{a \sec \theta} &= a^3 \int \tan^4 \theta d\theta = a^3 \int \tan^2 \theta \tan^2 \theta d\theta = \\ &= a^3 \int \tan^2 \theta (\sec^2 \theta - 1) d\theta = a^3 \int \tan^2 \theta \sec^2 \theta d\theta - a^3 \int \tan^2 \theta d\theta = \\ &= a^3 \int \tan^2 \theta \sec^2 \theta d\theta - a^3 \int (\sec^2 \theta - 1) d\theta = \\ &= \frac{a^3}{3} \tan^3 \theta - a^3 \tan \theta + a^3 \theta + c = \frac{a^3 (x^2 - a^2)^{3/2}}{3a^3} - \\ &- a^3 \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} + a^3 \arctan \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} + c \end{aligned}$$

נראה עתה לפי שיטה הצבה אלגברית:

נציב:

$$x^2 - a^2 = z^2$$

על מנת להיפטר מהשורש.

$$2x dx = 2z dz$$

מכאן

$$\frac{dx}{x} = \frac{z dz}{x^2} = \frac{z dz}{z^2 + a^2}$$

$$\int \frac{(x^2 - a^2)^{3/2}}{x} dx = \int \frac{(z^2)^{3/2} z dz}{z^2 + a^2} = \int \frac{z^4 dz}{z^2 + a^2} =$$

אבל

$$\frac{z^4}{z^2 + a^2} = z^2 - a^2 + \frac{a^4}{z^2 + a^2}$$

$$= \int \left(z^2 - a^2 + \frac{a^4}{z^2 + a^2} \right) dz = \frac{z^3}{3} - a^2 z + a^4 \arctan \frac{z}{a} + c =$$

$$= \frac{(x^2 - a^2)^{3/2}}{3} - a^2 (x^2 - a^2)^{1/2} + \frac{a^4}{a} \arctan \frac{(x^2 - a^2)^{1/2}}{a} + c$$

אולם היתרון בשיטה זו שאינה מוגבלת רק לביטויים מחזקה שניה נוכל לראות בדוגמה הבאה:

$$\int x^5 \sqrt{2 + x^3} dx =$$

$$z^2 = 2 + x^3$$

$$(2x dx) = 3x^2 dx$$

$$x^3 dx = x^3 \cdot x^2 dx = (z^2 - 2) \frac{2}{3} \cdot z dz$$

$$= \frac{2}{3} \int z \cdot (z^2 - 2) z dz = \frac{2}{3} \int (z^4 - 2z^2) dz = \frac{2}{3} \frac{z^5}{5} - \frac{4}{3} \frac{z^3}{3} + c = \frac{2}{15} (2 + x^3)^{5/2} - \frac{4}{9} (2 + x^3)^{3/2} + c$$

נסיים בזאת הפרק הזן בשיטות אינטגרציה למעשה יש עוד מספר שיטות אינטגרציה במיוחד הצבות חשובות. אך לא ניתן להציג את כל השיטות וההצבות שמספרן רב ביותר! נתנו רק את הבסיס העיקרי לחישוב אינטגרלים. ואת הגישה לפתירת אינטגרלים. רצוי לעיין בספרות שהבאנו במבוא על מנת לראות דרכים נוספות.

להלן נסכם את שיטות האינטגרציה ונציג דוגמאות נוספות.

לפני כן נציין מספר דוגמאות לאנטגרלים שאינם ניתנים לתיאור באמצעות פונקציות אלמנטריות. לדוגמה:

$$\int e^{-x^2} dx ; \int \frac{dx}{\ln x} ; \int \frac{\sin x}{x} dx ; \int \frac{\cos x}{x} dx$$

אנטגרלים כאלו אין להם פתרון, כלומר לא קיימות פונקציות שאלו הנגזרת שלהם. מחשבים אנטגרלים כאלה בדרך כלל בשיטות נומריות כפי שנראה בהמשך.

10.6 סיכום.

א. אנטגרלים מיידיים:

$$\int x^n dx = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1} + c & n \neq -1 \\ \ln x + c & n = -1 \end{cases}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \tan x dx = \ln(\sec x) + c$$

$$\int \cot x dx = \ln(\csc x) + c$$

$$\int \sec x dx = \ln(\tan x + \sec x) + c$$

$$\int \csc x dx = \ln(\csc x - \cot x) + c$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + c$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + c$$

ב. שיטת הצבה.

אם נתון אנטגרל מהצורה

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$$

$$\int \sin \varphi(x)\varphi'(x)dx$$

או:

$$\int \varphi''(x)\varphi'(x)dx$$

אז אפשר להשתמש בשיטת הצבה פשוטה:

$$\varphi(x) = U$$

$$\varphi'(x)dx = dU$$

נקבל:

$$\int f(U)dU$$

לדוגמה:

$$\int x^7 \sin(x^8) dx$$

ושיטה זו בד"כ מביאה לאנטגרלים מדיים.

נסכם עתה את שיטות האנטגרציה שלמדנו.

ג. אנטגרציה לפי חלקים.

$$\int U dV = U \cdot V - \int V dU$$

מבוצעת בתנאים הבאים:

א. החלק הנבחר כ- dV חייב להיות נתון לבצוע אנטגרציה פשוטה.ב. $\int V dU$ לא יהיה מסובך יותר מ- $\int U dV$ ד. אנטגרלים טריגונומטריים.א. לפחות n או m אי זוגי.

$$\int \sin^m x \cos^n x dx \Rightarrow \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cos x dx$$

ב. n ו- m זוגיים.

מציבים:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

ג.

$$\int \sin mx \sin nx dx$$

$$\int \cos mx \sin nx dx$$

$$\int \cos mx \cos nx dx$$

הופכים המכפלות לסכומים.

ה. הצבות טריגונומטריות.

$$1. \text{ כאשר באנטגרנד בטוי } a^2 - b^2 x^2 \text{ מציבים } x = \frac{a}{b} \sin \theta$$

$$2. \text{ כאשר באנטגרנד בטוי } a^2 + b^2 x^2 \text{ מציבים } x = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \theta$$

$$3. \text{ כאשר באנטגרנד בטוי } b^2 x^2 - a^2 \text{ מציבים } x = \frac{a}{b} \sec \theta$$

ו. שיטת השברים החלקיים.

1.

$$\frac{1}{(a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2)} = \frac{A_1}{a_1 x + b_1} + \frac{A_2}{a_2 x + b_2}$$

2.

$$\frac{1}{(a_1 x + b_1)^n (a_2 x + b_2)} = \frac{A_1}{a_1 x + b_1} + \frac{B_1}{a_2 x + b_2} + \frac{B_2}{(a_2 x + b_2)^2} + \dots + \frac{B_n}{(a_2 x + b_2)^n}$$

$$\frac{1}{(ax^2 + bx + c)(a_1 x + b_1)} = \frac{A_1}{a_1 x + b_1} + \frac{A_2 + A_3 x}{ax^2 + bx + c}$$

$$\frac{1}{(ax^2 + bx + c)^n (a_1 x + b_1)} = \frac{A_1}{a_1 x + b_1} + \frac{B_1 + C_1 x}{ax^2 + bx + c} + \frac{B_2 + C_2 x}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{B_n + C_n x}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

דוגמאות:

(1)

$$\int x^5 \operatorname{arctg} x dx =$$

כדאי להשתמש בחלקים:

$$U = \operatorname{arctg} x$$

$$dU = \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$dV = x^5 dx$$

$$V = \frac{x^6}{6}$$

עכשיו נשתמש בנוסחה שלנו:

$$\int U dV = U \cdot V - \int V dU$$

$$= \frac{x^6}{6} \operatorname{arctg} x - \int \frac{1}{6} \frac{x^6}{x^2 + 1} dx$$

עתה נשתמש בחלוק: דרגת המונה גבוהה מהמכנה.

$$\int \frac{x^6}{x^2 + 1} dx = \int \left(x^4 - x^2 + 1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + x - \operatorname{arctg} x + c$$

ס"ה נקבל:

$$\int x^5 \operatorname{arctg} x dx = \frac{x^6}{6} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6} \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + x - \operatorname{arctg} x \right) + c$$

(2)

$$\int \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \int \frac{dU}{U^2} = \int U^{-2} dU = -U^{-1} + c = -\frac{1}{\ln x} + c$$

$$\ln x = U$$

$$\frac{1}{x} dx = dU$$

(3)

$$\int \frac{dx}{x^3 + 1} = \left\| \frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{Bx + C}{(x^2 - x + 1)} \right\|$$

$$1 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1)$$

$$1 = x^2(A + B) + x(-A + B + C) + A + C$$

$$A + B = 0$$

$$-A + B + C = 0$$

$$A + C = 1$$

$$\Rightarrow -A = B ; -2A + C = 0 ; A + C = 1$$

$$A = \frac{1}{3} \Rightarrow B = -\frac{1}{3} \Rightarrow C = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3 + 1} &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{3 \cdot 2} \int \frac{2x - 1 + 1 - 4}{x^2 - x + 1} dx = \\ &= \frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \end{aligned}$$

$$\left\| \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + c \right\|$$

$$= \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + c$$

(4)

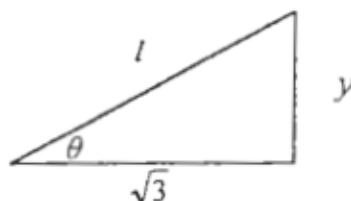
$$\int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 4)^{3/2}} = \int \frac{dx}{[(x-1)^2 + 3]^{3/2}} = \int \frac{dy}{[y^2 + 3]^{3/2}}$$

$$y = \sqrt{3} \operatorname{tg} \theta$$

$$dy = \sqrt{3} \sec^2 \theta d\theta$$

$$\sqrt{y^2 + 3} = \sqrt{3} \sec \theta$$

$$(y^2 + 3)^{3/2} = 3\sqrt{3} \sec^3 \theta$$



$$l = \sqrt{y^2 + 3}$$

$$\int \frac{dy}{[y^2 + 3]^{3/2}} = \int \frac{\sqrt{3} \sec^2 \theta d\theta}{3\sqrt{3} \sec^3 \theta} = \frac{1}{3} \int \cos \theta d\theta = \frac{\sin \theta}{3} + c = \frac{y}{\sqrt{y^2 + 3}} + c = \frac{x - 1}{(x^2 - 2x + 4)^{1/2}} + c$$

(5)

$$\int \frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)} dx =$$

$$\int \frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{x-2}$$

$$x^2 + 2 = A(x+1)^2(x-2) + B(x+1)(x-2) + C(x-2) + D(x+1)^3$$

$$x^2 + 2 = x^3(A+D) + x^2(-2A+2A+B+3D) + x(-3A-B+C+3D) - 2A-2B-2C+D$$

$$A+D=0 ; B+3D=1 ;$$

$$-3A-B+C+3D=0$$

$$-2A-2B-2C+D=0 \Rightarrow D=\frac{2}{9} \Rightarrow C=-1$$

$$\Rightarrow A=-D=-\frac{2}{9} \Rightarrow B=1-3D=1-\frac{6}{9}=\frac{1}{3}$$

$$\int \frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)} = -\frac{2}{9} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{(x+1)^2} dx - \int \frac{1}{(x+1)^3} dx + \frac{2}{9} \int \frac{1}{x-2} dx =$$

$$= -\frac{2}{9} \ln(x+1) - \frac{1}{3} (x+1)^{-1} + \frac{1}{2} (x+1)^{-2} + \frac{2}{9} \ln(x-2) + c$$

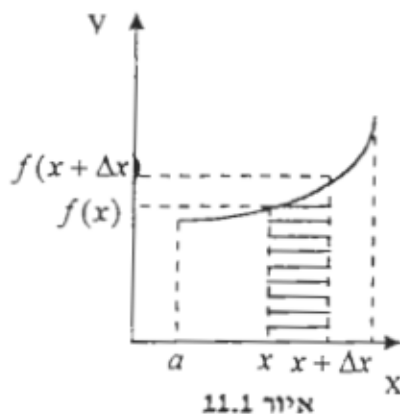
11. האנטגרל המסויים. (Definite integral)**11.1 הגדרה**

נתון: $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ נגדיר את הסמל $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$ הנקרא "אנטגרל מסוים".

נוכיח שכאשר $f(x) > 0$ ו- $b > a$ משמעות האנטגרל המסויים הוא השטח מתחת ל- $f(x)$ בין a ו- b . b נקרא גבול עליון, a נקרא גבול תחתון. נתונה פונקציה $f(x)$ המוגדרת ברווח $a \leq x \leq b$ נסמן ב- $A(x)$ את הפונקציה המבטאת את השטח מתחת לעקומה מנקודה a עד נקודה x .

אם הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה עולה נוכל לכתוב את

אי-שוויון הבא:



$$f(x) \cdot \Delta x \leq A(x + \Delta x) - A(x) \leq f(x + \Delta x) \cdot \Delta x$$

משמעותו: השטח מתחת לקו הפונקציה,

$A(x + \Delta x) - A(x)$, קטן משטח המלבן הגדול

$f(x + \Delta x) \cdot \Delta x$ וגדול משטח המלבן הקטן $f(x) \cdot \Delta x$.

אם נחלק ב- Δx נקבל:

$$f(x) \leq \frac{\Delta A}{\Delta x} \leq f(x + \Delta x)$$

אם נקח את הגבול כאשר $\Delta x \rightarrow 0$ נקבל:

$$\frac{dA}{dx} = f(x)$$

$$A(x) = \int f(x)dx = F(x) + c$$

$$A(a) = F(a) + c = 0 \rightarrow c = -F(a)$$

$$A(b) = F(b) + c = F(b) - F(a)$$

כלומר, $A(x)$, השטח מתחת לפונקציה מ- a ל- x , היא פונקציה שנגזרתה $f(x)$. כלומר $A(x)$

היא אנטגרל של $f(x)$, $A(x) = \int f(x)dx + c$.

השטח עד נקודה כלשהי x_0 ניתן ע"י $A(x_0) = \int_a^{x_0} f(x)dx + c$ אבל במקרה זה ניתן לקבוע את c ,

שכן $A(a) = 0$ ומכאן $C = -\int_a^a f(x)dx$.

אם אנו מעוניינים לחשב את השטח בין a ל- b כלומר

$$A(b) = \int f(x) dx \Big|_{x=b} - \int f(x) dx \Big|_{x=a}$$

מסמנים את הביטוי הנ"ל בדרך פשוטה :

$$A(b) = \int_a^b f(x) dx = \int f(x) dx \Big|_x^b - \int f(x) dx \Big|_{x=a}$$

משתמשים גם בסימון הבא :

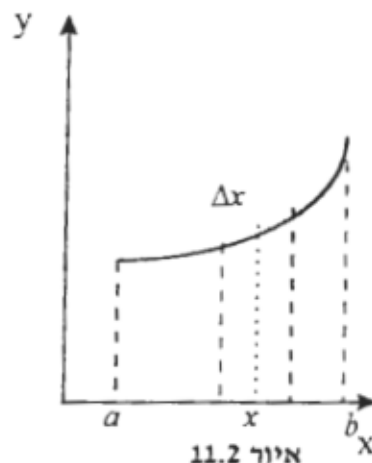
$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

כאשר $F(x)$ היא פונקציה שגזרתה $f(x)$

$$A(x) = F(x) - F(a) = \int_a^x f(x) dx$$

11.2 האנטגרל כסכום

ראוי לציין שאפשר לכתוב את השטח מתחת לפונקציה $f(x)$ בין a ל- b בצורה הבאה :



$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

כאשר מחלקים הרווח $a-b$ ל- n חלקים שווים דהיינו

$$\Delta x = \frac{a-b}{n} \quad \text{זה אינו מדויק, אך אם נקח } \Delta x_i \rightarrow 0 \text{ או } n \rightarrow \infty, \text{ נקבל שטח מדויק. כלומר}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = A(b)$$

ולכן כותבים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

נוסחה זו מקשרת בין סכום של האברים לאנטגרל.

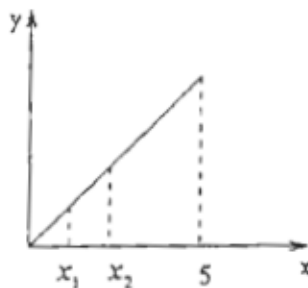
נוסחה זו גם מאפשרת לנו לחשב אנטגרלים מסויימים במחשב, שכן המחשב מבצע סכום במהירות רבה!

דוגמה למשמעות האנטגרל כסכום.
נחשב האנטגרל המסויים:

$$\int_0^5 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^5 = \frac{25}{2}$$

נוכיח זאת ע"י בצוע הסכום. נחלק את הרווח $0 \leq x \leq 5$ ל- n חלקים שווים באופן $\Delta x = \frac{5}{n}$

נבחר את הנקודות $x_1, x_2, \dots, x_n \dots$ כנקודות קצה ימנית של הרווחים. כלומר:



איור 11.3

$$x_1 = \Delta x$$

$$x_2 = 2\Delta x$$

$$x_3 = 3\Delta x$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_n = n\Delta x$$

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{5}{n} \text{ כולם שווים.}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \sum_{k=1}^n (k \cdot \Delta x) \Delta x = (1 + 2 + 3 + \dots + n)(\Delta x)^2 = \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{5}{n}\right)^2 = \frac{25}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{25}{2} = \int_0^5 x dx$$

אם נבחר את x_i להיות קצה שמאלי של הרווח כלומר:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \Delta x \quad x_3 = 2\Delta x \quad \dots \quad x_n = (n-1)\Delta x$$

נקבל

$$S_n = \sum_{k=1}^n (k-1) \Delta x \cdot \Delta x = (1 + 2 + 3 + \dots + (n-1))(\Delta x)^2 = \frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{5}{n}\right)^2 = \frac{25}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{25}{2} \quad \text{ומקבלים אותה תוצאה:}$$

שים לב: במקרה הראשון עבור n סופי השטח היה גדול יותר ובמקרה השני היה קטן יותר אך בשניהם כאשר $n \rightarrow \infty$ מקבלים אותה תוצאה.

11.3 חוקי אנטגרציה

נראה עתה כמה חוקים חשובים
(1)

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

הוכחה:

$$\int_a^a f(x) dx = \int_{x=a}^{x=a} f(x) dx = 0$$

(2)

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx \Big|_c - \int_a^c f(x) dx \Big|_a + \int_c^b f(x) dx \Big|_b - \int_c^b f(x) dx \Big|_c = \\ &= \int_a^c f(x) dx \Big|_{x=b} - \int_c^b f(x) dx \Big|_{x=a} = \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

מ.ש.ל.

וזה גם נכון מבחינת השטחים.

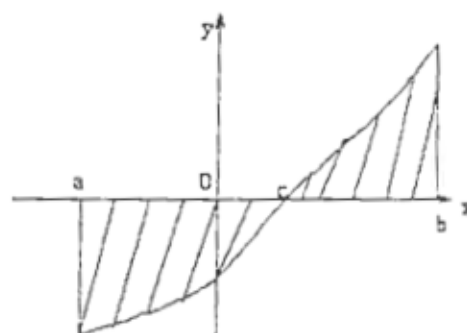
(3)

קל מאוד להוכיח:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

(4)

הערה חשובה: אם יש לנו פונקציה מהצורה:



איור 11.4

אזי

$$\int_a^c f(x) dx < 0$$

ואילו

$$\int_c^b f(x) dx > 0$$

כלומר שטח שנמצא מתחת לעקומה ניתן ע"י האנטגרל בסימן שלילי ולכן חישוב האנטגרל

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

לא יתן את השטח שבין העקומה לציר x שכן האנטגרל $\int_a^c f(x) dx$ יתן תוצאה שלילית שתופחתמהאנטגרל החיובי $\int_c^b f(x) dx$. ולכן כדי לחשב השטח המקווקו צריך להוסיף $\left| \int_a^c f(x) dx \right|$ ל- $\int_c^b f(x) dx$. חשוב להבדיל בין חישוב האנטגרל $\int_a^b f(x) dx$ לבין חישוב השטח.

המטרה העיקרית היא חישוב האנטגרל ולא חישוב השטח!

11.4 דוגמאות:

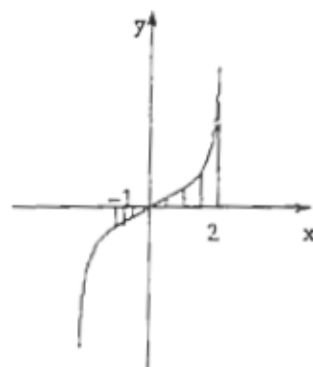
(1)

חשוב האנטגרל

$$\int_{-1}^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^2 = \frac{1}{4}(16-1) = \frac{15}{4}$$

מצד שני חשב השטח בין הקו $y = x^3$ ובין ציר x בין $x = -1$, $x = 2$.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 x^3 dx &= \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^0 = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \\ \int_0^2 x^3 dx &= \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{16}{4} + 0 = 4 \\ S &= \left| \int_{-1}^0 x^3 dx \right| + \int_0^2 x^3 dx = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4} \end{aligned}$$



איור 11.5

(2) מצא את השטח מתחת לעקומה $f(x) = \sin x$ בין $x = 0$ ל- $x = \pi$. תוצאה זו תהיה חיובית שכן $\sin x$ עבור הערכים $0 \leq x \leq \pi$ הוא גדול או שווה לאפס. ולכן:

$$\int_0^\pi dx \sin x = -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$$

תוצאה האנטגרל:

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0) = -1 + 1 = 0$$

אולם השטח יהיה $2+2=4$ מטעמי סימטריה.

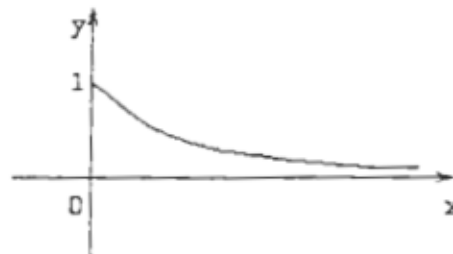
$$\int_0^\pi dx \sin x = 2$$

$$\int_\pi^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_\pi^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos \pi) = -\cos 2\pi + \cos \pi = -1 + (-1) = -2$$

ולכן סיימ השטח יהיה 4.

(3) חשב השטח מתחת לעקומה $y = e^{-x}$ בין 0 ל- ∞ . האנטגרנד תמיד חיובי.

לכן:

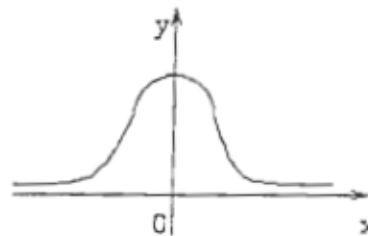


$$S = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = -e^{-\infty} + e^0 = 1$$

זוהי תוצאה מעניינת למרות שהפונקציה מתפשטת בציר x עד ∞ השטח תחתה הוא סופי. וזה נגרם מכיון ש- e^{-x} שואף מהר לאפס כאשר x גדל.

(4) מצא השטח מתחת לעקומה $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ בין 0 ל- ∞ ובין 1 ל- ∞ .

לכן:



$$\int_0^{\infty} dx \frac{1}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_1^{\infty} = \arctg \infty - \arctg 1 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

בגלל הסימטריה

11.5 החלפת משתנה

נעבור עתה למקרים בהם בצוע האנטגרל דורש החלפת משתנה. אז כמובן יש צורך לשנות את הגבולות בהתאם למשתנה החדש או לבצע אנטגרל לא מסוים ולהציב הגבולות כך כאשר חוזרים למשתנה הראשון. נדגים עתה שני דרכים אלו. חשב:

$$\int_{-a}^a \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = F(a) - F(-a)$$

נחשב האנטגרל הלא מסוים:

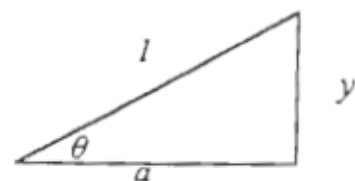
$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = F(x)$$

$$x = a \operatorname{tg} \theta$$

$$dx = a \sec^2 \theta d\theta$$

$$(a^2 + x^2)^{1/2} = a \sec \theta$$

$$(a^2 + x^2)^{3/2} = a^3 \sec^3 \theta$$



$$l = \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{a \sec^2 \theta d\theta}{a^3 \sec^3 \theta} = \frac{1}{a^2} \int \cos^3 \theta d\theta = \frac{1}{a^2} \int (1 - \cos^2 \theta) \cos \theta d\theta = \\
 &= \frac{1}{a^2} \sin \theta - \frac{1}{a^2} \frac{\sin^3 \theta}{3} + C = \frac{1}{a^2} \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \right) \Bigg|_{-a}^a = \\
 &= \frac{1}{a^2} \left(\frac{a}{\sqrt{2a}} - \frac{1}{3} \frac{a^3}{2\sqrt{2}a^3} \right) - \frac{1}{a^2} \left(\frac{-a}{\sqrt{2a}} - \frac{1}{3} \frac{(-a)^3}{2\sqrt{2}a^3} \right) = \\
 &= \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{6\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{a^2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{a^2} \frac{5}{3\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

ועתה נראה בדרך הראשונה :

בהצבה $x = a \tan \theta$ צריך לבדוק מהם θ המתאימים לגבולות :

$x = a$, $x = -a$ עבור x :

$$a = a \tan \theta$$

$$\tan \theta = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$-a = a \tan \theta$$

$$-1 = \tan \theta$$

$$\theta = -\frac{\pi}{4}$$

לכן :

$$\begin{aligned}
 \int_{-a}^a \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} &= \frac{1}{a^2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^3 \theta d\theta = \left(\frac{1}{a^2} \sin \theta - \frac{1}{a^2} \frac{\sin^3 \theta}{3} \right) \Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \\
 &= \frac{1}{a^2} \left(\sin \frac{\pi}{4} - \frac{\sin^3 \pi/4}{3} \right) - \frac{1}{a^2} \left(\sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) - \frac{\sin^3 \left(-\pi/4 \right)}{3} \right) = \\
 &= \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{6\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{a^2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{a^2} \frac{5}{3\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

לעתים נזדקק לבצע אינטגרל מהטיפוס $\int_a^b f(x, y) dx$ כאשר y מבוטא באמצעות קשר עם x ,

$y = y(x)$. על מנת לבצע האינטגרל עלינו רק להציב במקום y , $y(x)$ ולבצע האינטגרל על x אולם לעתים קל יותר להציב במקום x ו- dx את ערכיהם באמצעות y ו- dy ואז לשנות הגבולות בהתאם.

דוגמאות:

(1) חשב

$$\int_a^{3a} y^2 dx$$

כאשר

$$x^2 - y^2 = a^2$$

נציב $y^2 = x^2 - a^2$
ונקבל

$$\int_a^{3a} (x^2 - a^2) dx =$$

$$y^2 = x^2 - a^2$$

$$\int_a^{3a} (x^2 - a^2) dx = \left[\frac{x^3}{3} - a^2 x \right]_a^{3a} = \frac{20}{3} a^3$$

$$\int_0^{\sqrt{3}a} \frac{y^2 y dy}{\sqrt{a^2 + y^2}} \quad \text{בדרך השנייה נחליף } 2x dx = 2y dy \text{ ונקבל}$$

וזה אנטרל מסובך יותר!
(2) חשב:

$$\int_0^1 y dx$$

כאשר:

$$x = \cos 2y$$

נוכל כאן לפתור y באמצעות x .

$$2y = \arccos x$$

$$y = \frac{1}{2} \arccos x$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \arccos x dx$$

נציב:

$$u = \arccos x \quad ; \quad v = x$$

$$du = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; \quad dv = dx$$

$$\frac{1}{2} \int \arccos x dx = \frac{1}{2} x \arccos x + \frac{1}{2} \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$1 - x^2 = u$$

$$-2x dx = du$$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{du}{u^{1/2}} = -u^{1/2} + C$$

$$= \frac{1}{2} x \arccos x - \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} + c$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \arccos x dx = \frac{1}{2} \left[x \arccos x - \sqrt{1-x^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} [1 \arccos 1 - 0] - \frac{1}{2} [0 - 1] = \frac{1}{2}$$

בשיטה השנייה :

$$\int_0^1 y dx$$

$$x = \cos 2y ; \quad dx = -2 \sin 2y dy$$

$$x = 0 \rightarrow \cos 2y = 0 \rightarrow 2y = \frac{\pi}{2} \rightarrow y = \frac{\pi}{4}$$

$$x = 1 \rightarrow \cos 2y = 1 \rightarrow 2y = 0 \rightarrow y = 0$$

$$\int_0^1 y dx = \int_{\pi/4}^0 y (-2 \sin 2y) dy = -2 \int_{\pi/4}^0 y \sin 2y dy$$

$$u = y ; \quad dv = \sin 2y dy$$

$$du = dy ; \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2y$$

$$-2 \int_{\pi/4}^0 y \sin 2y dy = -2 \left[-\frac{1}{2} y \cos 2y \right]_{\pi/4}^0 - \int_{\pi/4}^0 \cos 2y dy = 0 - \frac{1}{2} \sin 2y \Big|_{\pi/4}^0 = -\frac{1}{2} \sin 0 + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^\infty dx \cdot x^n e^{-x}$$

.3

נחשב כאשר n שלם :

$$u = x^n ; \quad dv = e^{-x} dx$$

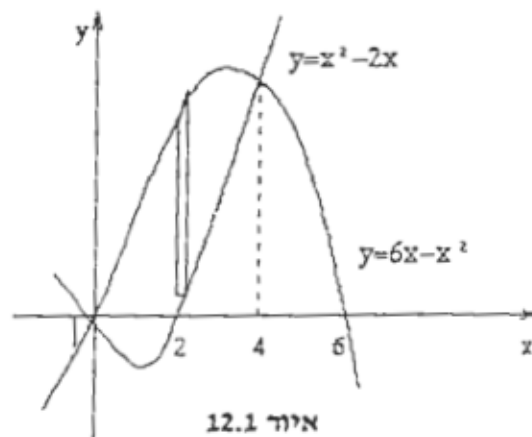
$$du = nx^{n-1} ; \quad v = -e^{-x}$$

$$\int_0^\infty dx \cdot x^n e^{-x} = -x^n e^{-x} \Big|_0^\infty + n \int_0^\infty dx x^{n-1} e^{-x} = 0 + n \int_0^\infty dx x^{n-1} e^{-x} = n(n-1) \int_0^\infty dx x^{n-2} e^{-x} =$$

$$= n(n-1)(n-2) \dots 1 \int_0^\infty dx e^{-x} = n! \cdot (-e^{-x}) \Big|_0^\infty = n! (0 - (-1)) = n!$$

12. שמושים של אנטגרלים מסוימים.

12.1 שטחים



1. מצא את השטח המוגבל בין הפרבולות.

$$y = x^2 - 2x \quad , \quad y = 6x - x^2$$

הפרבולות נחתכות בנקודות הבאות:

$$x^2 - 2x = 6x - x^2$$

$$2x^2 - 8x = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 4$$

$$y_1 = 0 \quad y_2 = 8$$

רוחב המלבן Δx וגובהו:

$$6x - x^2 - (x^2 - 2x) = 8x - 2x^2$$

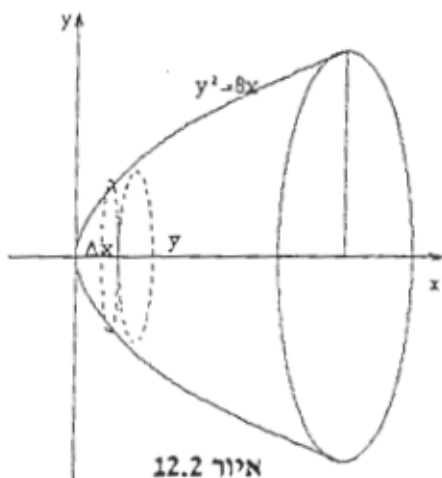
ולכן שטחו:

$$(8x - 2x^2)\Delta x$$

והשטח המבוקש יהיה:

$$\int_0^4 (8x - 2x^2) dx = \left(4x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right)_0^4 = 64 - \frac{128}{3} = \frac{64}{3}$$

12.2 נפחים סיבוביים



1. מצא את הנפח הנוצר ע"י סובוב חלק הרביע

הראשון הכלוא בין הפרבולה $y^2 = 8x$ והישר

$x = 2$ סביב ציר x . נחלק השטח לרצועות אנכיות

כשמסובבים את המלבן סביב ציר x

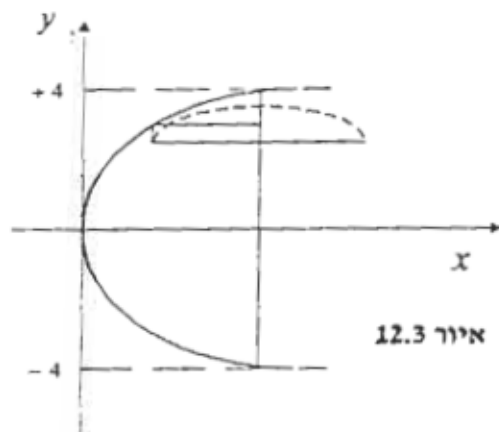
נוצרת דיסקית בעלת רדיוס y ורוחב Δx

נפח הדיסקית הוא:

$$dV = \pi y^2 \Delta x$$

ולכן הנפח הכללי יהיה:

$$V = \int_0^2 dV = \int_0^2 \pi y^2 dx = \pi \int_0^2 8x dx = 4\pi x^2 \Big|_0^2 = 16\pi$$



איור 12.3

2. מצא את הנפח הנוצר ע"י סיבוב השטח

המוגבל ע"י הפרבולה $y^2 = 8x$ והישר

$x = 2$ סביב הישר $x = 2$.

נחלק השטח לרצועות אנכיות. כשמוסיבים

את המלבן סביב $x = 2$ נוצרת דיסקית אשר

רדיוסה $2 - x$ וגובה Δy ונפחה

$\Delta V = \pi(2 - x)^2 \Delta y$. נפח גוף הסובב הוא סכום נפח

הדיסקיות מ- $y = -4$ עד $y = +4$ דהיינו:

$$V = \int_{-4}^4 \pi(2 - x)^2 dy = 2\pi \int_0^4 (2 - x)^2 dy = 2\pi \int_0^4 \left(2 - \frac{y^2}{8}\right) dy = \frac{256}{15}\pi$$

12.3 מומנטים

3. מומנט ראשון של שטח מישורי ביחס

לישר מוגדר כסכום של מכפלת השטח

במרחקם לישר.

מצא את המומנטים ביחס לציר x וביחס

לציר y של השטח המישורי $y = 4 - x^2$

ברביע הראשון. שטח המלבן $x\Delta y$

המומנט הראשון של שטח זה לגבי ציר x

הוא $xy\Delta y$.

המומנט של כל השטח:

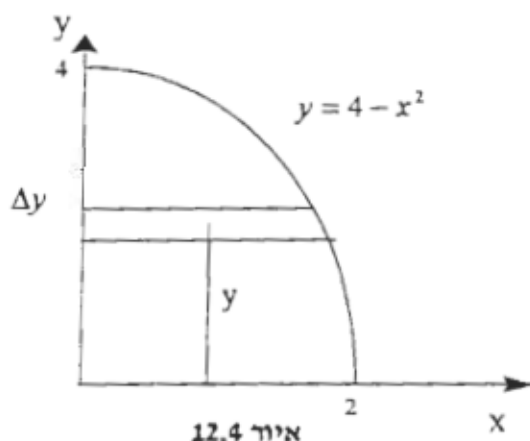
$$M_x = \int_0^4 xy dy = \int_2^0 (4 - x^2)x(-2x dx) =$$

$$= -2 \int_2^0 (4x^2 - x^4) dx = -2 \left(\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_2^0 = \frac{128}{15}$$

וביחס לציר y

$$M_y = \int_0^2 y dx = \int_0^2 (4 - x^2) dx = 4x - \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 =$$

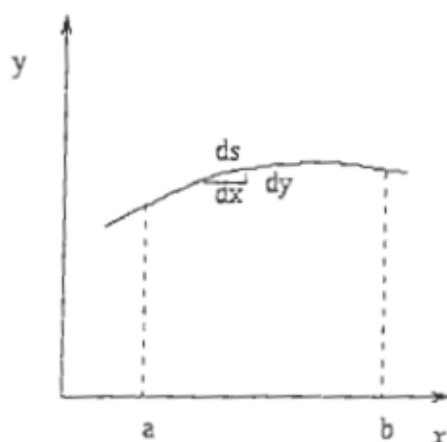
$$= 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$



איור 12.4

12.4 אורך קשת :

נחשב אורך קשת של פונקציה $y = f(x)$ בין $x = a$ ו- $x = b$



איור 12.5

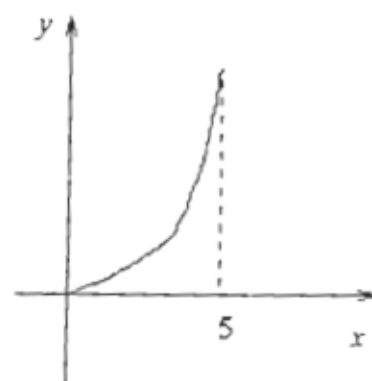
$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$S = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

זוהי נוסחת אורך קשת!

דוגמה: מצא את אורך הקשת של העקומה $y = x^{3/2}$ מ- $x = 0$ עד $x = 5$.



איור 12.6

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} x^{1/2}$$

$$S = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} x^{1/2}\right)^2} dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x} dx =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} \left(1 + \frac{9}{4} x\right)^{3/2} \Big|_0^5 = \frac{8}{27} \left[\left(\frac{49}{4}\right)^{3/2} - 1\right] =$$

$$= \frac{8}{27} \left[\frac{343}{8} - 1\right] = \frac{335}{27}$$

13. גזירה מתחת לסימון האנטגרל

לעתים קרובות האנטגרל תלוי במשתנה נוסף (פרמטר) למשתנה הבלתי תלוי x :

$$I(\mu) = \int_a^b dx f(x, \mu)$$

האנטגרל תלוי ב- μ כי לא מופיע בתוצאה x אלא רק μ .
אם נגזור לפי μ

$$I'(\mu) = \int_a^b dx \frac{df(x, \mu)}{d\mu}$$

למשל:

$$I(\mu) = \int_0^\infty e^{-\mu x} dx = -\frac{x e^{-\mu x}}{\mu} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\mu}$$

$$I'(\mu) = -\int_0^\infty x \underbrace{e^{-\mu x}}_{\frac{d}{d\mu} e^{-\mu x}} dx = \mu x e^{-\mu x} \Big|_0^\infty - \frac{1}{\mu} \int_0^\infty e^{-\mu x} dx = -\frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{1}{\mu}\right) = -\frac{1}{\mu^2}$$

אבל על מנת לקבל תוצאה זו ניתן לגזור:

$$I(\mu) = +\frac{1}{\mu}$$

$$I'(\mu) = -\frac{1}{\mu^2}$$

$$I''(\mu) = \int_0^\infty x^2 e^{-\mu x} dx$$

ונוכל לחשב זאת ע"י שנגזור $I'(\mu)$
כלומר:

$$I''(\mu) = \frac{2}{\mu^3}$$

לעתים קרובות מעוניינים לחשב $I'(\mu)$ ואין אפשרות לחשב את $I(\mu)$ אך יש אפשרות לחשב $\int_a^b dx \frac{df}{d\mu}$

לדוגמה:

$$I(\mu) = \int_0^1 \frac{\arctg \mu x}{x} dx$$

איננו יודעים לחשב אנטגרל זה אולם

$$I'(\mu) = \int_0^1 \frac{x}{1+\mu^2 x^2} \cdot \frac{1}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\mu^2 x^2} dx = \frac{1}{\mu} \int_0^\mu \frac{dU}{1+U^2} = \left\| \begin{matrix} \mu x = U \\ dx = \frac{dU}{\mu} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{\mu} \arctg U \Big|_0^\mu = \frac{1}{\mu} \arctg \mu$$

כלומר הצלחנו לחשב $I'(\mu)$ בלי לחשב את $I(\mu)$.

לעתים יש אפשרות לחשב אנטגרלים מסוימים ע"י גזירתם ביחס לפרמטר חשוב האנטגרל ואז לעשות אנטגרציה.

$$I(\mu) = \int_0^1 \frac{x^\mu - 1}{\ln x} dx$$

לדוגמה:

$$x^\mu = e^{\ln x^\mu} = e^{\mu \ln x}$$

נוכל לכתוב:

$$I(\mu) = \int_0^1 \frac{e^{\mu \ln x} - 1}{\ln x} dx$$

כלומר:

$$I'(\mu) = \int_0^1 \frac{1}{\ln x} \frac{d}{d\mu} (e^{\mu \ln x} - 1) dx = \int_0^1 \frac{1}{\ln x} \ln x e^{\mu \ln x} dx = \int_0^1 e^{\mu \ln x} dx = \int_0^1 x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} \Big|_0^1 =$$

אם $\mu \leq -1$ האנטגרל מתבדר $I'(\mu) = \infty$ אם $\mu < -1$ מקבלים $\frac{1}{\mu+1}$

$$\frac{dI}{d\mu} = \frac{1}{1+\mu}$$

כלומר:

$$I(\mu) = \int \frac{1}{1+\mu} d\mu = \ln(\mu+1) + c$$

$$I(0) = 0 \rightarrow c = 0$$

ע"מ לקבוע את C אנו יודעים:

מכאן נובע:

$$\int_0^1 \frac{x^\mu - 1}{\ln x} dx = \ln(\mu+1)$$

דוגמה נוספת:

נתון:

$$\int_0^\pi \frac{dx}{\alpha - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}$$

נחשב

$$\int_0^\pi \frac{dx}{(2 - \cos x)^2}$$

$$I(\alpha) = \int_0^\pi \frac{dx}{\alpha - \cos x} = \pi(\alpha^2 - 1)^{-1/2}$$

מצד אחד:

$$I'(\alpha) = \int_0^\pi \frac{(-dx)}{(\alpha - \cos x)^2}$$

ומצד שני:

$$I'(\alpha) = -\frac{1}{2} \pi (\alpha^2 - 1)^{-3/2} \cdot 2\alpha = \frac{-\pi\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{3/2}}$$

כלומר:

$$\int_0^\pi \frac{dx}{(2 - \cos x)^2} = \frac{\pi\alpha}{(\alpha^2 - 1)^{3/2}}$$

$$\int_0^\pi \frac{dx}{(2 - \cos x)^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

ואילו

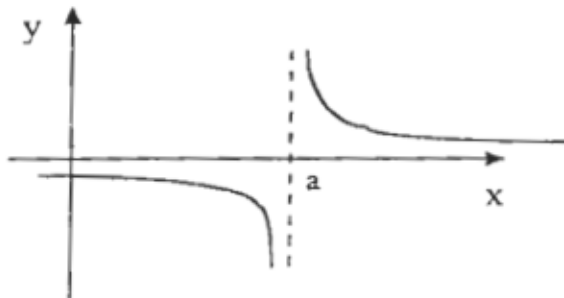
14. אנטגרלים לא אמיתיים.**14.1 פונקציה רציפה**

לפני שנדון באנטגרלים לא אמיתיים נחזור על ההגדרה של פונקציה רציפה ואי רציפה. פונקציה נקראת רציפה ב- $x = x_0$ אם ורק אם היא מקיימת התנאים הבאים :

א. $f(x_0)$ - מוגדר

ב. קיים $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

אחרת היא אינה רציפה.



איור 14.1

דוגמה: הפונקציה $y = \frac{1}{x-a}$ אינה רציפה בנקודה $x = a$ שכן,

א. $f(a)$ אינו מוגדר.

ב. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ אינו קיים (שוה ל- ∞)

דוגמה נוספת: הפונקציה מהצורה

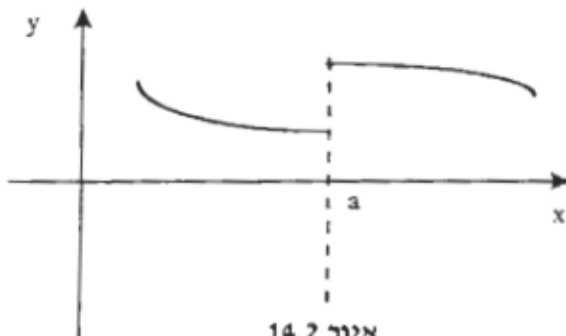
אינה רציפה שכן אמנם $f(x_0)$ יכול

להיות מוגדר אולם :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

ולכן אין לפונקציה גבול, כלומר

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ לא קיים.



איור 14.2

עד כה טפלנו באנטגרלים מסוימים מהצורה $\int_a^b f(x) dx$

כאשר $f(x)$ היה רציף בתחום האינטגרציה.

נשאל עתה מה יקרה כאשר $f(x)$ אי רציף בנקודה אחת לפחות בתחום $a \leq x \leq b$!

14.2 אינטגרל לא אמיתי

אנטגרל מסוים $\int_a^b f(x) dx$ נקרא אנטגרל לא אמיתי אם :

א. לאנטגרנד $f(x)$ נקודת אי רציפות אחת לפחות בתחום $a \leq x \leq b$

או :

ב. לפחות אחד מגבולות האנטגרציה הוא אינסוף. במקרים אלו מרחיבים את הגדרת האנטגרל המסוים באופן הבא :

נבחין בין 4 מקרים:

אנטגרל אי רציף:

1. ל- $f(x)$ אי רציפות בנקודה b

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^\beta f(x) dx$$

2. ל- $f(x)$ אי רציפות בנקודה a

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_\alpha^b f(x) dx$$

3. ל- $f(x)$ אי רציפות בנקודה a ו- b

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow a^+ \\ \beta \rightarrow b^-}} \int_\alpha^\beta f(x) dx$$

4. ל- $f(x)$ אי רציפות בנקודה c כאשר $a < c < b$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\gamma \rightarrow c^-} \int_a^\gamma f(x) dx + \lim_{\gamma \rightarrow c^+} \int_\gamma^b f(x) dx$$

גבולות האנטגרציה אינסופיים:

1.

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{U \rightarrow \infty} \int_a^U f(x) dx$$

2.

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{U \rightarrow -\infty} \int_U^a f(x) dx$$

3.

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{\substack{U \rightarrow \infty \\ V \rightarrow -\infty}} \int_V^U f(x) dx$$

דוגמאות:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\beta \rightarrow 1^-} \int_0^\beta \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

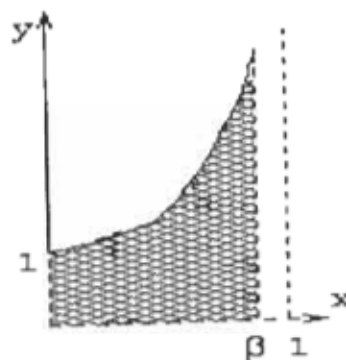
מתאים למקרה 1.

נחשב:

$$\int_0^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin|_0^{\beta} = \arcsin \beta$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \int_0^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\beta \rightarrow 1} \arcsin \beta = \frac{\pi}{2}$$

המשמעות הגאומטרית:



איור 14.3

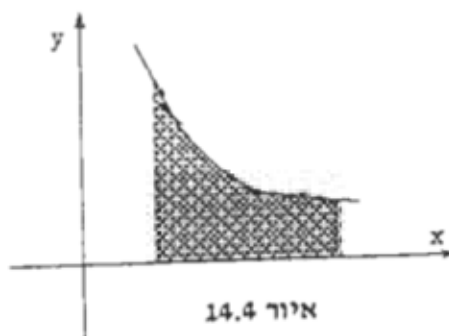
דוגמה למקרה 2:

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

כאן האנטגרנד הוא ∞ בגבול התחתון ולכן צריך לבצע בורה הבאה:

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x}|_a^4 = \lim_{a \rightarrow 0^+} (4 - 2\sqrt{a}) = 4$$

באופן גאומטרי:



איור 14.4

דוגמה למקרה 3:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{\beta \rightarrow 1^- \\ \alpha \rightarrow -1^+}} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{\beta \rightarrow 1^- \\ \alpha \rightarrow -1^+}} \arcsin x \Big|_{\alpha}^{\beta} = \lim_{\substack{\beta \rightarrow 1^- \\ \alpha \rightarrow -1^+}} (\arcsin \beta - \arcsin \alpha) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

בחינת גאומטרית גבול השטח הוא π .

כל הדוגמאות שהבאנו עד כה, נקראים אינטגרלים לא אמיתיים והאינטגרל קיים כיון שהתוצאה היתה סופית. כיון שהיה גבול לפי ההגדרה.

אם הגבול לא קיים אזי הסמל $\int_a^b f(x)dx$ נקרא חסר משמעות או חסר מובן או האנטגרל מתבדר.

דוגמה:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{\alpha}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (\ln 1 - \ln \alpha)$$

גבול זה אינו קיים ולכן הסמל $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ הוא חסר משמעות או האנטגרל מתבדר.

נעבור לטפל עתה במקרה הרביעי בו האנטגרנד אינו רציף בנקודה $b > c > a$.
נוכל לכתוב:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

אם אחד משני האנטגרלים באגף ימין מתבדר אזי האנטגרל בצד שמאל חסר משמעות (מתבדר).

דוגמה:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

סטודנט לא זהיר יבצע האנטגרל בצורה הבאה:

$$= -\frac{1}{x-1} \Big|_0^2 = -\frac{1}{1} + \frac{1}{-1} = -2$$

וזה בפרש אבסורד שהרי $\frac{1}{(x-1)^2} > 0$ ולכן האנטגרל אם הוא קיים חייב לתת שטח שהוא חיובי

בסתירה לתוצאה שהיא שלילית.

התשובה היא שהאנטגרל פעולתו הוגדרה כפי שבצענו למעלה רק עבור פונקציה רציפה בתחום

$a \leq x \leq b$ ואילו $\frac{1}{(x-1)^2}$ אי רציפה בנקודה $x = 1$ (הפונקציה שואפת ל- ∞) ולכן צריכים לבצע

האנטגרל בדרך הבאה:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

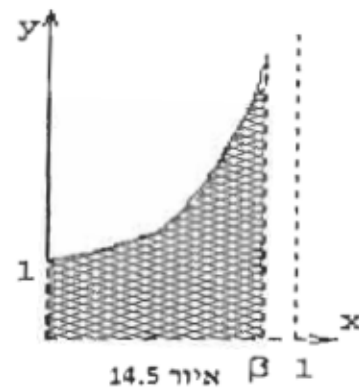
$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\beta \rightarrow 1^-} \int_0^\beta \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\beta \rightarrow 1^-} \left[-\frac{1}{x-1} \right]_0^\beta = \lim_{\beta \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{1-\beta} \right) = \infty$$

וזה כבר מוכיח שהאנטגרל $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ אינו קיים ולא מעניין אותנו אם האנטגרל השני $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$

קיים או לא.

המשמעות הגאומטרית:

השטח מתחת לפונקציה מתבדר!



דוגמאות נוספות:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^{2/3}} &= \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^{2/3}} + \int_0^1 \frac{dx}{x^{2/3}} = \lim_{\beta \rightarrow 0^-} \int_{-1}^\beta \frac{dx}{x^{2/3}} + \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_\alpha^1 \frac{dx}{x^{2/3}} = \lim_{\beta \rightarrow 0^-} 3x^{1/3} \Big|_{-1}^\beta + \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} 3x^{1/3} \Big|_\alpha^1 = \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 0^-} (3\beta^{1/3} + 3) + \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (3 - 3\alpha^{1/3}) = 3 + 3 = 6 \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^3} + \int_0^1 \frac{dx}{x^3} =$$

אפשר לוותר על סימון הגבול ולכתוב:

$$\frac{x^{-2}}{-2} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^{-2}}{-2} \Big|_0^1 = \infty$$

אילו היינו מבצעים האינטגרל בלי לשים לב לנקודת האי רציפות היינו מקבלים תוצאה

$$\left. \frac{x^{-2}}{-2} \right|_{-1}^1 = 0$$

לא נכונה

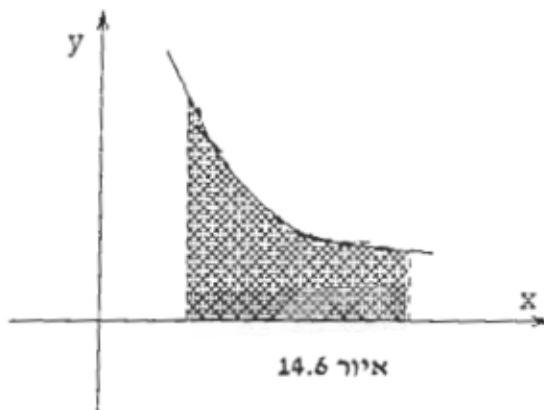
נוכל לסכם $\int_a^c \frac{dx}{(b-x)^p}$ ו- $a \leq b \leq c$ מתכנסים רק אם $p < 1$ ומתבדרים אם $p \geq 1$.

כפי שראינו גם אינטגרלים שהגבולות שלהם אינסוף נקראים לא אמתיים.

דוגמאות:

(1) חשב

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{U \rightarrow \infty} \int_1^U \frac{dx}{x^2} = \lim_{U \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^U = \lim_{U \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{U} - 1 \right) = 1$$



משמעות גאומטרית:

ניתן לסכם ולומר $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ כאשר $a > 0$ האינטגרל מתכנס אם $p > 1$ ומתבדר אם $p \leq 1$. הוכחה:

$$p > 1 \text{ אם } \int_a^\infty \frac{dx}{x^p} = \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_a^\infty = \frac{1}{(1-p)x^{p-1}} \Big|_a^\infty$$

האינסוף במונה ומקבלים ∞ .

(2) חשב:

$$\int_0^\infty dx x^n e^{-x}$$

כאשר n טבעי

$$U = x^n \quad dV = e^{-x} dx$$

$$dU = nx^{n-1} \quad V = -e^{-x}$$

$$\int_0^\infty x e^{-x} dx = -xne^{-x} \Big|_0^\infty = n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = 0 + n \int_0^\infty dx x^{n-1} e^{-x} =$$

$$= n(n-1) \int_0^\infty dx x^{n-2} e^{-x} = n(n-1)(n-2) \cdots 1 \int_0^\infty dx e^{-x} = n! (-e^{-x}) \Big|_0^\infty = n! \cdot 1 = n!$$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty dx x^n e^{-x} = n!$$

פונקציה זו מוגדרת כפונקציה גמא

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

קיים הקשר:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx =$$

(3) חשב

נציב:

$$e^x = U$$

$$x = \infty \rightarrow U = \infty$$

$$x = -\infty \rightarrow U = 0$$

$$e^x dx = dU$$

$$\int_0^\infty \frac{dU}{U^2 + 1} = \arctg U \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin x}{x} dx =$$

(4) חשב:

$$U = \sin x \quad dU = \cos x dx$$

$$V = -e^{-x} \quad dV = e^{-x} dx$$

$$dU = -\sin x dx \quad U = \cos x$$

$$V = -e^{-x} \quad dV = e^{-x} dx$$

$$0 + (-e^{-x} \cos x) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x} \sin x dx = 0 + 1 = 1$$

$$2 \int_0^\infty e^{-x} \sin x dx = 1$$

$$\int_0^\infty e^{-x} \sin x dx = \frac{1}{2}$$

לעתים חשוב לנו לדעת אם אנטגרל מתכנס או מתבדר אפילו בלי לדעת לחשב אותו. ישנן שיטות רבות ולא נלמד אותן.

דוגמאות:

1. בדיק התכנסות האנטגרל:

$$\int_1^{\infty} \frac{x dx}{3x^4 + 2x^2 + 5}$$

השיטה היא עבור x גדול ניתן להזניח $2x^2 + 5$ לעומת $3x^4$ ס"כ נקבל

$$\frac{x}{3x^4} = \frac{1}{3x^3}$$

1- $\int \frac{1}{3x^3} dx$ מתכנס גם האנטגרל הנ"ל מתכנס.

2. בדיק התכנסות האנטגרל

$$\int_2^{\infty} \frac{5x^2 + 7}{\sqrt{4x^6 - 15}} dx$$

עבור x גדול האנטגרנד הוא בקרוב $\frac{5x^2}{2x^3} \rightarrow \frac{5}{2} \frac{1}{x}$ מכיון ש- $\int_2^{\infty} \frac{1}{x} dx$ מתברר הרי גם האנטגרל הנ"ל

מתבדר.

3. בדיק התכנסות האנטגרל

$$\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x-1)}} = \int_1^{1.5} \frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{x-1}} + \int_{1.5}^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

ולכן האנטגרל מתכנס!

נלמד שיטה נוספת להתכנסות.

שיטה זו נקראת מבחן ההשוואה עבור אנטגרלים בעלי אנטגרנדים לא שליליים.

אם נתון $\int_a^b f(x) dx$ וקיימת פונקציה $0 \leq f(x) \leq g(x)$ אז אם $\int_a^b f(x) dx$ מתכנס גם $\int_a^b g(x) dx$ מתכנס, ולהפך אם קיימת $0 \leq g(x) \leq f(x)$ ו- $\int_a^b f(x) dx$ מתבדר אזי $\int_a^b g(x) dx$ מתבדר.

4. האם האנטגרל הבא מתכנס או מתבדר?

$$\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^4 - 1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^4 - 1}} < \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$$

וקיים $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x - 1}}$ מתכנס ולכן גם $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^4 - 1}}$ מתכנס.

$$5. \text{ בדוק התכנסות } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+4x^3}} dx$$

האנטגרל לא רציף בנקודה $x=0$ בגבול התחתון. נוכל להשתמש במבחן ההשוואה.

$$\frac{1}{\sqrt{x+4x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{היות ש- } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ מתכנס לכן גם } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+4x^3}} dx \text{ קיים.}$$

$$6. \text{ בדוק התכנסות } \int_3^6 \frac{\ln x}{(x-3)^4} dx \text{ עבור } x > 3 \text{ ולכן מכיון ש-}$$

$$\int_3^6 \frac{1}{(x-3)^4} dx \text{ מתבדר גם האנטגרל הנייל מתבדר.}$$

$$7. \text{ בדוק התכנסות } \int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{x^2} dx$$

$$\frac{\cos^2 x}{x^2} < \frac{1}{x^2}$$

$$\text{והיות } \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx \text{ מתכנס הרי גם האנטגרל הנייל מתכנס.}$$

$$8. \text{ בדרך התכנסות } \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx$$

$$\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| < \frac{1}{x^2}$$

$$\text{והיות } \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx \text{ מתכנס הרי גם האנטגרל הנייל מתכנס.}$$

14.3 כלל דלופיטל (L'HÔPITAL)

לעתים קרובות אנו נתקלים בגבולות

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

כאשר

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

ואז מקבלים תוצאה של $\frac{0}{0}$ ואז אנו אומרים שהתוצאה לא מוגדרת.

בצורה דומה ניתן לקבל

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \infty$$

ואז בהצבה מקבלים בטוי מטיפוס $\frac{\infty}{\infty}$ הוא גם לא מוגדר.

ראינו עד כה שיטות איך לקבל ערך מוגדר של בטויים מסוג זה למשל:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-7}{x+3} = 2 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

נלמד עתה שיטה נוספת וחשובה על מנת לחשב את ערכם של בטויים לא מוגדרים מטיפוס $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$

כלל לופיטל (ללא הוכחה) משפט

:ON

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 \text{ ו- } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

או

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \infty \text{ ו- } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$$

:ON

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g'(x)}$$

דוגמאות:

(1) חשב

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x}{\lim_{x \rightarrow 0} 1} = \frac{1}{1} = 1$$

(2) חשב

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^3}{1} = 108$$

(3) חשב

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

ואמנם בסוף התוצאה הקודמת נתקלנו בגבול

$$x^{n-1} e^{-x} \Big|_0^\infty$$

וטענו שב- ∞ גדול זה אפס. ואמנם ניתן להוכיח זאת לפי לופיטל. זה מראה ש- e^x שואף ל- ∞ מהר יותר מכל חזקה של x .

שים לב: כי בדוגמה (3) יש לנו למעשה ביטוי מהצורה $\infty \cdot 0$ והעברנו אותו לצורה $\frac{\infty}{\infty}$ ואמנם אפשר

$$\text{תמיד להעביר } 0 \cdot \infty \text{ ל- } \frac{0}{0} \text{ או } \frac{\infty}{\infty}.$$

(4) חשב

$$\mu > 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^\mu} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\mu x^{\mu-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu x^\mu} = 0$$

זה מראה שכל חזקה חיובית של x שואפת לאינסוף מהר יותר מלוגריתמוס.

(5) חשב

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \begin{cases} 0 & n > 1 \\ 1 & n = 1 \\ \infty & n < 1 \end{cases}$$

(6) חשב

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 1}{2x} = \frac{5}{4}$$

הגבול מטיפוס $\frac{0}{0}$ ולכן מותר להשתמש בכלל לופיטל.

לעתים נתקלים בביטוי מטיפוס $\infty - \infty$. ניתן להעביר בטיי לא מוגדר מטיפוס $\infty - \infty$ לבטוי $\frac{\infty}{\infty}$ או $\frac{0}{0}$.

לדוגמה:

(7) חשב

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\csc x - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} =$$

בטוי אחרון זה הוא מטיפוס $\frac{0}{0}$, ולכן לפי לופיטל:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{\sin x + x \cos x} = \frac{-1}{0} = \infty$$

(8) חשב

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x + xe^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + xe^x + e^x} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{cc} \infty - \infty & \text{מטיפוס} \\ \frac{0}{0} & \text{מטיפוס} \end{array}$$

לעתים נתקלים בבטוי מטיפוס $1^\infty, \infty^0, 0^0$ אם $\lim f(x)$ הוא אחד מטיפוסים אלו אז מחשבים $\lim \ln f(x)$ שהוא מטיפוס $0 \cdot \infty$

דוגמאות:

(1) חשב הגבול

$$x \rightarrow 0^+ \text{ כאשר } y = x^{\sin x}$$

מקבלים בטוי מהצורה 0^0 שאינו מוגדר. על מנת לחשב גבול זה נקח:

$$\ln y = \sin x \ln x$$

ועתה לפונקציה $\ln y$ יש צורה $0 \cdot \infty$ כאשר $x \rightarrow 0^+$

נכתוב:

$$\ln y = \frac{\ln x}{\csc x}$$

המקבל צורה $\frac{\infty}{\infty}$. נוכל להשתמש בכלל לופיטל:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cot x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\sin x \operatorname{tg} x}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \operatorname{tg} x \right) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = 0$$

$$\ln \lim_{x \rightarrow 0} y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = e^0 = 1$$

(2) חשב

$$y = (\cot x)^x$$

מהצורה ∞^0 כאשר $x \rightarrow 0$

$$\ln y = x \ln \cot x = \frac{\ln \cot x}{1/x}$$

כאשר $x \rightarrow 0$ בטוי מהצורה $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\cot x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{\sin^2 x} \operatorname{tg} x \right) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = 0$$

$$\ln \lim_{x \rightarrow 0} y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = e^0 = 1$$

(3) חשב גבול של $y = x^{\frac{1}{1-x}}$ כאשר $x \rightarrow 1$. זה בטוי מהצורה 1^∞ .נחשב $\log$ כאשר $x \rightarrow 1$:

$$\ln y = \frac{1}{1-x} \ln x$$

זה ביטוי מהצורה $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{-1} = -1$$

$$\ln \lim_{x \rightarrow 1} y = -1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} y = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

(4) חשב:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sec^3 2x)^{\cot^2 3x}$$

זהו בטוי לא מוגדר מטיפוס 1^∞ .

נסמן:

$$y = \lim_{x \rightarrow 0} (\sec^3 2x)^{\cot^2 3x}$$

אזי:

$$\ln y = 3 \cot^2 3x \ln \sec 2x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \cot^2 3x \ln \sec 2x =$$

זה מטיפוס $\infty \cdot 0$

או אם נכתוב:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \ln \sec 2x}{\cot^2 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\sec 2x} \left(-\frac{(\sin 2x)}{\cos^2 2x} \right)}{2 \cot 3x \frac{3}{\cos^2 3x}}$$

זה: $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \tan 2x}{6 \tan 3x \sec^2 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sec^2 3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tan 3x} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sec^2 3x}{3 \sec^2 3x} = \frac{2}{3}$$

כלומר:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = e^{\frac{2}{3}}$$

$$y = \lim_{x \rightarrow 0} (\sec^3 2x)^{\cot^2 3x} = e^{\frac{2}{3}}$$

(6) דוגמה לשימוש באנטגרלים:

$$\int_0^1 x \ln x dx = \left| \begin{array}{l} U = \ln x \quad dU = \frac{1}{x} dx \\ dV = x dx \quad V = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{x} dx =$$

$$\left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2} \ln x = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1/x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-2/x^3} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{x^2}{2} \right) = 0 \right|$$

$$= 0 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

14.4 סיכום

נתון $\int_a^b f(x) dx$ אם יש לאנטגרנד נקודת אי רציפות בנקודה $a < c < b$ מחשבים

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

לדוגמה:

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)} dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)} dx + \int_1^2 \frac{1}{x-1} dx = \ln(x-1) \Big|_0^1 + \ln(x-1) \Big|_1^2 = \infty$$

$$\int_1^\infty \ln x dx = x \ln x \Big|_1^\infty - \int_1^\infty x \cdot \frac{1}{x} dx = \infty$$

$$u = \ln x \quad dv = dx$$

האנטגרל:

$$\int_a^b \frac{1}{(x-c)^p} dx \quad (a \leq c \leq b)$$

מתכנס אם $p < 1$

מתבדר אם $p \geq 1$

האנטגרל:

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx$$

$a > 0$

מתכנס אם $p > 1$

מתבדר אם $p \leq 1$

דוגמאות:

(1) האם האנטגרל הבא מתכנס או מתבדר?

$$\int_2^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 + 7x + 15)^2}$$

כאשר $x \gg 1$ האנטגרנד כמו $\frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}$ ולכן הוא מתכנס.

(2) בדיקת התכנסות:

$$\int_2^\infty \frac{2x^2 - 15}{\sqrt{x^3 - 3}} dx \rightarrow \int_2^\infty \frac{2}{x^{1/2}} dx \rightarrow \text{מתבדר}$$

(3) בדיקת התכנסות:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{2x+3}}{(x^2+5x)} dx \quad \frac{\sqrt{2x+3}}{x^2+5x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3}}{5x}$$

לכן האינטגרל מתבדר.

(4) בדיקת התכנסות

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{2x+3}}{x^2+5x+1} dx$$

אין כלל בעיות ב- $x \rightarrow 0$

נבדוק ב- ∞

$$\frac{\sqrt{2x+3}}{x^2+5x+1} \rightarrow \frac{\sqrt{2x}}{x^2} dx \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}\sqrt{x}}{x^2} \approx \frac{1}{x^{3/2}}$$

מתכנס.

למדנו גם את מבחן ההשוואה

אם נתון $\int_a^b f(x) dx$ וקיימת פונקציה $f(x) \leq g(x)$ וקיים $\int_a^b g(x) dx$ מתכנס אז גם $\int_a^b f(x) dx$ מתכנס.

ול הפך אם קיימת $f(x) \leq g(x)$ ו- $\int_a^b g(x) dx$ מתבדר אזי גם $\int_a^b f(x) dx$ מתבדר.

דוגמה:

חשב:

$$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^3-8}}$$

ע"י מבחן ההשוואה:

$$\frac{1}{\sqrt{x^3-8}} = \frac{1}{\sqrt{(x-2)(x^2+2x+4)}} < \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

האינטגרל על כל אגף ימין מתכנס לכן גם האינטגרל הנתון מתכנס.

15. טורים אינסופיים.

נתונה סידרה של מספרים $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ - **סידרה** היא קבוצת איברים מסודרת.

סכום איברי הסידרה נקרא טור ונסמנו ב- S_n

$$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = \sum_{i=0}^n a_i$$

לדוגמה: טור הנדסי

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

או

$$S_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$a_i = \frac{1}{2^i} \text{ נקרא האבר הכללי של הטור.}$$

אם $n \rightarrow \infty$ מתבים את הטור בצורה הבאה:

$$S_\infty = a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

והטור נקרא **טור אינסופי**.

דוגמה נוספת: נתון הטור

$$\frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{4}{2 \cdot 3} + \frac{5}{3 \cdot 4} + \dots$$

האבר הכללי כאן:

$$a_n = \frac{n+3}{(n+1)(n+2)}$$

וניתן לכתוב את הטור האינסופי באופן הבא:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{(n+1)(n+2)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} \text{ במקרה זה אם נתחיל ב- } n=1 \text{ נקבל שהטור הוא}$$

15.1 התכנסות והתבדרות של טורים

הגדרה: אם קיים גבול ל- $S_n = \sum_{i=0}^n a_i$ כאשר $n \rightarrow \infty$ אזי הטור נקרא **מתכנס**. אם לא קיים גבול ל- S_n כאשר $n \rightarrow \infty$ הטור נקרא **מתבדר**.

כלומר: אם $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ הטור **מתכנס** ו- S נקרא סכום הטור.
אם $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ אינו קיים אז הטור **מתבדר**.

הערה: טור מתבדר כאשר $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ או כאשר S_n גדל וקטן ואינו שואף לגבול יחיד.

דוגמה: טור מתבדר מהסוג הראשון

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$$

זהו טור חשבוני שסכומו:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$$

דוגמה: טור מתבדר מהסוג השני הוא הטור **המתנודד**.

$$1, -1, 1, -1, \dots$$

כאן:

$$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0 \dots$$

כלומר S_n כאשר n זוגי שווה לאפס וכאשר n איזוגי שווה ל-1.

לכן אין גבול לטור והטור מתבדר.

דוגמה: לטור מתכנס:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots$$

זהו טור גאומטרי שהאבר הראשון a_1 והמנה q הם:

$$a_1 = \frac{1}{5}; q = \frac{1}{5}$$

הנוסחה לטור גאומטרי היא:

כלומר:

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$S_n = \frac{1}{5} \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{5} \right)^n \right) = \frac{1}{4}$$

הטור מתכנס וסכומו $\frac{1}{4}$.

חשוב להבהיר כאן שלדעת אם טור מתכנס או מתבדר ע"י מציאת S_n ובדיקת התנהגותו בגבול $n \rightarrow \infty$ היא קשה ביותר אם לא בלתי אפשרית. שכן ברוב המקרים לא ניתן כלל למצא את S_n . בכל זאת לעתים קרובות יש חשיבות גדולה לדעת אם טור נתון מתכנס או מתבדר. בהמשך נלמד שיטות מבחן לבדיקת התכנסותו או התבדרותו של טור ללא מציאת S_n , רק על פי a_n .

אנו נדון רק במספר מבחנים חשובים. תחילה נדון בשני סוגים חשובים של טורים טור גאומטרי וטור הרמוני, אח"כ בטורים של אברים חיוביים בלבד ולבסוף טורים של אברים חיוביים ושלייליים. לאחר שנדון בטורים בעלי אברים קבועים נעבור לדון בטורים שאבריהם משתנים הנקראים בשם טורי חזקות.

חשוב להעיר כאן שבבדיקת התכנסות או התבדרות של טור נתון ניתן להזניח מספר סופי של אברים בטור בתחילת הטור או בכל מקום בטור. סכומם הוא קבוע ויכול להשפיע על סכום הטור אך לא על התכנסותו או התבדרותו של הטור.

15.2 טור גאומטרי וטור הרמוני

שני טורים חשובים ביותר הם הטור הגאומטרי האינסופי

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^n + \dots$$

והטור ההרמוני האינסופי

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

נדון תחילה בטור הגאומטרי:

סכום $1+n$ אברי בטור:

$$S_n = a \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^{n+1}}{1-r}$$

מיד את יכולים לומר:

א. אם $|r| < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-r}$ והטור מתכנס לסכום $\frac{a}{1-r}$ היות ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 0$.ב. אם $|r| > 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1}$ לא קיים ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ לא קיים.הטור מתבדר ל- ∞ אם $r > 1$ ומתנדד לקראת $\pm \infty$ (oscillates) אם $r < -1$.ג. אם $r = 1$ אזי הטור הוא

$$a + a + a + a + \dots$$

$$S_n = (n+1)a$$

ולכן

כלומר אם $n \rightarrow \infty$ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ והטור מתבדר ל- ∞ .ד. אם $r = -1$ אזי הטור הוא

$$a - a + a - a + \dots$$

כלומר: אם n זוגי, $S_n = a$ אם n אי זוגי, $S_n = 0$ מכאן ש- S_n מתנדד והטור מתבדר.**לסיכום:** הטור

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^n + \dots$$

מתכנס לכל $|r| < 1$ ומתבדר לכל $|r| \geq 1$.נדון עתה בטור ההרמוני:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

נוכל לחלק את הטור לקבוצות הבאות:

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \dots$$

נוכל לראות שכל קבוצה של אברים סכומה גדול או שווה ל-2.

$$1 = 2^0 > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

אפשר לראות שכל קבוצה של אברים בהמשך גם גדולה מ- $\frac{1}{2}$

היות ויש לנו מספר אינסופי של קבוצות שכל אחת גדולה מ- $\frac{1}{2}$ לכן $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$

והטור ההרמוני מתבדר!

בהמשך נביא הוכחה מדויקת יותר להתבדרות הטור ההרמוני. חשוב לציין שהטור ההרמוני מתבדר באופן איטי ביותר. למשל: סכום של מליון אברים בטור עדיין קטן מ-15.

15.3 תנאי הכרחי להתכנסות:

משפט: אם S_n מתכנס אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. להפך אין הדבר נכון בהכרח.

דוגמה: בטור ההרמוני $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ובכל זאת הטור מתבדר!!!

הוכחה: אם S_n מתכנס קיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

כלומר בכל טור מתכנס חייב להתקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ אזי יודעים שהטור מתבדר.

זהו תנאי הכרחי להתכנסות וברור שזה לא תנאי מספיק.

נלמד עתה משפט חשוב נוסף:

15.4 טור מוכפל בקבוע:

משפט: אם k הוא קבוע ושונה מ-0 ואם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס לסכום S אזי $\sum_{n=0}^{\infty} k a_n$ מתכנס

לסכום kS ואם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתבדר גם $\sum_{n=0}^{\infty} k a_n$ מתבדר.

הוכחה:

$$S'_n = \sum_{i=0}^n k a_i \quad \text{ו-} \quad S_n = \sum_{i=0}^n a_i \quad \text{נסמן:}$$

$$S'_n = \sum_{i=0}^n k a_i = k \sum_{i=0}^n a_i = k S_n \quad \text{מכאן}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} k S_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = k S$$

כ"כ ברור שאם הסדרה הראשונה מתבדרת גם השנייה כך.

דוגמה: נתון הטור

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{54} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3^n} + \dots$$

ניתן לכתוב את הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n}$$

והיותו הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ מתכנס כי הוא טור גיאומטרי עם $r = \frac{1}{3}$ לכן גם הטור הנ"ל מתכנס. והוא מתכנס ל-

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

דוגמה: הטור

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2n} + \dots$$

מתבדר שכן:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$$

והיותו, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר גם הטור הנ"ל מתבדר.

כפי שאמרנו יש מספר שיטות לבדיקה אם טור מתכנס או מתבדר ללא חישוב $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ רק ע"פ a_n . נתחיל בשיטה הנקראת מבחן האנטגרל.

15.5 מבחן האנטגרל:

נתון טור של אברים חיוביים, נסמן האבר הכללי $f(n)$ אזי $f(n) > 0$ לכל n .

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ מתכנס אם $\int_a^{\infty} f(x) dx$ מתכנס ומתבדר אם $\int_a^{\infty} f(x) dx$ מתבדר ($a > 0$).

תוצאה זו נובעת מהעובדה שאנטגרל הוא למעשה סכום של אברים לכן אם האנטגרל מתכנס גם הסדר מתכנס ולהפך.

הערה: משפט זה אינו אומר שערך הסדר שווה לערך האנטגרל רק מאפשר לנו לדעת שאם אחד מתכנס גם השני מתכנס.

דוגמאות:

(1) נתון הסדר

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \dots$$

בדוק האם הוא מתכנס או מתבדר?
נוכל לכתוב:

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

נקח:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

ולכן יש סיכוי לסדר להתכנס.
קיים $f(x) \rightarrow 0$ $x \rightarrow \infty$. ונבדוק האנטגרל:
נבחר $a = 1 > 0$

$$\int_a^\infty \frac{1}{(2x+1)^{1/2}} dx = \int_1^\infty \frac{1}{(2x+1)^{1/2}} dx = \infty$$

מתבדר לפי כללי התכנסות של אנטגרלים:

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx =$$

מתכנס $p > 1$

מתבדר $p \leq 1$

או בדרך ישירה ע"י ביצוע האנטגרל:

$$\int_1^\infty \frac{1}{(2x+1)^{1/2}} dx = \sqrt{2x+1} \Big|_1^\infty = \infty$$

כלומר האנטגרל מתבדר ולכן הסדר מתבדר.
(2) נתון הסדר:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} + \dots$$

בדוק האם הוא מתכנס או מתבדר?

$$f(x) = \frac{1}{4x^2} \quad \text{נקח} \quad f(n) = \frac{1}{(2n)^2}$$

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{1}{4x^2} dx = -\frac{1}{4} x^{-1} \Big|_{-1}^{\infty} = -\frac{1}{4}(0-1) = \frac{1}{4}$$

נבדוק האנטגרל

האנטגרל קיים לכן הטור מתכנס.

שים לב שמבחן האנטגרל נותן רק אינפורמציה אם הטור מתכנס או מתבדר ולא לאיזה ערך הטור מתכנס.

(3) נבחן במקרה הכללי הבא:

$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots + \frac{1}{n^k} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

כאשר k מספר ממשי.

$$\text{נבחר } f(x) = \frac{1}{x^k} \text{ ו- } a = 1$$

ואז עבור $k \neq 1$ נקבל:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^k} dx = \int_1^{\infty} x^{-k} dx = \left. \frac{x^{-k+1}}{1-k} \right|_1^{\infty}$$

אם $k > 1$ נקבל $\frac{1}{1-k}$ וזו תוצאה סופית כלומר הטור מתכנס עבור $k > 1$.

אם $k < 1$ נקבל ∞ כלומר הטור מתבדר ל- ∞ עבור $k < 1$.

נזון במקרה $k = 1$, הטור הוא:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

אז נוכל לכתוב:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^{\infty} = \infty$$

כלומר לפי מבחן האנטגרל הטור מתבדר.

לסכום הטור:

$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \dots + \frac{1}{n^k} + \dots$$

מתכנס עבור $k > 1$ ומתבדר עבור $k \leq 1$.

הערה: יש לנו כאן הוכחה נוספת שהטור ההרמוני מתבדר.

15.6 מבחן השוואה

מבחן השוואה להתכנסות:

טור חיובי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס, אם כל אבר בו (החל ממקום מסוים בטור) קטן או שווה לאבר המתאים

של טור חיובי מתכנס ידוע $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

מבחן השוואה להתבדרות:

טור חיובי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתבדר אם כל אבר בו (החל ממקום מסוים בטור) גדול או שווה מן האבר

המתאים של טור חיובי מתבדר ידוע $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$.

מבחן זה מקביל למבחן השוואה בהתכנסות והתבדרות של אנטגרלים.

משווים את האבר הכללי של טור נתון אשר רוצים לבדוק התכנסותו עם אברים כלליים של טורים

מתכנסים ומתבדרים ידועים. ברוב המקרים משמשים כטורי השוואה הטור הגאומטרי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$

המתכנס עבור $q < 1$ ומתבדר עבור $q \geq 1$ וכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ המתכנס עבור $p > 1$ ומתבדר עבור

$$p \leq 1$$

דוגמאות:

(1) נתון הטור:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

האם הוא מתכנס או מתבדר?

$$\text{לכל } n \text{ קיים } \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$$

היות שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס שכן $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ מתכנס עבור $k > 1$, לכן $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ מתכנס.

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

(2) בדוק התכנסות הטור:

היות וקיים עבור $n > 1$

$$\left(\frac{1}{3^3} < \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^4} < \frac{1}{2^4}, \dots \right), \quad \frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^n}$$

והיות והטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ מתכנס (טור גאומטרי מתכנס עם $q = \frac{1}{2} < 1$) הרי גם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \text{ מתכנס.}$$

(3) נתון הטור

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots$$

נשוה טור זה עם הטור

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{n^4} + \dots$$

קיים לכל $n \geq 1$

$$\frac{1}{(2n+1)^4} < \frac{1}{n^4}$$

כיוון שהטור $\sum \frac{1}{n^4}$ מתכנס אזי גם הטור $\sum \frac{1}{(2n+1)^4}$ מתכנס לפי מבחן ההשוואה.

(4) נתון הטור

$$\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \dots$$

נשוה טור זה לטור שאברו הכללי $\frac{1}{n+1}$:

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+1)}} = \frac{1}{n+1}$$

והיות שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ הוא הרמוני ומתבדר לכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ מתבדר.

(5) נתון הטור

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n+1} + \dots$$

$$\frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1}$$

היות שהטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1}$ מתבדראזי גם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ מתבדר

(6) נתון הטור

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{n^2+1} + \dots$$

באמצעות מבחן ההשוואה:

$$\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$$

והיות ו- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס גם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ מתכנס.

באמצעות מבחן האנטגרל:

נבחר $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ונבצע

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \left[\arctg x \right]_1^{\infty} = \arctg \infty - \arctg 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

כלומר האנטגרל מתכנס ולכן גם הטור מתכנס.

שיטת מבחן נוספת שנלמד בהמשך נקראת בשם מבחן המנה.

15.7 מבחן המנה (של D'Alembert)

הטור החיובי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס אם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

ומתבדר אם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

כאשר $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ אין אינפורמציה ממבחן המנה. במקרה הזה לא ידוע אם הטור מתבדר או מתכנס על פי מבחן המנה.
דוגמאות:
(1) נתון הטור

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots$$

$$a_n = \frac{n}{2^n}$$

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} < 1$$

נבדוק לפי מבחן המנה

ולכן הטור מתכנס.
(2) נתון הטור

$$\frac{1}{1000} + \frac{1 \cdot 2}{1000^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1000^3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1000^4} + \dots + \frac{n!}{1000^n} + \dots$$

$$a_n = \frac{n!}{1000^n}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{1000^{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{1000^{n+1}} \cdot \frac{1000^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{1000} = \infty > 1$$

ולכן הטור מתבדר.
(3) נבדוק את הטור

$$\frac{k}{1!} + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \frac{k^4}{4!} + \dots + \frac{k^n}{n!}$$

$$a_n = \frac{k^n}{n!}$$

$$a_{n+1} = \frac{k^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{k^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n+1} = 0 < 1$$

ולכן הטור מתכנס!!

(4) נבדוק את הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$a_n = \frac{1}{n^2} \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = 1$$

זאת אומרת קבלנו גבול 1 ולפי מבחן המנה לא ידוע אם הטור מתכנס או לא. אבל ראינו לפי מבחן האנטגרל שטור זה מתכנס. מצד שני נבדוק את הטור ההרמוני:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$a_n = \frac{1}{n} \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \cdot n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

גם כאן ידוע שהטור מתבדר. מכאן אנו רואים שאם הגבול 1 יכול להיות שהטור מתכנס או מתבדר. (5) בודק התכנסות הטור

$$1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots$$

$$a_n = \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

ולכן הטור מתכנס.

דוגמאות כלליות:

$$\frac{1}{1^2 + 4} + \frac{2}{2^2 + 4} + \frac{3}{3^2 + 4} + \frac{4}{4^2 + 4} + \dots + \frac{n}{n^2 + 4} + \dots$$

(1)

נבדוק לפי מבחן האנטגרל

$$f(n) = \frac{n}{n^2 + 4}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) \Big|_1^{\infty} = \infty$$

ולכן הטור מתבדר.
נבדוק לפי מבחן המנה:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 4)(n + 1)}{n((n + 1)^2 + 4)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^2 + 4n + 4}{n(n^2 + 2n + 5)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^2 + 4n + 4}{n^3 + 2n^2 + 5n} = 1$$

ולכן אי אפשר להחליט לפי מבחן המנה!
דרך אחרת: נבדוק איך האבר הכללי מתנהג ב- x גדול.

$$\frac{x}{x^2 + 4} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

ולכן מתבדר.

$$\frac{1^2}{e} + \frac{2^2}{e^2} + \frac{3^2}{e^3} + \frac{4^2}{e^4} + \dots + \frac{n^2}{e^n} + \dots$$

(2) נתון הטור

נבדוק לפי מבחן המנה

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 e^n}{e^{n+1} n^2} = \frac{1}{e} < 1 \quad (e \approx 2.7)$$

ולכן הטור מתכנס.
נבדוק את התכנסות הטור הכללי:

$$\frac{1^2}{c} + \frac{2^2}{c^2} + \frac{3^2}{c^3} + \frac{4^2}{c^4} + \dots + \frac{n^2}{c^n} + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 c^n}{c^{n+1} n^2} = \frac{1}{c}$$

כלומר אם $c > 1$ הטור מתכנס
אם $c < 1$ הטור מתבדר.
למשל:

$$\frac{1^2}{0.9} + \frac{2^2}{0.9^2} + \frac{3^2}{0.9^3} + \dots$$

הטור הזה מתבדר:

אם $c = 1$ המצב לא ידוע לפי מבחן המנה. אבל אם $c = 1$ מקבלים הטור

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots$$

כלומר אבר כללי שאינו שואף לאפס ולכן הטור מתבדר!

$$\frac{\sin \sqrt{1}}{1^{3/2}} + \frac{\sin \sqrt{2}}{2^{3/2}} + \frac{\sin \sqrt{3}}{3^{3/2}} + \dots$$

(3) בדוק את הטור:

$$\text{הטור } \frac{1}{1^{3/2}} + \frac{1}{2^{3/2}} + \dots + \frac{1}{n^{3/2}} + \dots \text{ מתכנס}$$

$$\text{ולכן גם הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{n}}{n^{3/2}} \text{ מתכנס.}$$

$$\text{שכן } \frac{\sin \sqrt{n}}{n^{3/2}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}, \text{ לכל } n, (\sin \alpha \leq 1).$$

לכן לפי מבחן ההשוואה הטור מתכנס.
(4) בדוק את הטור:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \dots$$

האבר כללי

$$\frac{1}{n\sqrt{n+1}} \approx \frac{1}{n^{3/2}}$$

עבור $n \gg 1$ מתנהג כמו

לכן הטור מתכנס.

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \dots + \frac{1}{\ln n} + \dots$$

(5) בדוק את הטור

קיים $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ כי $\ln n < n$ לכל n טבעי.והטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר לכן הטור הנ"ל מתבדר!

(6) בדוק את הטור

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

קיים

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{n(n-1)} < \frac{1}{(n-1)^2}$$

הטור $\sum \frac{1}{(n-1)^2}$ מתכנס ולכן גם $\sum \frac{1}{n!}$ מתכנס לפי מבחן ההשוואה.

$$1 + \frac{4}{2 \cdot 5} + \frac{4^2}{3 \cdot 5^2} + \frac{4^3}{4 \cdot 5^3} + \dots$$

(7) בדוק את הטור

$$a_n = \frac{4^n}{(n+1)5^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

$$a_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{(n+2)5^{n+1}}$$

ולכן הטור מתכנס.

$$\frac{1}{2!} + \frac{1 \cdot 3}{4!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{6!} + \dots$$

(8) בדוק את הטור

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{(2n)!}$$

$$a_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)(2n+1)}{(2(n+1))!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = 0$$

ולכן הטור מתכנס.

(9) בדוק את הטור

$$2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4^2} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4^3} + \dots$$

$$a_n = \frac{(n+2)}{(n+1)4^n}$$

$$a_{n+1} = \frac{n+3}{(n+2)4^{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2 \cdot 4} = \frac{1}{4}$$

ולכן הטור מתכנס.

16. טורים עם אברים חיוביים ושילילים

עד כה עסקנו רק בטורים עם אברים חיוביים. בטור אשר כל אבריו שליליים ניתן לטפל כמו בטור חיובי עם סימן 1- לפניו. בפרק זה עיקר עניינו יהיה בטורים אשר סימניהם מתחלפים.

16.1 טור עם סימנים מתחלפים

הגדרה: טור אשר אבריו חיוביים ושילילים לסרוגין נקרא טור עם סימנים מתחלפים,

"alternating series"

כלומר אם $a_n > 0$ לכל n , הטור

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

נקרא טור שסימניו מתחלפים או טור מתחלף.

לטור כזה ישנו משפט המתייחס אליו באופן חשוב ונקרא משפט לייבניץ.

16.2 משפט לייבניץ: הטור $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס אם לכל n

(החל מ- n סופי כלשהו) קיים:

$$a_n > a_{n+1} \quad \text{א.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{ב.}$$

אנו רואים איפוא שלטור מתחלף יש תנאים קלים יותר להתכנסות מאשר לטור חיובי והיסבה היא כמובן שבטור כזה האברים החיוביים והשלילים מקוזים אחד את השני.

לדוגמה:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$$

טור זה מקיים את משפט לייבניץ

$$\text{א. } a_n > a_{n+1} \text{ כי } \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

$$\text{ב. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

ולכן הטור מתכנס.

נאשר זאת בגישה אחרת

נחבר זוגות באופן הבא

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \dots$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2n}$$

טור זה מתכנס לפי מבחן ההשוואה

$$\frac{1}{(2n-1)2n} < \frac{1}{n^2}$$

מכיון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס,

גם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ מתכנס.

כלומר טור הרמוני מתחלף מתכנס!

דוגמה נוספת:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

טור זה מקיים אף הוא תנאי לייבניץ

א. $a_n > a_{n+1}$ כי $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ לכל n

$$\text{ב. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

ולכן הוא מתכנס.

הערה חשובה: מדוע צריך את שני התנאים והתנאי השני בלבד אינו מספיק. נתבונן בטור

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \dots$$

הטור הזה מקיים תנאי ב' של לייבניץ ולא תנאי א'. ואמנם הוא לא מתכנס שכן $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר!

$$\text{ו- } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ מתכנס! ולכן } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) \text{ מתבדר!}$$

16.3 התכנסות בהחלט ובתנאי

הגדרה: הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ נקרא מתכנס בהחלט

אם גם טור הערכים המוחלטים $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ מתכנס.

אם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס ו- $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ מתבדר הטור נקרא מתכנס בתנאי.

דוגמאות:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots \quad (1)$$

הטור מתכנס בהחלט שכן טור הערכים המוחלטים: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ מתכנס.

לעומת זאת הטור

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

מתכנס בתנאי שכן טור זה מתכנס ואילו טור הערכים המוחלטים (דהינו הטור ההרמוני)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ מתבדר!}$$

הערות:

I. כל טור חיובי מתכנס הוא מתכנס בהחלט.

II. כל טור המתכנס בהחלט הוא מתכנס. שכן אם הוא מתכנס בערכו המחלטים ודאי שיתכנס בלי ערכים מחלטים.

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum (-1)^n a_n \quad (2) \text{ בדוק התכנסות הטור}$$

$$a_n = \frac{1}{2n+1} \quad \text{האבר הכללי}$$

$$a_n > a_{n+1} \quad \text{א. קיים}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0 \quad \text{ב.}$$

לכן לפי משפט לייבניץ הטור מתכנס.

נבדוק האם מתכנס בהחלט או בתנאי

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \quad \text{מתבדר.}$$

ולכן הטור מתכנס בתנאי.

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \dots \quad (3) \text{ בדוק את התכנסות הטור}$$

טור זה מתכנס בהחלט שכן טור הערכים המחלטים $\sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס.

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \dots \quad (4) \text{ בדוק התכנסות הטור:}$$

טור זה מתכנס בהחלט שכן טור הערכים המחלטים $\sum \frac{1}{n!}$ מתכנס.

(5) בדוק התכנסות בהחלט או בתנאי של הטורים הבאים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{n^2} \quad \text{א.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln^2 n} \quad \text{ב.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1} \quad \text{ג.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1} \quad \text{א. בערך מחלט הטור הוא}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1} \quad \text{מתבדר ולכן הטור} \quad \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_1^{\infty} = \infty$$

אינו מתכנס בהחלט.

נבדוק אם מתכנס בתנאי לפי משפט לייבניץ. קיים

$$\frac{n}{n^2 + 1} > \frac{n+1}{(n+1)^2 + 1} \quad \text{א.} \quad a_n > a_{n+1} \quad \text{כי}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{ב.}$$

ולכן הטור מתכנס בתנאי.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln^2 n} \quad \text{ב.} \quad \text{נבדוק התכנסות בהחלט}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x^2} dx = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dU}{U^2} = -\frac{1}{U} \Big|_{\ln 2}^{\infty} = \frac{1}{\ln 2} \quad \text{נציב } U = \ln x$$

ולכן הטור מתכנס בהחלט.

$$g. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \ln 2}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \ln^2 2}{2} = \infty$$

ולכן הטור מתבדר.

16.4 מבחן המנה להתכנסות בהחלט:

הטור $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ עם אברים מעורבים מתכנס בהחלט אם

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \quad \text{ומתבדר כאשר}$$

אם הגבול הוא 1 המבחן אינו קובע התכנסות או התבדרות.

החלק הראשון ברור לפי מבחן המנה.

החלק השני גם ברור שכן אם

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}| > \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$$

לא יתכן $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ ולכן הטור מתבדר.

ז"א זו בדיקה מקבילה לבדיקה של לייבניץ, $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$.

17. טורי חזקות:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

כאשר a_n קבועים לכל n , נקרא **טור חזקות ב- x** באופן דומה יקרא הטור

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

טור חזקות ב- $x-x_0$.

אנו מבטלים את x, x_0, a_n לקבל רק ערכים ממשיים.

לכל ערך נתון של x הופכים הטורים הנ"ל לטורים אינסופיים עם **אברים קבועים** אשר מתכנסים או מתבדרים לפי קריטריונים שכבר למדנו.

עבור $x=0$ בטור הראשון או $x=x_0$ בטור השני טורי החזקות ודאי

מתכנסים היות ונשאר בטורים רק a_0 .

יתכן שהטור לא מתכנס לכל ערך אחר של x או שהטור יתכנס לערכים מסויימים של x ויתבדר לכל ערך אחר של x או שהטור יתכנס לכל x .

קבוצת כל ערכי x שעבורם מתכנס טור החזקות

נקרא **אנטרוול ההתכנסות**.

את אנטרוול ההתכנסות ניתן לעתים קרובות למצא בעזרת מבחן המנה להתכנסות בהחלט וצריכים בדרך כלל גם מבחנים אחרים על מנת למצא התכנסות בקצוות אנטרוול ההתכנסות.

הסבר:

לפי מבחן המנה צריך לבדוק היחס

$$\left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l \quad \text{נניח}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = l|x| \quad \text{אזי}$$

אזי לפי מבחן המנה הטור **מתכנס בהחלט** אם $l|x| < 1$.

כלומר: הטור יתכנס בהחלט אם $|x| < \frac{1}{l}$

והטור **יתבדר** אם $|x| > \frac{1}{l}$

כאשר $|x| = \frac{1}{l}$ המבחן נופל.

לסיום: נתון הטור $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ וקיים $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$ אזי הטור מתכנס

בהחלט בתוך **האינטרוול** $-\frac{1}{l} < x < \frac{1}{l}$

ומתבדר מחוץ לתחום זה דהיינו עבור: $x < -\frac{1}{l}; x > \frac{1}{l}$

בנקודות $x = -\frac{1}{l}$ $x = \frac{1}{l}$ המצב לא ברור וטעון בדיקה.

אם $l = 0$ טור החזקות מתכנס לכל x ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$

הטור מתכנס רק עבור $x=0$.

המספר $r = \frac{1}{l}$ נקרא בשם רדיוס ההתכנסות.

דוגמאות:

$$(1) \quad x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

לאילו ערכים של x הטור מתכנס?

מיד מבחינים שעבור $x=0$ הטור מתכנס שכן כל האברים מתאפסים.
עבור $x \neq 0$ מבחן המנה נותן

$$U_n = \frac{x^n}{n} \quad U_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}n}{x^n(n+1)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| |x| = |x|$$

כלומר: הטור מתכנס בהחלט עבור $|x| < 1$

ומתבדר עבור $|x| > 1$

נבדוק את המקרה $|x| = 1$ כלומר $x = \pm 1$

עבור $x = 1$ הטור הוא:

$$1 + 1 + \frac{1^2}{2} + \frac{1^3}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

זהו טור הרמוני מתבדר.

עבור $x = -1$ הטור הוא

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots$$

זהו טור הרמוני מתחלף המתכנס בתנאי לפי משפט לייבניץ.

לסכום: הטור מתכנס בתחום $-1 \leq x < 1$ ומתבדר לכל x אחר.

(2) נתון הטור

$$1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \dots + n!x^n + \dots$$

הטור מתכנס ל- $x=0$ נבדוק לכל x אחר

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \frac{x^{n+1}}{x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} |x| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) |x| = \infty$$

כלומר $l = \infty$ והטור מתבדר לכל $x \neq 0$.

(3) בדיק אנטרופול ההתכנסות של הטור

$$1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots + 2^n x^n + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 = l$$

כלומר הטור מתכנס בהחלט עבור $-\frac{1}{l} < x < \frac{1}{l}$

$$\text{ואצלנו } -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

עבור $x = \frac{1}{2}$ הטור מקבל את הערכים שהוא מתבדר.

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

עבור $x = -\frac{1}{2}$ מקבלים

שאף הוא מתבדר (טור מתנודד). כלומר רדיוס ההתכנסות הוא $|R| < \frac{1}{2}$

הערה: אפשר לכתוב גם באופן הבא

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| x \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \quad \text{היות}$$

ותנאי ההתכנסות

$$|x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \equiv R$$

רדיוס ההתכנסות

ז"א כדי למצא את רדיוס ההתכנסות מחשבים הגבול הנ"ל.

(4) חשב את רדיוס ההתכנסות של הטור

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$R \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1)(2n+2) = \infty$$

כלומר רדיוס ההתכנסות ∞ והטור מתכנס לכל x .
או בדרך הקודמת:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0 = l$$

ולכן הטור מתכנס לכל x הסיבה כמובן העצרת במכנה.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{3^n n}$$

(5) מצא את תחום ההתכנסות של הטור

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n n} 3^n (n+1) = 3$$

כלומר הטור מתכנס לכל $|x| < 3$

או $-3 < x < 3$ ומתבדר ל $|x| > 3$.

מה קורה בנקודה $x = 3$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

הטור הוא:

וזו טור הרמוני מתבדר

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3^{n-1}}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n}$$

בנקודה $x = -3$ הטור הוא:

טור הרמוני מתחלף המתכנס בתנאי.

תשובה: רדיוס ההתכנסות $-3 \leq x < 3$

עבור $-3 < x < 3$ הטור מתכנס בהחלט

ועבור $x = -3$ הטור מתכנס בתנאי.

(6) מצא את אנטרוול ההתכנסות של הטור

$$1 + \frac{x-3}{1^2} + \frac{(x-3)^2}{2^2} + \dots + \frac{(x-3)^n}{(n+1)^2} + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| < 1 \quad \text{לפי מבחן המנה הטור מתכנס עבור}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-3)^n}{n^2} \cdot \frac{(n-1)^2}{(x-3)^{n-1}} \right| = |x-3| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 = |x-3|$$

כלומר הטור מתכנס עבור $|x-3| < 1$

$$\text{או } -1 < x-3 < 1$$

$$2 < x < 4$$

ומתבדר עבור $|x-3| > 1$

$$\text{או ב- } x < 2 \quad x > 4$$

ב- $x=2$ הטור הוא

$$1 - 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \dots$$

וב- $x=4$ הוא

$$1 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$$

ושני הטורים מתכנסים.

לסיכום: הטור מתכנס בהחלט באנטרוול $2 \leq x \leq 4$ ומתבדר בנקודות אחרות.

(7) מצא את אנטרוול ההתכנסות של הטור

$$\frac{x+1}{\sqrt{1}} + \frac{(x+1)^2}{\sqrt{2}} + \frac{(x+1)^3}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}} + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{(x+1)^n} \right| = |x+1| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = |x+1|$$

הטור מתכנס בהחלט עבור $|x+1| < 1$ או

$$-1 < x+1 < 1, \text{ כלומר עבור } -2 < x < 0,$$

ומתבדר עבור $x < -2$ ו- $x > 0$.ב- $x=-2$ יהיה הטור

$$-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

וב- $x=0$ הוא

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

הטור הראשון מתכנס והשני מתבדר ולכן הטור הנתון מתכנס באנטרוול

 $-2 \leq x < 0$ ומתבדר בנקודות אחרות.**17.1 תכונות של טורי חזקות**

בתוך רדיוס ההתכנסות טור חזקות מתנהג באופן דומה ביותר לפולינום סופי. נביא מספר תכונות של טורי חזקות ללא הוכחות.

א. טור חזקות ב- x בתוך אנטרוול ההתכנסות מייצג פונקציה רציפה של x .

$$\text{כלומר } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x) \text{ פונקציה רציפה לכל } -R < x < R.$$

לדוגמה:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

מטור גיאומטרי מקבלים

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{כלומר הטור מייצג פונקציה רציפה}$$

באנטרוול ההתכנסות $-1 < x < 1$ שכן $R=1$. נשים לב שהפונקציה $\frac{1}{1-x}$ מוגדרת לכל $x \neq 1$ ואילו טור החזקות מתבדר מחוץ לאנטרוול ההתכנסות. מתיחסים לכך שהצגת הפונקציה בטור חזקות אפשרית רק אינטרוול $(-1,1)$ של אינטרוול ההגדרה של $f(x)$.
דוגמה נוספת: נתון הטור הרמוני הבא:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{הטור מייצג את פונקציה}$$

ההתכנסות $-1 < x < 1$.
ב. ניתן לחבר שני טורי חזקות לכל ערך של x בתוך רדיוס ההתכנסות המשותף לשני רדיוסי ההתכנסות.
כלומר אם נתון

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots$$

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_n + b_n)x^n + \dots$$

ג. שני טורי חזקות ניתן להכפילם זה בזה (כמו פולינומים סופיים) לכל ערכי x ברווח ההתכנסות המשותף לשני אנטרוולים ההתכנסות. אם נסתכל בטורים הקודמים

$$f(x)g(x) = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + (a_2b_1 + a_1b_2 + a_0b_3)x^2 + \dots$$

אזי
כלומר המכפלה של הטורים מייצגת את מכפלת הפונקציות.

לדוגמה:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

$$\frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x^2} = 1 + (1-1)x + (1+1-1)x^2 + (-1+1-1+1)x^3 + \dots + (1-1+1-1+1)x^4 + \dots = 1 + x^2 + x^4 + \dots$$

המתכנס ברווח $-1 < x < 1$

אפשר גם לראות זאת ע"י פתוח לטור גאומטרי

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \dots$$

ד. ניתן גם לחלק טורי חזקות, אך אין דרך לקבוע את אנטרוול ההתכנסות של הטור המתקבל.

ה. טור חזקות ששכמו $f(x)$ ניתן גם לגזור אבר אבר. הטור היוצא ייצג את הנגזרת של $f(x)$ בתוך תחום ההתכנסות של הטור המקורי.
נכיח שרדיוס ההתכנסות לא משתנה:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

הוכחה:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

רדיוס ההתכנסות

בטור החדש:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

רדיוס ההתכנסות של טור הנגזרות:

$$R' = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n a_n}{(n+1) a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R$$

כלומר רדיוס ההתכנסות של טור הנגזרות זהה לרדיוס ההתכנסות של הטור המקורי.

דוגמה:

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

אם

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + n x^{n-1} + \dots$$

אזי

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

מצד שני

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

אזי

ולכן הפתוח של $\frac{1}{(1-x)^2}$ יהיה:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + n x^{n-1} + \dots$$

ורדיוס ההתכנסות יהיה כמו של הטור הקודם $-1 < x < 1$.ניתן גם להגיע לטור הנ"ל ע"י שנכפיל את טור החזקות של $\frac{1}{1-x}$ בעצמו.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$\left(\frac{1}{1-x} \right)^2 = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) =$$

$$= 1 + (1+1)x + (1+1+1)x^2 + \dots = 1 + 2x + 3x^2 + \dots$$

דרך נוספת להגיע לטור הזה היא לפתח לטור גאומטרי את פונקציה $\frac{1}{(1-x)^2}$.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-2x+x^2} = \frac{1}{1-(2x-x^2)} = 1 + (2x-x^2) + (2x-x^2)^2 + (2x-x^2)^3 + \dots$$

דוגמה נוספת:

כפי שנראה בהמשך הטור של $\cos x$ הוא:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

מכאן נוכל למצא הטור של $\sin x$ ע"י שנגזור שני האגפים:

$$-\sin x = -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

כלומר:

שים לב: אם נגזור שוב נקבל הטור של $\cos x$!

הערות:

- (1) תהליך הגזירה יכול לחזור מספר פעמים כלשהו ולכל גזרת יהיה אותו רדיוס התכנסות כמו הטור המקורי.
 (2) בנקודת קצה טור חזקות יכול להתכנס אך טור העזרות עלול להתבדר.
 1. טור חזקות ששכמו $f(x)$ ניתן לבצע עליו אנטגרציה אבר אבר בין גבולות הנמצאים באנטרוול ההתכנסות. הטור החדש מיצג את האנטגרל של $f(x)$ בין אותן גבולות.
 לדוגמה:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

המתכנס באנטרוול $-1 < x < 1$
 אם נבצע אנטגרל של שני האגפים

$$\int_0^u \frac{dx}{1+x} = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{u^{n+1}}{n+1} + \dots$$

וזה המתכנס באנטרוול $-1 < u < 1$

$$\int_0^u \frac{dx}{1+x} = \ln(1+u) \quad \text{מצד שני}$$

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \dots$$

כלומר

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

או אם נציב $u = x$ נקבל

עבור $-1 < x < 1$

עבור $x = 1$ מקבלים הטור

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

וזה מתכנס ל- $\ln 2$. כלומר הטור ההרמוני המתחלף מתכנס ל- $\ln 2$:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2$$

ואילו עבור $x = -1$ מקבלים התבדרות!!!

כך שהטור מתכנס ברווח $-1 < x < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \text{ו} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{ז. נתונים שני טורי חזקות}$$

השווים לכל x ברווח ההתכנסות אזי קיים $a_n = b_n$ לכל n .

משמעות משפט זה (שהבאנו ללא הוכחה) שלפונקציה $f(x)$ נתונה יש רק טור חזקות אחד המיצג אותה. כמסקנה של המשפט הנ"ל אפשר לראות כי אם

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \text{לכל } x \text{ ברווח ההתכנסות אזי } a_n = 0 \text{ לכל } n.$$

18. פתוח פונקציה לטור18.1 טור מקלורן:

נתונה פונקציה $f(x)$ ניתן לפתוח לטור באופן הבא:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

$$a_0 = f(0) \quad \text{כאשר}$$

$$f'(x)|_{x=0} = f'(0) = a_1$$

$$f''(x)|_{x=0} = f''(0) = 2a_2$$

$$f'''(x)|_{x=0} = f'''(0) = 3a_3$$

$$f^{(n)}(x)|_{x=0} = f^{(n)}(0) = n! a_n$$

ולכן ניתן לכתוב

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + \dots$$

כלומר מצאנו שיטה איך לפתח פונקציה לטור חזקות ב- x .

רדיוס ההתכנסות:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{f^{(n+1)}(0)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(n)}(0)}{f^{(n+1)}(0)} \cdot (n+1) \right|$$

דוגמאות:

$$f(x) = \sin x$$

$$f(0) = \sin 0 = 0$$

$$f'(0) = \cos x|_{x=0} = \cos 0 = 1$$

$$f''(0) = \sin x|_{x=0} = \sin 0 = 0$$

$$f'''(0) = -\cos x|_{x=0} = -\cos 0 = -1$$

$$f^{(4)}(0) = \sin x|_{x=0} = \sin 0 = 0$$

$$f^{(5)}(0) = \cos x|_{x=0} = \cos 0 = 1$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

ולכן נקבל

נתבונן בדוגמה של פתוח לטור גאומטרי

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{2 \cdot 3}{(1-x)^4}$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = 2! = 2$$

$$f'''(0) = 3! = 2 \cdot 3$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

ואמנם זה הטור שקבלנו קודם עבור טור גאומטרי.

נעבור לדוגמה נוספת שאף אותה כבר ראינו בדרך אחרת.

$$f(x) = \ln(1+x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \quad f^{(4)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{(1+x)^4}$$

$$f(0) = \ln 1 = 0 \quad f'(0) = 1 \quad f''(0) = -1 \quad f'''(0) = 2 \quad f^{(4)}(0) = -3!$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

כפי שראינו למעלה.

פתוח מעניין הוא של הפונקציה $f(x) = e^x$

$$f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ולכן

מהו רדיוס ההתכנסות של הפתוח

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$

כלומר הטור מתכנס לכל x .

דוגמה מעניינת וחשובה היא פתוח פו' הבאה:

$$f(x) = (1+x)^\mu \quad \mu \text{ לכל}$$

נזכיר שעבור $\mu = n$ (n טבעי) קיים הפתוח

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_k^n x^k = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots$$

כאשר C_k^n הם מקדמי הבינום של ניוטון

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

כאן נמצא עתה פתוח כללי לפי הזו.

$$f(x) = (1+x)^\mu \quad f'(x) = \mu(1+x)^{\mu-1} \quad f''(x) = \mu(\mu-1)(1+x)^{\mu-2}$$

$$f(0) = 1 \quad f'(0) = \mu \quad f''(0) = \mu(\mu-1) \quad f'''(0) = \mu(\mu-1)(\mu-2)$$

ולכן נקבל

$$f(x) = (1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{1}{2!} \mu(\mu-1)x^2 + \frac{1}{3!} \mu(\mu-1)(\mu-2)x^3 + \dots$$

רואים איפוא שהפתוח הנ"ל נכון לכל μ ממשי אלא שכאן קבלנו טור אינסופי

אלא אם כן μ טבעי!!

נבדוק רדיוס ההתכנסות:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n!} \mu(\mu-1) \dots (\mu-n+1)}{\frac{1}{(n+1)!} \mu(\mu-1) \dots (\mu-n+1)(\mu-n)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{\mu-n} \right| = 1$$

כלומר עבור μ שאינו מספר טבעי מקבלים טור חזקות אינסופי המתכנס

עבור $-1 < x < 1$

ולכן הוא מתכנס לכל x .
דוגמאות לפתוח לטור:

$$\mu = \frac{1}{2} \quad \text{אם}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \frac{1}{2 \cdot 2!} x^2 + \frac{\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right)}{3!} x^3 + \frac{\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right)}{4!} x^4 + \dots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 + \dots$$

$$\mu = -\frac{1}{2} \quad \text{באותו אופן עבור}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 - \dots$$

18.2 טור טיילור

לעיתים קרובות מעוניינים בפתוח טור בחזקות של $x - x_0$

זה נקרא טור טיילור ואז אפשר להוכיח שקיים הפתוח הבא ל- $f(x)$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots$$

$$+ \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \dots$$

נוסחה מקלורן היא איפוא מקרה פרטי של נוסחת טיילור, עבור $x_0 = 0$.

דוגמאות: פתח את $e^{\frac{x}{2}}$ בחזקות של $x - 2$

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}} \quad f(2) = e$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \quad f'(2) = \frac{1}{2} e$$

$$f''(x) = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}} \quad f''(2) = \frac{1}{4} e$$

$$e^{\frac{x}{2}} = e + \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{2!} \frac{1}{4} e(x-2)^2 + \frac{1}{3!} \frac{1}{8} e(x-2)^3 + \dots =$$

$$= e \left\{ \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{2!} \frac{1}{4}(x-2)^2 + \frac{1}{3!} \frac{1}{8}(x-2)^3 + \dots + \frac{1}{2^n} \frac{(x-2)^n}{n!} + \dots \right\}$$

נבדוק תחום ההתכנסות:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1}(n+1)!}{2^n n!} \right| = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$

והטור מתכנס לכל x .

פתח את $\ln x$ בחזקות של $x - 2$.

$$f(x) = \ln x \quad f(2) = \ln 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad f'(2) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad f''(2) = -\frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \quad f'''(2) = \frac{1}{4}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4} \quad f^{(4)}(2) = -\frac{3}{8}$$

$$\ln x = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{4} \frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{1}{4} \frac{(x-2)^3}{3!} - \frac{3}{8} \frac{(x-2)^4}{4!} + \dots =$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3 - \frac{1}{64}(x-2)^4 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}(x-2)^n}{2^n n} + \dots$$

חוץ מ- $n=0$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}(n+1)}{2^n n} = 2 \quad |x-2| < 2$$

הטור מתכנס ב- $0 < x < 4$

ב $x=0$ מתקבל טור הרמוני וזה מתבדר

ב $x=4$ מקבלים $\ln 2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ טור הרמוני מתחלף ולכן יש התכנסות

בתחום $0 < x \leq 4$.

18.3 השארת

הערכת השגיאה. בארך של $f(x)$ אם לוקחים מספר סופי של אברים נעשית באופן הבא:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \dots$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}$$

נניח שהבאנו בחשבון $n-1$ אברים

אזי השגיאה שעשינו בכך שלא לקחנו אינסוף אברים ניתנת ע"י השארת

$$R_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x-x_0)^n$$

כאשר ξ נמצא בין x ל- x_0 .

לדוגמה:

חישבנו הפיתוח של $\ln x$ סביב $x=2$

$$\ln x = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3 - \frac{1}{64}(x-2)^4 + \dots$$

נחשב $\ln 2.01$

ע"י 2 אברים הראשונים ונעריך השגיאה.

$$\ln 2.01 = \ln 2 + \frac{1}{2} 0.01 = \ln 2 + 0.005$$

$$R_2 = \frac{1}{2!} f^{(2)}(\xi)(2.01-2)^2 = \frac{1}{2!} \left(-\frac{1}{\xi^2} \right) 0.01^2$$

$$R_2 = -\frac{1}{2!} \frac{1}{\xi^2} \cdot 10^{-4}$$

$2.01 < \xi < 2$ ערך השגיאה המכסימלית כאשר $\xi = 2$ ולכן

$$R_2 = -\frac{1}{2!} \frac{1}{4} \cdot 10^{-4} = \frac{10^{-4}}{8}$$

כלומר השגיאה קטנה מ- $\frac{10^{-4}}{8}$

דוגמה נוספת

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

$$\frac{1}{1-0.1} = 1 + 0.1 + (0.1)^2 + (\text{שארית שגיאה})$$

נבדוק מה הוא השארית או השגיאה

$$0 < \xi < 0.1$$

$$R_3 = \frac{1}{3!} f^{(3)}(\xi)(0.1)^3 = \frac{1}{3!} \frac{3!}{(1-\xi)^4} (0.1)^3$$

זו הערכה מכסימלית לשגיאה

השגיאה המכסימלית תהיה עבור $\xi = 0.1$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$\frac{(0.1)^3}{(0.9)^4} = \frac{10}{9^4} \quad \text{ולכן תהיה}$$

$$(0.1)^3 + (0.1)^4 + \dots = \frac{(0.1)^3}{1-0.1} < \frac{1}{9^3} \quad \text{כלומר סכום כל האברים ואמנם:}$$

19. פתוח פונקציה מורכבת לטורנפתח לטור מקלורן $y = \sin^2 x$ יש קשיים בגזרת של $\sin^2 x$ ונקבל ביטויים מסובכים ולכן כדאי לעשות פתוח ל- $\sin x$ ולהכפיל טורי חזקות לפי הכלל שלמדנו

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)^2 = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) = \\ &= x^2 - \frac{2x^4}{3!} + \frac{2x^6}{5!} + \frac{x^6}{(3!)^2} + O(x^8) \end{aligned}$$

דוגמה נוספת

$$f(x) = e^{\sin x}$$

אם נפתח סביב $x = 0$ בדרך הרגילה נתקל בבעיות

$$f'(x) = e^{\sin x} \cos x$$

$$f''(x) \text{ מכפלה}$$

וכי קשיים רציניים
אולם נעשה הטור הבא

$$y = e^U \quad \text{נגדיר}$$

ונעשה פתוח של f סביב $U = 0$ ונזכור אח"כ $U = \sin x$

$$e^U = 1 + U + \frac{U^2}{2!} + \frac{U^3}{3!} + \dots$$

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2!} + \frac{\sin^3 x}{3!} + \dots$$

אבל אנו מעוניינים בפתוח בחזקות של x ולכן נציב

$$\sin x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)$$

ונחליט על חזקה מכסימלית וצויה לנו נניח x^5 ואז נקבל

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) + \frac{1}{2!} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^3 + \\ &+ \frac{1}{4!} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^4 + \frac{1}{5!} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^5 + \text{זורקים} = \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{1}{2!} \left(x^2 - \frac{2}{3!} x^4\right) + \frac{1}{3!} \left(x^3 - \frac{3}{3!} x^5\right) + \frac{1}{4!} x^4 + \frac{1}{5!} x^5 = \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 - x^4 \left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) + x^5 \left(\frac{1}{5!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{(3!)^2}\right) + O(x^6) \end{aligned}$$

19.1 שימושים:נביא עתה מספר דוגמאות לשימושים של פתוח לטור לצורך חשוב
אנטגרלים:

$$(1) \text{ נחשב } \int_0^m dx \sin(x^2)$$

אנטגרל זה לא ניתן לחשב בשיטות רגילות ולחשב מדויק. אך אם נדון

בפונקציה $\sin(x^2)$ ונפתחה לטור בחזקות של x^2 נקבל

$$\begin{aligned}\sin(x^2) &= x^2 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{5!}x^{10} - \dots \\ \int_0^m dx \sin(x^2) &= \int_0^m (x^2 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{5!}x^{10} - \dots) dx \\ &= \frac{m^3}{3} - \frac{m^7}{7 \cdot 3!} + \frac{m^{11}}{11 \cdot 5!} - \dots\end{aligned}$$

וזה טור המתכנס מאוד מהר וניתן לחשב איפוא את האנטגרל בקרוב טור מהר מאוד.

לדוגמה: אם $m = 1$ מקבלים

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{11 \cdot 5!} - \dots = 0.333 - 0.02381 + 0.00076 - \dots$$

(2) נחשב $\int_0^m \frac{\sin x}{x} dx$

$$\frac{\sin x}{x} \approx \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

$$\int_0^m \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^m \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right) dx = m - \frac{m^3}{3 \cdot 3!} + \frac{m^5}{5 \cdot 5!} - \frac{m^7}{7 \cdot 7!} + \dots$$

וגם טור זה מתכנס מהר מאוד. (3)

$$\begin{aligned}\int_0^m \frac{x^3}{e^x - 1} dx &= \int_0^m \frac{x^3 e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx = \int_0^m x^3 e^{-x} (1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots) dx = \\ &= 3! \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right)\end{aligned}$$

ואף טור זה מתכנס מהר.

$$\int_0^m x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

אנטגרציה בחלקים:

(4) העזר בפתוח לטור בחישוב $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \right)}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \frac{2x^3}{3!} + \dots}{x - \frac{x^3}{3!} + \dots} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \frac{2x^2}{3!}}{1 - \frac{x^2}{3!}} = 2$$

(5) פתח את $f(x) = x^4 - 11x^3 + 43x^2 - 60x + 14$ לחזקות של $x - 3$

$$f(3) = 3^4 - 11 \cdot 3^3 + 43 \cdot 3^2 - 60 \cdot 3 + 14 = 5$$

$$f'(3) = 4 \cdot 3^3 - 33 \cdot 3^2 + 86 \cdot 3 - 60 = 9$$

$$f''(x) = 12x^2 - 66x + 86$$

$$f''(x) = 12 \cdot 3^2 - 66 \cdot 3 + 86 = -4$$

$$f'''(x) = 24x - 66$$

$$f'''(3) = 6$$

$$f^{(4)}(3) = 24$$

$$f^{(5)}(3) = 0$$

$$f(x) = 5 + 9(x-3) - \frac{4}{2!}(x-3)^2 + \frac{6}{3!}(x-3)^3 + \frac{24}{4!}(x-3)^4$$

ולכן

$$\int_0^x e^{-y^2} dy = x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots$$

(6) הוכח

נפתח e^{-y^2} סביב האפס

$$f(z) = e^{-z^2} = e^{-z} \quad f(0) = 1$$

$$f'(z) = -e^{-z} \quad f'(0) = -1$$

$$f''(z) = e^{-z} \quad f''(0) = 1$$

$$f'''(z) = -e^{-z} \quad f'''(0) = -1$$

ולכן

$$e^{-z^2} = e^{-z} = 1 - z + \frac{1}{2!}z^2 - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 - \dots$$

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-y^2} dy &= \int_0^x (1 - y^2 + \frac{1}{2!}y^4 - \frac{1}{3!}y^6 + \frac{1}{4!}y^8 - \dots) dy = \\ &= x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \end{aligned}$$

נבדוק רדיוס ההתכנסות

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+3)(n+1)!}{(2n+1)n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)(n+1)}{2n+1} = \infty$$

ולכן הפתוח נכון לכל x .**19.2 משפט אוילר**ראינו כי הפתוח בחזקות של z של הפונקציה e^z הוא:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

והוא מתכנס לכל z ממשי.למרות שלא הגדרנו את e^z עבור z מרוכב.הרי נוהגים באמצעות אגף ימין של הפתוח לטור להגדיר e^z לכל z מרוכב.

$$e^{(a+ib)} = 1 + (a+ib) + \frac{(a+ib)^2}{2!} + \frac{(a+ib)^3}{3!} + \dots$$

נבדוק עבור $z = iy$ מדומה כאשר y ממשי.

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \dots + \frac{(iy)^n}{n!} + \dots =$$

$$= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \dots$$

אם נפרד את החלקים הממשיים והמדומים של הטור נקבל:

$$e^{iy} = (1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots) + i(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots)$$

ונוכל לזהות עתה באגף ימין את הפתוח של $\cos y$ ו $\sin y$ עבור y ממשי

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

כל y ממשי.

נוסחה זו ידועה בשם משפט אוילר.

ז"א הפונקציה האקספוננציאלית קשורה לפי' הטריגונומטריות בדרך הנ"ל.

אם נקח אקס' של מספר מרוכב נקבל $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$

אם נציב במקום y , $-y$, נקבל

$$e^{-iy} = \cos(-y) + i \sin(-y) = \cos y - i \sin y$$

ומכאן ע"י חבור נקבל

$$e^{iy} + e^{-iy} = 2 \cos y$$

$$\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = \cos y$$

וע"י חסור

$$e^{iy} - e^{-iy} = 2i \sin y$$

$$\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} = \sin y$$

הקשרים בין הפונקציות ההפרבוליות לטריגונומטריות.

$$\sin(ix) = i \sinh x$$

$$\cos(ix) = \cosh x$$

$$\operatorname{tg}(ix) = i \operatorname{tgh} x$$

$$\cot(ix) = -i \coth x$$

מנוסחאות אחרונות אלו אפשר לקבל ביטויים טריגונומטריים נוספים באמצעות פו' אקספוננציאליות.

19.3 סיכום טורים אינסופיים

למדנו שלושה מבחנים להתכנסות $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

אם האנטגרל מתכנס גם הטור מתכנס ולהפך, אם האנטגרל מתבדר גם הטור.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

לדוגמה:

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^{\infty} U dU = \infty$$

ולכן הטור מתבדר.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

אם $k < 1$ הטור מתכנס

אם $k \leq 1$ הטור מתבדר

מבחן ההשוואה:

$\sum a_n$ מתכנס אם $\sum c_n$ מתכנס ו- $c_n \geq a_n$

ולחפץ $\sum a_n$ מתבדר אם $\sum c_n$ מתבדר ו- $c_n \leq a_n$ לכל n .
לדוגמה:

$$1 + \frac{2^2+1}{2^3+1} + \frac{3^2+1}{3^3+1} + \dots$$

$$\frac{n^2+1}{n^3+1} \geq \frac{1}{n}$$

שכן: $n^3 + n \geq n^3 + 1$

ולכן הטור מתבדר שכן הטור ההרמוני מתבדר.

מבחן המנה של דלמבר:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad \text{מתכנס}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \text{מתבדר}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \quad \text{אין אינפורמציה.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \quad \text{לדוגמה:}$$

$$a_n = \frac{n^n}{n!} \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n = \frac{1}{e}$$

מקבלים שהטור מתכנס.

19.4 סיכום טורים עם אברים מתחלפים.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

לייבניץ אם קיים $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ו- $a_n > a_{n+1}$ אזי הטור מתכנס.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} \quad \text{דוגמה:}$$

טור מתכנס מקיים את 2 התנאים.

התכנסות בהחלט אם טור הערכים המחלטים מתכנס.

והתכנסות בתנאי אם הטור מתכנס וטור הערכים המחלטים מתבדר.

מבחן המנה להתכנסות בהחלט

אם $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ הטרור מתכנסואם $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ הטרור מתבדר.

19.5 סיכום טורי חזקות

$$\sum a_n x^n$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

דוגמאות:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$$

מצא רדיוס ההתכנסות של הטרור

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 2^{n+1}(3n+2)}{2^n(3n-1)(n+1)} = 2$$

$$|x-1| < 2$$

$$-2 < x-1 < 2$$

$$-1 < x < 3$$

מה קורה בקצוות

 $x = \pm 3$ הטרור מתבדר

כי האבר הכללי לא שואף לאפס.

פתוח פי' לטרור

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

אי אפשר לפתח אם אחת הנגזרות לא מוגדרת

דוגמאות

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

הוכח

$$f(x) = \arctg x \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

$$f'''(x) = -2x + 4x^3 - 6x^5 + 8x^7 - \dots$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = -2 + 12x^2 - 30x^4 + \dots$$

$$f^{(4)}(0) = -2$$

$$f^{(5)}(x) = 24x - 120x^3 + \dots$$

$$f^{(5)}(0) = 0$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{2!}{3!} x^3 + \frac{4!}{5!} x^5 - \dots = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

מהו הרדיוס ההתכנסות

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n-1} = 1$$

$-1 < x < 1$ רדיוס ההתכנסות
עבור $x = -1$ הטור הוא

$$-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \dots$$

הטור מתכנס בתנאי

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad \text{עבור } x = 1 \text{ הטור גם}$$

מתכנס בתנאי.

פתח $e^{\operatorname{arct} x}$ לטור חזקות ב- x

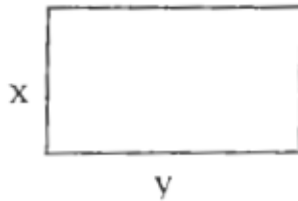
$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$e^{\operatorname{arctg} x} = 1 + \operatorname{arctg} x + \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{2!} + \frac{(\operatorname{arctg} x)^3}{3!} + \dots$$

אבל אנו מעוניינים בחזקות של x לכן

$$= 1 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2!} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right)^3 + \frac{1}{4!} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right)^4 =$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!} \left(x^2 - \frac{2}{3} x^4 \right) + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 - \frac{1}{6} x^3 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{3} \right) x^4 + \dots$$

20. נגזרות חלקיות:

איור 20.1

עד כה דנו בפונקציות שלהם משתנה בלתי תלוי אחד $y=f(x)$. ישנם הרבה דוגמאות במדע של גדלים התלויים בשניים או יותר משתנים בלתי תלויים. לדוגמה: שטח מלבן היא פונקציה של רוחבו וארכו.

$$S=xy$$

מסה של תיבה היא פונקציה של ארכה, רחבה, גבהה וצפיפותה (משקל סגולי)

$$M=\rho xyz$$

אם $z=z(x,y)$ היא פונקציה של שני משתנים x ו- y נכתוב U אם U פונקציה של 3 משתנים z, y, x נכתוב $U=u(x,y,z)$ וכדומה.

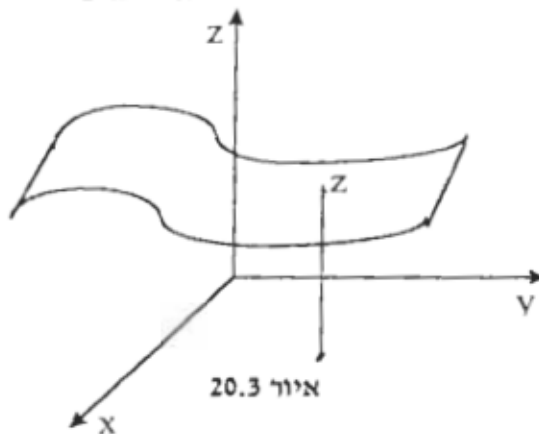
20.1 הגדרת נגזרות חלקיות:

פונקציה של שני משתנים $z=f(x,y)$ ניתנת לתאור גיאומטרי כמשטח במרחב תלת ממדי. לכל נקודה (x,y)

במישור מתאימה נקודה z במרחב התלת ממדי (ראה איור). תהי z פונקציה של שני משתנים בלתי תלויים x ו- y $z=f(x,y)$ נניח y קבוע אזי z היא פונקציה של x בלבד.

ניתן למצוא נגזרת של z לפי x . תוצאה זו נקראת

נגזרת חלקית של z לפי x ומסומנת ע"י $\frac{\partial z}{\partial x}$ ההגדרה המתמטית של נגזרת חלקית:



איור 20.3

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (20.1)$$

משמעותו הנגזרת חלקית לפי x היא היחס בין גידול הפונקציה לבין Δx כאשר y לא משתנה (נשאר קבוע) בגבול $\Delta x \rightarrow 0$. זוהי מדת הגידול של הפונקציה לפי x . באותו אופן ניתן להגדיר הנגזרת החלקית של הפונקציה לפי y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (20.2)$$

שים לב:

כי במקרה (20.1) גוזרים לפי x כאשר y קבוע. ובמקרה (20.2) גוזרים לפי y כאשר x קבוע.

דוגמאות:

(1)

$$z = 5x^3y - 2x^2y^2 + 9y^4$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5y3x^2 - 2y^22x = 15yx^2 - 4xy^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 5x^3 - 2x^22y + 36y^3 = 5x^3 - 4yx^2 + 36y^3$$

(2)

$$z = \ln(y^2 + x^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y^2 + x^2} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{y^2 + x^2}$$

$$z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \quad (3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 \cdot \frac{1}{y}}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{y}{y^2 + x^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} x \left(-\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2 + x^2}$$

לעתים הפונקציה של שני משתנים בלתי תלויים אינה מפורשת אלא כתובה בצורה סתומה $F(x, y, z) = 0$ ואז מוצאים את הנגזרות החלקיות לפי הדוגמה הבאה:
נתונה הפונקציה הסתומה:

$$5x^3yz^2 + 11y^4z + z^3 - 10 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{נחשב:}$$

נניח y קבוע ונגזור האגפים לפי x ונקבל:

$$15x^2yz^2 + 5x^3y2z \frac{\partial z}{\partial x} + 11y^4 \frac{\partial z}{\partial x} + 5z^4 \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{15x^2yz^2}{10x^3yz + 11y^4 + 5z^4}$$

נניח x קבוע ונגזור שני האגפים לפי y ונקבל:

$$5x^3z^2 + 5x^3y2z \frac{\partial z}{\partial y} + 11 \cdot 4y^3z + 11y^4 \frac{\partial z}{\partial y} + 5z^4 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{5x^3z^2 + 44y^3z}{10x^3yz + 11y^4 + 5z^4}$$

20.2 המשמעות הגיאומטרית של הנגזרת החלקית

נניח שבאיור מתוארת פונקציה

$$z = f(x, y) \text{ אם ניקח } y = y_0$$

קבוע נקבל z פונקציה של x

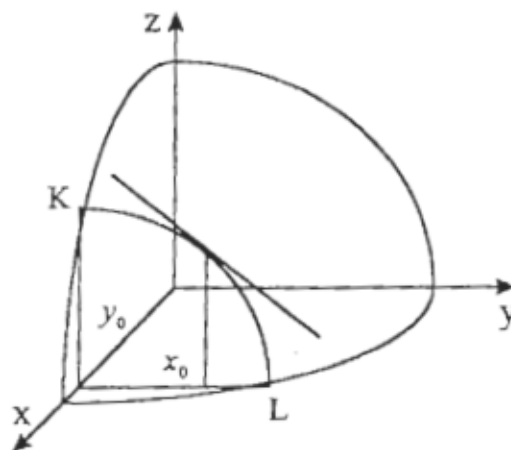
בלבד על הקו המתואר ע"י KL.

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{y=y_0} \text{ הנגזרת החלקית}$$

תהיה אפוא השיפוע של הקו הזה

בכל נקודה x . השיפוע של הקו

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{x=x_0, y=y_0} \text{ ב- } (x_0, y_0) \text{ יהיה:}$$

באופן כללי $\frac{\partial z}{\partial y}$ הוא השיפוע של

איור 20.4

קו הנחתך מהמשטח $z=f(x,y)$ ע"י מישור מקביל למישור xz .

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ באופן דומה}$$

הוא השיפוע של הקו הנחתך מהפונקציה $z=f(x,y)$ ע"י מישור מקביל למישור yz .**20.3 נגזרות חלקיות מסדרים גבוהים.**אם נתונה פונקציה $z=f(x,y)$ אז ברור ש $\frac{\partial z}{\partial x}$ ו- $\frac{\partial z}{\partial y}$ הם בדרך כלל פונקציה של x ו- y . פונקציות אלואפשר גם לנזור חלקית לפי x ולפי y .לדוגמה: ננזור את $\frac{\partial z}{\partial x}$ חלקית לפי x .מסמנים:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

וגודל זה נקרא הנגזרת החלקית השניה של z לפי x .באופן דומה:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

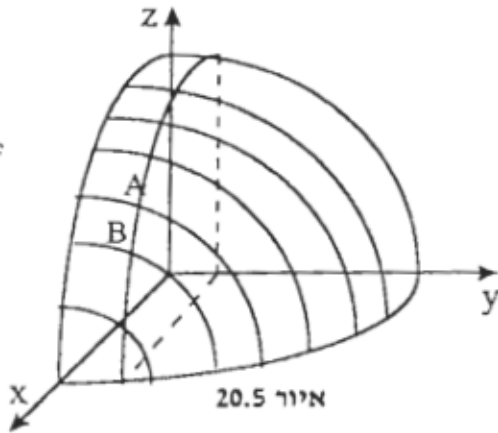
אפשר גם לנזור את $\frac{\partial z}{\partial x}$ חלקית לפי y , אז מקבלים:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

שהיא הנגזרת החלקית השניה של z לפי x ו- y .

כ"כ, קיימות גזרות מעורבות,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$



משמעות גאומטרית של הגזרות הללו:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \text{ משמעותו השנוי היחסי בשפוע } \frac{\partial z}{\partial y}$$

כאשר משנים את y ב- $\Delta y \rightarrow 0$ ו- x נשאר קבוע.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \text{ היא השנוי היחסי בשפוע הגזרת המעורבת}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \text{ כאשר משנים את } x \text{ ב- } \Delta x \rightarrow 0 \text{ ושומרים על}$$

y קבוע, דהיינו מנקודה A

עוברים לנקודה B (ראה איור).

אפשר להוכיח כי אם הפונקציה z היא רציפה

והגזרות הן פונקציות רציפות אז:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

לדוגמה: נתונה הפונקציה $z = \sin(2x + 3y)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad (2) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad (1) \quad \text{חשב:}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \cos(2x + 3y) \quad (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3 \cos(2x + 3y) \quad (2)$$

באופן דומה קל להגדיר גדלים כמו:

או:

לדוגמה:

נתונה הפונקציה:

חשב:

$$U = x^2 y z^3 + z^6$$

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y \partial z^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 3x^2 y z^2 + 6z^5$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 6x^2 y z + 30z^4$$

$$\frac{\partial^3 U}{\partial y \partial z^2} = 6x^2 z$$

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y \partial z^2} = 12xz$$

21. הדיפרנציאל השלם של פונקציה.

נגדיר כדיפרנציאל השלם את השינוי בפונקציה החדות לשינוי זעיר ב-x ב- Δx ולשינוי זעיר ב-y ב- Δy

כלומר:

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] + [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)]$$

אם נכפיל באגף ימין את האבר הראשון ב- Δy ונחלק ב- Δy וכן ניקח $\Delta y \rightarrow 0$ וכן באבר השני נכפיל ונחלק ב- Δx נקבל:

$$df = \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial x} dx \quad (21.1)$$

כלומר השינוי בפונקציה $f(x, y)$ החדות לשינויים אינפיניטסימליים ב-y וב-x ניתן ע"י הנוסחה הנ"ל. גודל זה נקרא **דיפרנציאל שלם**.

הערה: נוסחה (3) אינה מדויקת עבור dx ו- dy

סופיים. ככל ש- dx ו- dy קרובים יותר ל-0 הנוסחה יותר מדויקת.

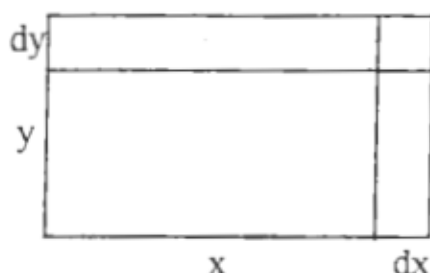
זה נובע מהעובדה ש- $\frac{\partial f}{\partial y}$ חושב בנקודה $x + dx$ ולא בנקודה x .

$$U = U(x, y, z, \dots, t)$$

באופן כללי אם נתונה פונקציה

אזי הדיפרנציאל השלם שלה יהיה:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz + \dots + \frac{\partial U}{\partial t} dt$$



איור 20.6

לדוגמה: נתונה פונקציה המתארת שטח מלבן $z = xy$ השינוי בשטח המלבן החדות לשינוי באורך וברוחב יהיה, לפי נוסחה (21.1):

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = y dx + x dy$$

נבדוק עתה בדרך אחרת, נסיף ל- x ו- y שטח של המלבן החדש יהיה:

$$z = (x + dx)(y + dy) = xy + xdy + ydx + dxdy$$

כלומר השינוי בשטח המלבן:

$$dz = xdy + ydx + dxdy$$

$$dz = xdy + ydx$$

ואילו אנו קבלנו:

כפי שראינו למעלה הנוסחה שלנו מקורבת ומזניחים אברים מסדר גודל $dxdy$ שהם קטנים ביותר

כאשר dx ו- dy הם אינפיניטסימליים.

דוגמה:

נתונה הפונקציה:

$$z = x^2 y^2 + 2xy - 5x^4 - 11y^2$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 + 2y - 20x^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 y^2 + 2x - 22y$$

$$dz = (2xy^2 + 2y - 20x^3) dx + (2x^2 y^2 + 2x - 22y) dy$$

נביא עתה שתי דוגמאות שימושיות:

1. ההספק הנבלע בגד חשמלי בעל התנגדות R (אום) שהמתח עליו V (וולטים)

$$\text{ניתן ע"י } P = \frac{V^2}{R} \text{ (וואט).}$$

נתון (וולט) $V = 200$ ו (אום) $R = 8$.

מה יהיה השנוי בהספק אם מקטינים את V ב-5 וולט ואת R ב-0.2 אום?

פתרון:

$$\begin{aligned} dP &= \frac{\partial P}{\partial V} dV + \frac{\partial P}{\partial R} dR & \frac{\partial P}{\partial V} &= \frac{2V}{R} \\ dP &= \frac{2V}{R} dV - \frac{V^2}{R^2} dR & \frac{\partial P}{\partial R} &= -\frac{V^2}{R^2} \end{aligned}$$

נציב:

$$dR = -0.2 \quad dV = -5 \quad R = 8 \quad V = 200$$

ונקבל:

$$dP = \frac{400}{8}(-5) - \frac{200^2}{8^2}(-0.2) = -250 + 125 = -125$$

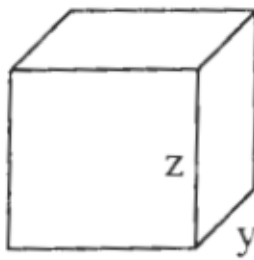
תשובה: ההספק יורד ב 125 וואט בקרוב.

2. ממדיו הנתונים של תיבת עץ הם 10, 12, 20 ס"מ עם שגיאת מדידה של 0.05 ס"מ בכל מדידה.

מצא בקרוב את השגיאה הגדולה ביותר בשטח הפנים של הגוש ואת אחוז השגיאה בשטח אשר

נגרמה ע"י השגיאות במדידות הנפרדות.

$$\text{שטח הפנים } S = 2(xy + xz + yz), \quad x = 10, \quad y = 12, \quad z = 20$$



איור 20.7

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x} dx + \frac{\partial S}{\partial y} dy + \frac{\partial S}{\partial z} dz =$$

$$= 2(y+z)dx + 2(x+z)dy + 2(x+y)dz$$

השגיאה המכסימלית תהיה כאשר השגיאות במדידות האברים יהיו

בעלי אותו סימן, למשל חיובי.

כלומר:

$$dS = 2(10+12)0.05 + 2(10+20)0.05 + 2(12+20)0.05 = 8.4$$

$$\text{מכאן אם שטח הפנים הוא } S = 2(10 \cdot 12 + 10 \cdot 20 + 12 \cdot 20) = 1120 \text{ (ס"מ}^2\text{)}$$

עלולה להיות שגיאה בשטח הפנים:

$$S = 1120 \pm 8.4 \text{ (ס"מ}^2\text{)}$$

$$\frac{8.4}{1120} \cdot 100 = 0.75\% \quad \text{השגיאה באחוזים:}$$

21.1 נגזרת שלמה.

נעזר במה שלמדנו על נגזרות חלקיות עבור נגזרות רגילות.

נתונה פונקציה $z = f(x, y)$ ונניח x ו- y הם כל אחת פונקציה של משתנה אחר, למשל t .

כלומר $x = x(t)$ ו- $y = y(t)$, אזי z היא למעשה פונקציה של t בלבד - משתנה בלתי תלוי אחד.

אנו מעוניינים למצוא את הנגזרת של z לפי t . דרך אחת לעשות זאת היא לבטא את z

באמצעות t בלבד ע"י שניצב $x = x(t)$, $y = y(t)$ בפונקציה $z = f(x, y)$ ואז לחשב את $\frac{dz}{dt}$ בדרכים הרגילות.

אם $x(t)$ ו- $y(t)$ פונקציות סתומות לא נוכל לגזור בדרך זו וחייבים להשתמש בנגזרות חלקיות כפי שידגים להלן.

נעזר בנוסחה של הדיפרנציאל השלם.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

dx, dy הם שינויים זעירים הודות לשינוי ב- dt והשינוי בפונקציה הוא df . נחלק את שני האגפים ב- dt ונקבל:

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}} \quad (21.2)$$

$\frac{df}{dt}$ היא הנגזרת השלמה של f לפי t . כלומר מצאנו דרך למצא נגזרת שלמה ע"פ נגזרות חלקיות. לעתים קרובות דרך זו קלה הרבה יותר!

לדוגמה:

$$f(x, y) = \arctg \frac{y}{x}$$

כאשר:

$$x = e^t - e^{-t} \quad y = e^t + e^{-t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = e^t + e^{-t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t - e^{-t}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{-y}{y^2 + x^2} (e^t + e^{-t}) + \frac{x}{y^2 + x^2} (e^t - e^{-t})$$

$$\frac{df}{dt} = -\frac{(e^t + e^{-t})^2}{(e^t + e^{-t})^2 + (e^t - e^{-t})^2} + \frac{(e^t - e^{-t})^2}{(e^t + e^{-t})^2 + (e^t - e^{-t})^2}$$

נוסחה 21.1 נקראת בשם חוק השרשרת
באופן כללי אם נתונה פונקציה:

$$U = f(x, y, z, \dots)$$

כאשר כל משתנה פונקציה של t ,

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t) \dots\dots\dots$$

אז:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \dots$$

דוגמה נוספת:

$$z = x^2 + xe^y$$

נתון:

$$x = \sin t$$

$$y = \ln t$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + e^y \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xe^y \quad ; \quad \frac{dx}{dt} = \cos t \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (2x + e^y) \cos t + \frac{xe^y}{t}$$

אם נחזיר את x ו- y למקרה זה אפשר לבטא הכל כפונקציה של t ,

$$\frac{dz}{dt} = (2 \sin t + t) \cos t + \sin t$$

ישנו מקרה מיוחד וחשוב של נוסחת השרשרת. אם נתונה פונקציה $z = f(x, y)$ כאשר y היא פונקציה של x כלומר $y = g(x)$. במקרה זה z היא פונקציה של משתנה x בלבד וע"י שניצב את $y = g(x)$ ב- z נקבל את z כפונקציה של x בלבד. ואז ניתן לחשב

הנגזרת השלמה $\frac{dz}{dx}$. במקרה זה אפשר להיעזר בנוסחת השרשרת.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

אולם במקום $y = y(t)$ נציב $y = y(x)$ ונקבל,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}} \quad (21.3)$$

ניתן גם לקבל נוסחה זו ישיר מנוסחת הדיפרנציאל השלם.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

נחלק ב- $\Delta x \rightarrow 0$ ונקבל את (21.3).

חשוב מאוד להבין את משמעות הסמלים הני"ל. $\frac{\partial z}{\partial x}$ מחושב ע"י גזירת $f(x, y)$ בעת ש- y נלקח כקבוע.

$\frac{\partial z}{\partial y}$ מחושב ע"י גזירת $f(x, y)$ כאשר x קבוע. היא הנגזרת הרגילה של $y = g(x)$.

היא התוצאה המתקבלת מגזירת הפונקציה z התלויה למעשה ב- x בלבד. $\frac{dz}{dx}$

שים לב: הנגזרת הרגילה $\frac{dz}{dx}$ שונה לחלוטין מהנגזרת החלקית $\frac{\partial z}{\partial x}$ והקשר ביניהם ניתן ע"י נוסחה (21.3).

דוגמאות:

$$z = \frac{1}{3} \sqrt{12 - x^2 - 4y^2}$$

נתונה הפונקציה:

$$y = x^2$$

כאשר:

דרך אחת היא להציב את y ב- z ולקבל z פונקציה של x בלבד ולגזור. אולם לפי הנוסחה 21.2

שהיא לעתים נוחה יותר נוכל לחשב $\frac{dz}{dx}$ ללא הצבה.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{3\sqrt{12 - x^2 - 4y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4y}{3\sqrt{12 - x^2 - 4y^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{3\sqrt{12 - x^2 - 4y^2}} - \frac{8xy}{3\sqrt{12 - x^2 - 4y^2}} = \frac{-x(1 + 8y)}{3\sqrt{12 - x^2 - 4y^2}}$$

למעשה יש לנו בנוסחה הנ"ל קשר בין הנגזרת השלמה $\frac{dz}{dx}$ לבין הנגזרות החלקיות

$$\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}$$

נוסחה זו חשובה מאוד ותתקלו בה רבות, במיוחד בקורס על תרמודינמיקה. קשר חשוב נוסף המתקבל מהנוסחה הנ"ל במקרה הפרטי:

$$f(x, y) = 0$$

$$z = f(x, y) = 0$$

נוכל לכתוב:

א"כ z היא פונקציה קבועה ולכן:

$$0 = \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}$$

(21.4)

ומכאן:

זה גם קשר חשוב בתרמודינמיקה.

דוגמה:

נתונה הפונקציה:

$$x^2 + y^3 - 13 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = ?$$

חשב:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = -\frac{2x}{3y^2}$$

אפשר גם בדרך אחרת. נגזור 2 האגפים לפי x .

$$2x + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{3y^2}$$

שים לב: הנגזרת השלמה של פונקציה קבועה המתאפסת אולם הנגזרות חלקיות, לא דווקא.

21.2 נוסחת השרשרת במספר משתנים.

נתונה פונקציה $z = f(x, y)$ כאשר x ו- y הם פונקציה של מספר משתנים לצורך פשוטות

$$\text{נניח } x = x(s, t) \quad y = y(s, t) \text{ . אנו מעוניינים לחשב } \frac{\partial z}{\partial s} \text{ ו- } \frac{\partial z}{\partial t}$$

אם נחזור לפרנציאל השלם, נוסחה 21.1,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

נחלק ב- Δs השואף לאפס כאשר t קבוע, ונקבל

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

באופן דומה: נחלק ב- Δt השואף לאפס כאשר s קבוע ונקבל:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

קבלנו אפוא את הנגזרות החלקיות של z לפי t ולפי s . אלו הן נוסחאות השרשרת. אפשר לקבל נוסחאות אלו בדרך אחרת, כלהלן: נשתמש בקשר:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

מכיון ש- z פונקציה של s ו- t , $z = z(s, t)$ נקבל:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial s} ds + \frac{\partial z}{\partial t} dt$$

נזהה את $\frac{\partial z}{\partial s}$ ואת $\frac{\partial z}{\partial t}$ באופן הבא; נחשב dx ו- dy מתוך:

$$x = x(s, t) \quad y = y(s, t)$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial s} ds + \frac{\partial x}{\partial t} dt$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial s} ds + \frac{\partial y}{\partial t} dt$$

נציב בדיפרנציאל השלם:

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial s} ds + \frac{\partial x}{\partial t} dt \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial s} ds + \frac{\partial y}{\partial t} dt \right) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right) dt$$

אם נשווה נוסחה זו לנוסחה (21.1):

$$dz = \frac{\partial z}{\partial s} ds + \frac{\partial z}{\partial t} dt$$

נוכל לזהות:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \quad -1$$

דוגמאות:

$$z = 4x^2 - 9y^2$$

נתון:

$$x = \frac{s}{t} \quad y = s^2 + t^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} ; \quad \frac{\partial z}{\partial s}$$

חשב:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} =$$

$$8x \frac{1}{t} + (-18y) \cdot 2s = \frac{8x}{t} - 36ys = \frac{8s}{t^2} - 36(s^2 + t^2)s$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} =$$

$$8x \left(-\frac{s}{t^2} \right) + (-18y) 2t = -\frac{8xs}{t^2} - 36yt = -8 \frac{s^2}{t^3} - 36(s^2 + t^2)t$$

נראה עתה איך אפשר לבצע חשובי נגזרות כאלו בדרך השנייה.

לדוגמה:

נתון:

$$y = s - t \quad x = \cos(s + t) \quad z = x \cdot y$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} ; \quad \frac{\partial z}{\partial t}$$

חשב:

ניקח דיפרנציאל שלם של כל משוואה:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = ydx + xdy$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial s} ds + \frac{\partial x}{\partial t} dt = \cos(s + t) ds + \cos(s + t) dt$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial s} ds + \frac{\partial y}{\partial t} dt = ds - dt$$

נציב dx ו- dy ב- dz ונקבל:

$$\begin{aligned} dz &= y \cos(s+t)(ds+dt) + x(ds-dt) \\ &= (y \cos(s+t) + x)ds + (y \cos(s+t) - x)dt \end{aligned}$$

ע"י השוואה לדיפרנציאל השלם (21.1):

$$dz = \frac{\partial z}{\partial s} ds + \frac{\partial z}{\partial t} dt$$

נקבל:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = y \cos(s+t) + x$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = y \cos(s+t) - x$$

דוגמה נוספת:

$$U = x^2 + 2xy - y \ln z$$

נתון:

$$z = 2t \quad y = s - t^2 \quad x = s + t^2$$

נחשב את כל הדיפרנציאלים:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

$$= (2x + 2y)dx + (2x - \ln z)dy - \frac{y}{z} dz$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial s} ds + \frac{\partial x}{\partial t} dt = ds + 2t dt$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial s} ds + \frac{\partial y}{\partial t} dt = ds - 2t dt$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial s} ds + \frac{\partial z}{\partial t} dt = 2 dt$$

נציב ב- dU

$$dU = (2x + 2y)(ds + 2t dt) + (2x - \ln z)(ds - 2t dt) - \frac{y}{z} 2 dt$$

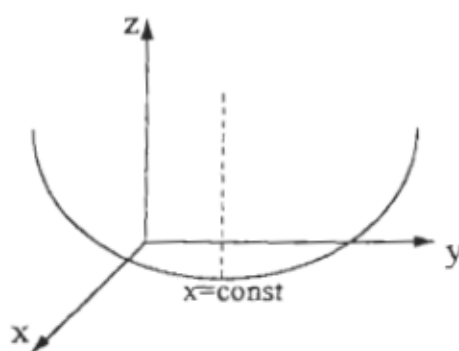
$$= (4x + 2y - \ln z)ds + [8yt - (2x - \ln z)2t - 2y/t]dt$$

$$\frac{\partial U}{\partial s} = 4x + 2y - \ln z$$

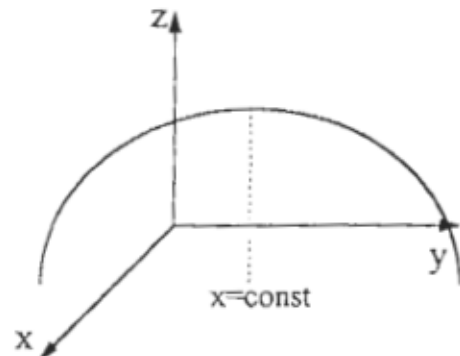
$$\frac{\partial U}{\partial t} = \left[4yt + 2t \left(\ln z - \frac{2y}{z} \right) - \frac{2y}{t} \right]$$

22. נקודות קיצוניות של פונקציה בעלת שני משתנים.

כפי שראינו הפונקציה $z = f(x, y)$ מתארת משטח במרחב התלת ממדי. נניח שלפונקציה יש איזה מינימום או מקסימום מקומי.



איור 22.2

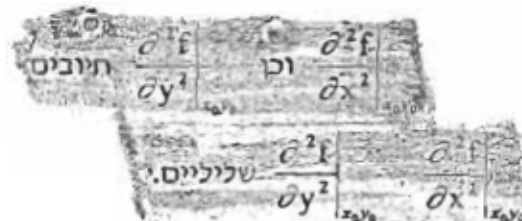


איור 22.1

נניח שיש מינימום או מקסימום בנקודה (x_0, y_0) . אזי בשני המקרים יתקיים:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} = 0$$

כי לאורך כל קו על המשטח מקביל למישור xy או xz ועובר דרך (x_0, y_0) יש נקודה קיצונית.



כמו כן למינימום קיים

ועבור מקסימום

תוצאות אלו נובעות ממה שלמדנו עבור פונקציות בעלות משתנה אחד. זאת מכיון שכאשר שומרים על משתנה אחד קבוע (x או y) הפונקציה z הופכת להיות פונקציה של משתנה אחד בלבד! אלו תנאים הכרחיים ולא מספיקים. כלומר אם קיימת נקודה מינימום או מקסימום יתקיימו המקרים הנ"ל. זוהי איפוא דרך למצוא נקודות קיצוניות אפשריות. כדי לאשר שאמנם אלו נקודות קיצוניות (מקסימום או מינימום) צריך להוסיף תנאי

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0 \quad (22.1) \quad \text{מספיק:}$$

דוגמה:

$$z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$$

נתונה פונקציה:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 3$$

מצא נקודות קיצוניות.

$$x = -\frac{4}{3} \quad y = \frac{1}{3}$$

הפתרון:

בנקודה זו תתכן נקודה קיצונית.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0$$

נבדוק האם היא מקסימום או מינימום:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 > 0$$

ולכן יתכן שנקודה זו היא מינימום:
נבדוק את התנאי המספיק:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = (-1)^2$$

$$(-1)^2 - 2 \cdot 2 < 0$$

התנאי המספיק מתקיים ולכן הנקודה $(-4/3, 1/3)$ הינה נקודת מינימום.

נקודת אוכף: יש גם מקרה מעניין נוסף שקורה לעתים והוא נקרא נקודת אוכף, ראה איור.
בנקודת אוכף יש מינימום לאורך ציר אחד ומכסימום לאורך ציר אחר
באיור רואים מכסימום לאורך ציר x ומינימום לאורך ציר y .
בנקודת אוכף יתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

ותנאי נוסף שחייב להתקיים

שונה מסימנו מ- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. באיור הנ"ל

מכסימום לאורך ציר x , $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$,

ומינימום לאורך ציר y , $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$.

שים לב: עבור נקודת אוכף אי השוויון (22.1) לא יכול להתקיים.

דוגמה: מצא מכסימום ומינימום ונקודת אוכף של הפונקציה:

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$

על מנת לבדוק אם יש נקודות קיצוניות, צריך לפתור את צמד המשוואות:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0$$

הפתרון: $x = 0, y = 0$. בנקודה זו ישנה אפשרות לנקודה קיצונית. נבדוק את התנאי (22.1):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

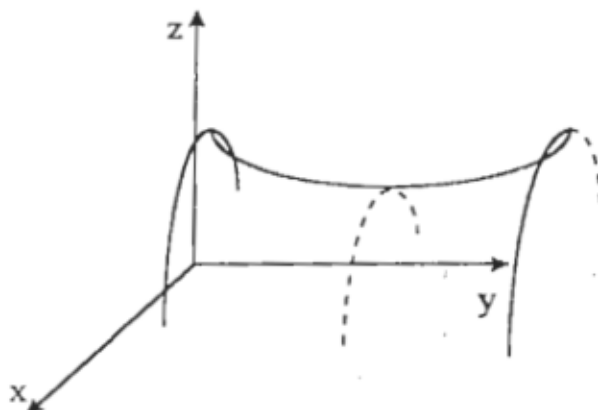
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 - (2)(-2) = 4 > 0$$

לכן $(0,0)$ אינה נקודת מינימום או מקסימום, אלא **נקודת אוכף**. בד"כ אין צורך לבדוק את התנאי

המספיק. זה נובע מכך שהגזרת $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ שונה בסימן מ- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

משתמשים בו רק במקרה הכרחי, בדרך כלל אפשר לומר מהבעיה עצמה אם יש מקסימום

או מינימום או אף אחד מהם.



איור 22.3

דוגמה שימושית:

מעוניינים לבנות פנים של מנסרה משולשת (משולש שווה שוקיים) בעלת נפח V (ללא בסיס) ומעוניינים להשתמש במינימום חומר (ראה איור).

חשב את מידותיה היחסיות של המנסרה!

$$h = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \theta$$

$$\frac{a}{2 \cos \theta} : \text{שוק המשולש}$$

נפח המנסרה:

$$V = \frac{a \cdot l}{2} \cdot \frac{a}{2} \operatorname{tg} \theta = \frac{a^2 l}{4} \operatorname{tg} \theta$$

שטח הפנים (ללא הבסיס):

$$A = 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \operatorname{tg} \theta + \frac{a}{2 \cos \theta} \cdot 2l$$

למשוואה זו יש שלשה משתנים a, θ, l . אלא שהם תלויים באמצעות המשוואה של הנפח

שנתון שהוא קבוע. מהמשוואה של הנפח נחלץ את l ,

$$l = \frac{4 \cdot V}{a^2 \operatorname{tg} \theta}$$

ונציב ב-A:

$$A = \frac{a^2}{2} \operatorname{tg} \theta + \frac{a}{\cos \theta} \frac{4 \cdot V}{a^2 \operatorname{tg} \theta} = \frac{a^2}{2} \operatorname{tg} \theta + \frac{4 \cdot V}{a \sin \theta}$$

קיבלנו את A כפונקציה של שני משתנים בלתי תלויים a ו- θ . על מנת למצוא מינימום ל-A

נשוה את $\frac{\partial A}{\partial a}$ ו- $\frac{\partial A}{\partial \theta}$ לאפס.

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = \frac{a^2}{2} \sec^2 \theta - \frac{4 \cdot V}{a} \csc \theta \cot \theta = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial a} = a \operatorname{tg} \theta - \frac{4 \cdot V}{a^2 \sin \theta} = 0$$

מהמשוואה הראשונה:

$$a^3 = \frac{8 \cdot V \csc \theta \cot \theta}{\sec^2 \theta}$$

מהמשוואה השנייה:

$$a^3 = \frac{4 \cdot V}{\sin \theta \operatorname{tg} \theta} = \frac{4 \cdot V \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

מכאן:

$$\frac{4 \cdot V \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{8 \cdot V \csc \theta \cot \theta}{\sec^2 \theta}$$

לאחר חילוק ב- $4V$ נקבל:

$$\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{2 \cos^2 \theta \cot \theta}{\sin^2 \theta}$$

$\cos \theta = 0$ אינה פתרון כי המקרה $\theta = 90^\circ$ אינו מנסה (פתרון שיתן מכסימום)

הפתרון שנשאר: $\theta = 45^\circ \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{2}$
כלומר:

$$V = \frac{1}{4} a^2 \lg \theta = \frac{1}{4} a^2 l$$

קיים גם קשר בין a ו- l

$$a^3 = \frac{4 \cdot V}{\sin \theta \lg \theta} = \frac{4 \cdot V \cdot 2}{\sqrt{2} \cdot 1} = 4\sqrt{2} \cdot V = \sqrt{2} \cdot a^2 l$$

$$a = \sqrt{2} \cdot l$$

עבור גדלים אלו מתקבל שטח פנים מינימלי.

$$A = 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \lg \theta + \frac{a}{2 \cos \theta} \cdot 2l + l \cdot a \quad \text{ניקח:}$$

ונמשיך באותה דרך!

23. טורי חזקות בשני משתנים

ראינו כבר שבדרך כלל ניתן לפתח פונקציה לטור טיילור סביב x_0 בצורה הבאה:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

נניח שניתן לפתח באופן דומה פונקציה של שני משתנים $z = f(x, y)$ סביב (x_0, y_0) בחזקות של $(x - x_0)$ ו- $(y - y_0)$ ונחשב מהם המקדמים. כלומר מניחים את הפתוח הבא:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & a_{00} + a_{10}(x - x_0) + a_{01}(y - y_0) + a_{20}(x - x_0)^2 + \\ & + a_{11}(x - x_0)(y - y_0) + a_{02}(y - y_0)^2 + \\ & + a_{30}(x - x_0)^3 + a_{21}(x - x_0)^2(y - y_0) + \\ & + a_{12}(x - x_0)(y - y_0)^2 + a_{03}(y - y_0)^3 + \dots \end{aligned}$$

שים לב: האינדקס הראשון מציינ את החזקה של $x - x_0$ ואינדקס השני את החזקה של $y - y_0$.

נחשב את הנגזרות הבאות ועל פיהם נוזה את המקדמים: $f(x_0, y_0) = a_{00}$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} &= a_{10} & \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} &= a_{01} \\ \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x_0, y_0} &= 2a_{20} & \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{x_0, y_0} &= a_{11} \end{aligned}$$

מכאן מקבלים:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2!} [f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + \\ & + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2] + \dots \quad (23.1) \end{aligned}$$

כאשר $f_{xy} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $f_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$ וכו'. נוסחה (23.1) משמשת לפתוח פונקציות של שני

משתנים לטור חזקות. אם נקח את הפתוח עד לסדר ראשון ב- $x - x_0$ ו- $y - y_0$ נוכל לזהות את נוסחת הדיפרנציאל השלם. נוזה את $dz = f(x, y) - f(x_0, y_0)$ ואת $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$ ואמנם נקבל את נוסחת הדיפרנציאל השלם

$$dz = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} dx + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} dy$$

נוסחה (23.1) משמשת לקבלת קרוב יותר מנוסחת הדיפרנציאל השלם.

סימון פשוט וקל יותר לזכרון מתקבל אם נציב $y - y_0 = k$, $x - x_0 = h$. בכתובה זו האבר מסדר ראשון יהיה:

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0)$$

והאבר מסדר שני נכתב באופן הבא:

$$\frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0, y_0)$$

כאשר הרבוע הוא פעולה אופרטורית. באופן כללי נוכל לכתוב:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0, y_0) \quad (23.2)$$

דוגמאות:

1) פתח את הפונקציה $f(x, y) = \sin x \cos y$ לטור חזקות בן שני משתנים סביב $x_0 = y_0 = 0$
 $f(0, 0) = 0$

$$\begin{array}{ll} f_x = \cos x \cos y & ; \quad f_x(0, 0) = 1 \\ f_y = -\sin x \sin y & ; \quad f_y(0, 0) = 0 \\ f_{xx} = -\sin x \cos y & ; \quad f_{xx}(0, 0) = 0 \\ f_{yy} = -\sin x \cos y & ; \quad f_{yy}(0, 0) = 0 \\ f_{xy} = -\cos x \sin y & ; \quad f_{xy}(0, 0) = 0 \\ f_{xx} = -\cos x \cos y & ; \quad f_{xx}(0, 0) = -1 \\ f_{xy} = \sin x \sin y & ; \quad f_{xy}(0, 0) = 0 \\ f_{yy} = -\cos x \cos y & ; \quad f_{yy}(0, 0) = -1 \\ f_{yyy} = \sin x \sin y & ; \quad f_{yyy}(0, 0) = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sin x \sin y &= 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot y + \frac{1}{2!} (0 \cdot x^2 + 0 \cdot 2xy + 0 \cdot y^2) + \\ &+ \frac{1}{3!} (-1 \cdot x^3 + 0 \cdot 3x^2y + (-1) \cdot 3xy^2 + 0 \cdot y^3) + \dots \end{aligned}$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} - \frac{1}{2} xy^2 + (3 \text{ אברים בסדרים גדולים מ-3})$$

ניתן להוכיח שפתוח בטור סביב נקודה מסוימת הוא יחיד. לכן ניתן בשיטות שונות להגיע לאותו תוצאה.

למשל: אפשר להגיע לתוצאה הקודמת (אף יותר בקלות) ע"י הכפלת הפתוחים של $\sin x$ ו- $\cos y$ כל אחד בנפרד.

$$\sin x \cos y = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots \right) \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \dots \right) = x - \frac{x^3}{3!} - \frac{xy^2}{2!} + \dots$$

שים לב את האבר $\frac{x^2 y^3}{2! \cdot 3!}$ אסור לנו לקחת כי הוא מסדר חמישי. ואם רוצים

לקחת אברים מסדר חמישי חיוביים להיות עקביים ולקחת את כל האברים גם $\frac{x \cdot y^4}{4!}$

וגם $\frac{x^3}{5!}$ שכן כולם מאותו סדר גדול!

(2) פתח את הפונקציה $f(x, y) = e^{x+y}$ לטור מקלורן סביב $(0,0)$.

$$f(0,0) = e^0 = 1$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} (e^{x+y}) \right|_{x=0, y=0} = e^{x+y} \Big|_{0,0} = 1$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial y} (e^{x+y}) \right|_{x=0, y=0} = e^{x+y} \Big|_{0,0} = 1$$

$$\frac{1}{2!} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 e^{x+y} \Big|_{0,0} =$$

$$= \frac{1}{2!} \left(x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{x+y} \Big|_{0,0} + 2xy \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} e^{x+y} \Big|_{0,0} + y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} e^{x+y} \Big|_{0,0} \right) =$$

$$= \frac{1}{2!} (x^2 + 2xy + y^2)$$

ולכן סייח נקבל:

$$f(x, y) = 1 + (x+y) + \frac{1}{2!} (x+y)^2 + \frac{1}{3!} (x+y)^3 + \dots$$

אם היינו לוקחים הפתוח של e^x ושל e^y כל אחד בנפרד ומכפילים היינו מקבלים אותה תוצאה:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots$$

$$e^x \cdot e^y = 1 + (x+y) + \frac{y^2}{2!} + \frac{x^2}{2!} + xy + \dots$$

ישנם גם פונקציות שאין ברירה רק לפתח לטור של 2 משתנים לפי נוסחה (15.1).

לדוגמה:

$$x^2 y + 3y - 2 \text{ בחזקות של } x-1 \text{ ו- } y+2$$

פתח:

$$f(x, y) = x^2 y + 3y - 2$$

$$f(1, -2) = -10$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{1,-2} = 2xy \Big|_{1,-2} = -4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3 \Big|_{1,2} = 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y \Big|_{1,2} = -4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x \Big|_{1,2} = 2$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0 \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 2 \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0$$

כל הנגזרות הגבוהות יותר מתאפסות.

נציב עתה בפתוח טור טיילור.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right] f(x_0, y_0) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left[(x - x_0)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2(x - x_0)(y - y_0) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (y - y_0)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] f(x_0, y_0) + \\ &+ \frac{1}{3!} \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^3 f(x_0, y_0) = \\ &= -10 - 4(x - 1) + 4(y + 2) - 2(x - 1)^2 + 2(x - 1)(y + 2) + (x - 1)^2(y + 2) \end{aligned}$$

וזאת ניתן להוכיח בקלות בדרך אלגברית, ע"י שנפתח את הסוגריים נקבל חזרה את הביטוי $x^2y + 3y - 2$.

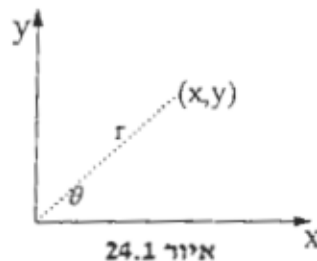
היתרון בכתיבה המסובכת הוא שבסביבת $y = -2, x = 1$

ניתן לקרוב את הפונקציה למישור $F(x, y) = -10 - 4(x - 1) + 4(y + 2)$

24. החלפת משתנים.

אחד השימושים החשובים של נגזרות חלקיות הוא בהחלפת משתנים. לעבור ממשתנים מסוג אחד לסוג אחר. למשל: מקרטזיים x, y לפולריים. החלפת משתנים עשויה לעתים להביא לבטויים פשוטים יותר. נמחיש זאת בדוגמה הבאה! נתונה המשוואה:

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + y^2$$



איור 24.1

נעבור ממשתנים x ו- y למשתנים r ו- θ הקשרים אליהם באופן הבא:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

זה המעבר מקאורדינטות קרטזיות למקאורדינטות פולריות.

הקשר ההפוך:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctg \frac{y}{x}$$

את x ו- y אפשר בקלות להעביר לפונקציה של θ ו- r , אבל אנו מעוניינים גם את הנגזרות החלקיות של F וזו הבעיה. F היא פונקציה של x ו- y , כלומר:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

אבל גם $F(r, \theta)$ לאחר החלפת משתנים ולכן

$$dF = \frac{\partial F}{\partial r} dr + \frac{\partial F}{\partial \theta} d\theta$$

נבטא את dr ו- $d\theta$ באמצעות dx ו- dy וכך נוכל לזהות את $\frac{\partial F}{\partial x}$ וכן $\frac{\partial F}{\partial y}$.

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy$$

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \theta}{\partial y} dy$$

$$dr = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} 2x dx + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} 2y dy = \frac{x}{r} dx + \frac{y}{r} dy$$

$$d\theta = \frac{\left(-\frac{y}{x^2}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} dx + \frac{\frac{1}{x} dy}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{-y dx + x dy}{r^2}$$

ולכן:

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial F}{\partial r} \left(\frac{x}{r} dx + \frac{y}{r} dy \right) + \frac{\partial F}{\partial \theta} \left(\frac{-y dx + x dy}{r^2} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial r} \frac{x}{r} - \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{y}{r^2} \right) dx + \left(\frac{\partial F}{\partial r} \frac{y}{r} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{x}{r^2} \right) dy \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r} \frac{x}{r} - \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{y}{r^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial r} \frac{y}{r} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{x}{r^2}$$

ולכן נוכל להציב במשוואה המקורית ונקבל:

$$x \left(\frac{\partial F}{\partial r} \frac{x}{r} - \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{y}{r^2} \right) + y \left(\frac{\partial F}{\partial r} \frac{y}{r} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{x}{r^2} \right) = x^2 + y^2$$

$$\left(\frac{x^2}{r} + \frac{y^2}{r} \right) \frac{\partial F}{\partial r} + \left(\frac{xy}{r^2} - \frac{xy}{r^2} \right) \frac{\partial F}{\partial \theta} = x^2 + y^2$$

||
0

$$\frac{r^2}{r} \frac{\partial F}{\partial r} = r^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial r} = r$$

המשוואה המקורית בקואורדינטות פולריות תהיה:

$$F = \frac{1}{2} r^2 + f(\theta)$$

הערה: דרך אגב נוכל לפתור משוואה זו, הפתרון יהיה:

$$F(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + f\left(\frac{y}{x}\right)$$

או בקואורדינטות קרטזיות:

ניתן להציב במשוואה המקורית ולהראות שפונקציה זו היא פתרון.
הערה חשובה:

אם לא היינו יכולים לחלץ $\theta(x, y)$, $r(x, y)$ ובכל זאת היינו מעוניינים ב $\frac{\partial \theta}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial r}{\partial x}$

$$y = r \sin \theta \quad x = r \cos \theta \quad \text{ו-} \frac{\partial \theta}{\partial y} \text{ היינו יכולים לפתור זאת בעזרת הקשרים.}$$

$$1 = \frac{\partial r}{\partial x} \cos \theta - r \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \text{נגזור 2 המשוואות חלקית לפי } x :$$

$$0 = \frac{\partial r}{\partial x} \sin \theta + r \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

2 משוואות ו-2 נעלמים נכפיל הראשונה ב- $\sin \theta$ והשנייה ב- $\cos \theta$ ונחסר:

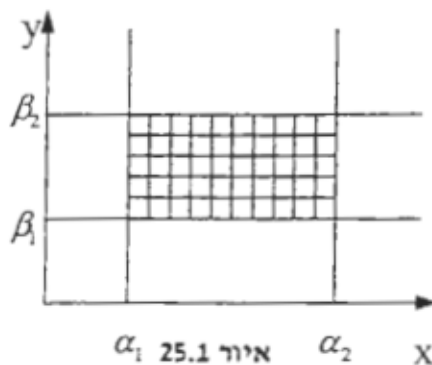
$$r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\sin \theta$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta = \frac{x}{r} \quad \text{וכן נחלץ} \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-\sin \theta}{r} = -\frac{y}{r^2}$$

$$\text{ובאותו אופן נקבל } \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial y} \text{ ע"י גזירה 2 משוואות לפי } y.$$

25. אנטגרלים כפולים.

נתונה פונקציה $f(x,y)$ המוגדרת במלבן הבא במישור (x,y) (ראה באיור).



איור 25.1

נגדיר את הסמל הבא $\iint_{\alpha_1, \beta_1}^{\alpha_2, \beta_2} f(x,y) dx dy$

במובן הבא: $\int_{\beta_1}^{\beta_2} \left[\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,y) dx \right] dy$

כלומר תחילה נבצע אנטגרל על

הפונקציה $f(x,y)$ לפי משתנה x

בין הגבולות α_1 ו- α_2 , כאשר y

נלקח כקבוע.

תוצאה של אנטגרל זה היא פונקציה

של y ועליה מבצעים אנטגרל לפי משתנה

y בין הגבולות β_1 ו- β_2 .

גודל זה נקרא בשם **אנטגרל כפול**.

לדוגמה:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x^2 + 5xy - ye^{-xy}) dx dy$$

נבצע תחילה אנטגרל על x

$$\int_{-1}^1 \left\{ \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2 y}{2} - \frac{y}{(-ay)} e^{-ay} \right\}_0^1 dy =$$

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{5y}{2} + \frac{1}{a} e^{-ay} - \frac{1}{a} \right) dy =$$

$$\left(\frac{1}{3} y + \frac{5y^2}{2} - \frac{1}{a^2} e^{-ay} - \frac{1}{a} y \right)_{-1}^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{a^2} (e^{-a} - e^a) - \frac{2}{a}$$

25.1 המשמעות הגאומטרית של האנטגרל הכפול.

אם נתבונן במרחב התלת ממדי נוכל להבין את $f(x,y)$ כמשטח במרחב לכל נקודה (x,y)

מתאימה נקודה $f(x,y)$ במרחב. את הגודל $dx dy$ ניתן להבין כאלמנט שטח אינפיניטזימלי

במישור xy . ואז $f(x,y) dx dy$ הוא למעשה אלמנט נפח (ראה איור).

כפי שכבר ראינו משמעות אנטגרל הוא

סכום. הרי **האנטגרל הכפול** יהיה סכום

כל אלמנטי הנפח הללו. כלומר האנטגרל

יהיה הנפח הכלוא בין המשטח $f(x,y)$

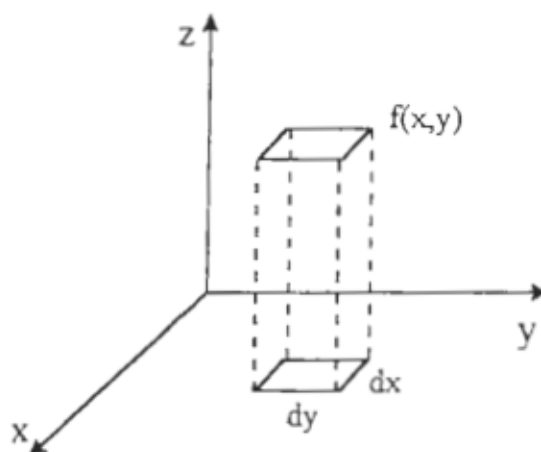
למישור xy .

בדוגמה הקודמת הסכום יעשה על כל התיבות

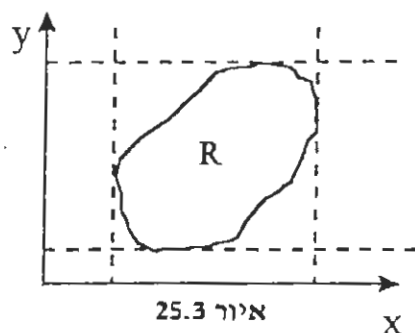
שבסיסם $dx dy$ וגבהם $f(x,y)$

הנמצאות בתוך המלבן

$y = \beta_2, y = \beta_1, x = \alpha_2, x = \alpha_1$



איור 25.2



אם נניח שבמישור x, y אנו מעוניינים בתחום R שהוא שונה ממלבן אז באופן כללי נכתוב:

$$\iint_R f(x, y) dx dy$$

אנטגרל זה יתן לנו את הנפח הכלוא בין התחום R לבין חלק המשטח ש- R הוא הסלו.

הערה: אנטגרל זה מחשב את הנפח מכיוון ששטח הבסיס של כל תיבה הוא $dx dy$ שואף לאפס. לכן ניתן לכתוב הנפח כסכום של נפחים של תיבות! נשאלת השאלה איך לתאר את הגבולות R כגבולות האנטגרציה במקרה כללי כאשר R אינו מלבן.

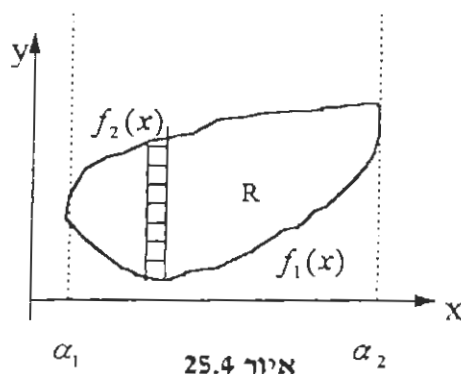
$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x, y) dx dy$$

כאשר R מלבן, כתבנו:

אנטגרל זה מסכם קודם על תיבות לאורך ציר x ואחר כך על פרוסות לאורך ציר y . או:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x, y) dy dx$$

אנטגרל זה מסכם קודם על תיבות לאורך ציר y ואחר כך על פרוסות לאורך ציר x . שני אנטגרלים אלה זהים כיון ששניהם נותנים אותו נפח. כיצד נטפל במקרה הכללי?



נקח תחילה את המקרה בו נבצע תחילה אינטגרל על y .

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

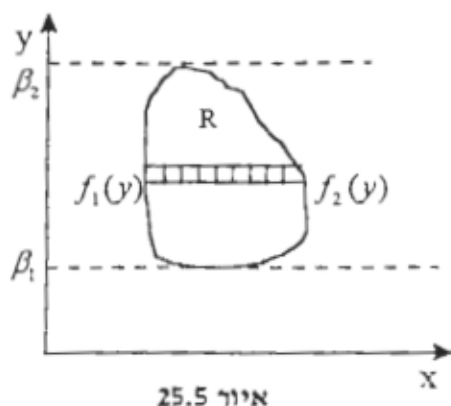
y משתנה מ $f_1(x)$ עד $f_2(x)$.

האנטגרל הראשון $\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy$

נותן פונקציה של x בלבד

ואז בודקים כיצד משתנה של x .

רואים מהאיור ש- x משתנה מ- α_1 עד α_2 .



איור 25.5

נוכל גם לבצע ונחילה את אנטגרל על x .

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} \left[\int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

ואז x משתנה מ- $f_1(y)$ ל- $f_2(y)$
ואילו y משתנה מ- β_1 ל- β_2 .

שני דרכים אלו מביאות לאותה תוצאה:
נפח הכלוא בין התחום R לבין חלק
המשטח $f(x, y)$ של R הוא הטלו.

באנטגרל הראשון מסכמים קודם על עמודות לאורך ציר y ואחר כך פרוסות לאורך ציר x . באנטגרל השני מסכמים קודם על עמודות לאורך ציר x ואחר כך על פרוסות לאורך ציר y .

הערה: נבחר את סדר האנטגרציה כך שיהיה יותר נוח. אם ניתן לכתוב את התחום

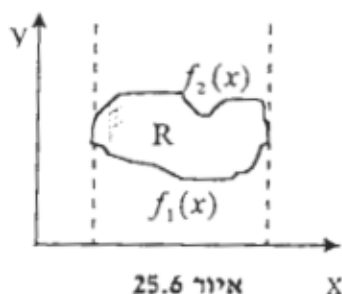
כשתי פונקציות חד ערכיות באחד הצירים (א או y) נבחר ציר זה להיות אנטגרל הראשון.

אם למשל R יהיה באופן הבא (ראה איור)
כדאי לבחור קודם את האנטגרל

על y שכן רק לאורך ציר x נוכל לכתוב את התחום בין שתי פונקציות חד ערכיות.

דוגמאות:

1) חשב את האנטגרל:



איור 25.6

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx$$

ותן לו משמעות גאומטרית.

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x dy dx = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^x dy \right] dx = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

משמעות:

נתאר R במישור xy . האנטגרל

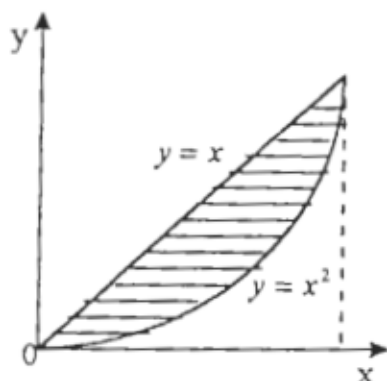
נותן את השטח בין שני הקווים.

או נפח השווה לשטח הנייל כפול יחידה,

כי ניתן לומר $f(x, y) = 1$

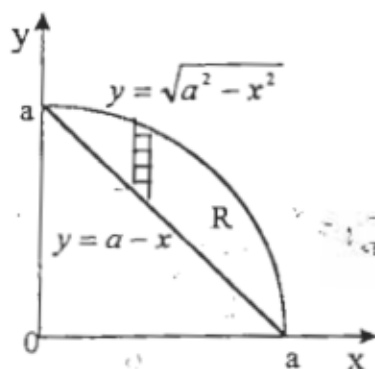
לכל x ו- y .

הערה: שטח כזה מצאנו גם בשיטה אחרת:



איור 25.7

$$\int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 (x - x^2) dx$$



איור 25.8

(2) חשב $\iint_R y dx dy$ כאשר R הוא השטח באיור.

$$\begin{aligned}\iint_R y dx dy &= \int_0^a \left(\int_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} y dy \right) dx = \\ &= \int_0^a \left(\frac{(a^2-x^2)}{2} - \frac{(a-x)^2}{2} \right) dx = \\ &= \int_0^a (ax - x^2) dx = \\ &= \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{a^3}{6}\end{aligned}$$

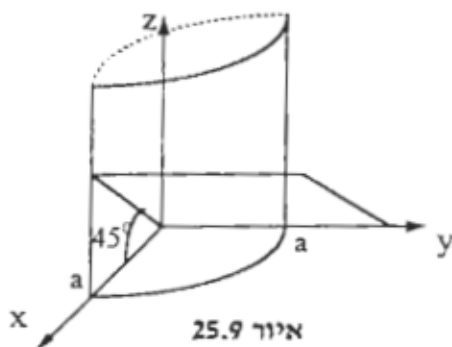
(3) חשב:

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\cos \theta} \sin \theta \rho d\rho d\theta = \int_0^{\pi} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^{\cos \theta} \sin \theta d\theta = \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \theta}{2} \sin \theta d\theta = -\frac{1}{6} \cos^3 \theta \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

(4) מצא את הנפח הנחתך מהגליל $x^2 + y^2 = a^2$ על ידי

המישורים $z=0$, $z=x$.

לא למנט שטח $dx dy$ שייך נפח $xdy dx$ ולכן ס"כ הנפח יהיה:



איור 25.9

$$\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} x dy dx = \int_0^a x 2\sqrt{a^2-x^2} dx =$$

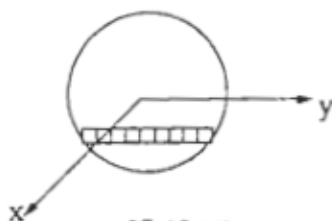
$$\sqrt{a^2-x^2} = U \quad dU = -2x dx$$

$$= -\int_{a^2}^0 dU \cdot U^{\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3} U^{\frac{3}{2}} \Big|_{a^2}^0 = \frac{3}{2} a^3$$

אפשר גם כמובן לבצע את האנטגרל קודם על x

ואח"כ על y ואז יראה האנטגרל:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} x dx dy &= \int_{-a}^a \frac{a^2-y^2}{2} dy = \left(\frac{a^2 y}{2} - \frac{y^3}{6} \right) \Big|_{-a}^a = \\ &= \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{6} + \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{6} = \frac{2}{3} a^3\end{aligned}$$



איור 25.10

(5) חשב $\iint_R dA$ (כאשר $dA = dx dy$) כאשר R הוא

השטח ברבוע הראשון החסום ע"י

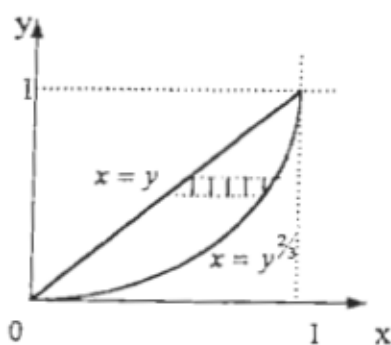
הקווים $y^2 = x^3$ והישר $y=x$.

הישר והעקומה נחתכים בנקודות: $x_2=1, y_2=1; x_1=0, y_1=0$.

נפתור בשני דרכים.

דד א':

אנטגרציה נבצע תחילה לאורך רצועה אופקית (קודם על x) מ- $x = y$ עד $x = y^{2/3}$ ואח"כ נסכם על כל הרצועות לפי y מ- $y = 0$ עד $y = 1$.

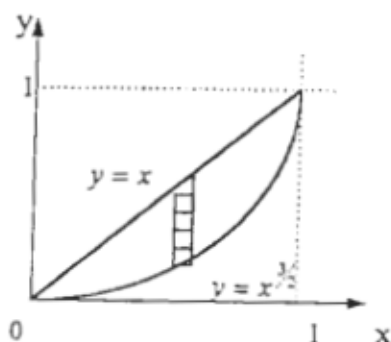


איור 25.11

$$\begin{aligned} \iint_R dA &= \int_0^1 \int_y^{y^{2/3}} dx dy = \int_0^1 (y^{2/3} - y) dy = \\ &= \left(\frac{3y^{5/3}}{5} - \frac{y^2}{2} \right)_0^1 = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

דד ב':

נבצע אנטגרל על פני רצועה אנכית תחילה (קודם על y) מ- $y = x^{3/2}$ עד $y = x$ ואח"כ על x מ- 0 עד 1 .



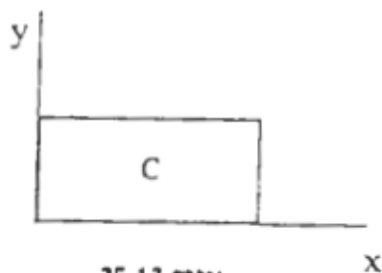
איור 25.12

$$\begin{aligned} \iint_R dA &= \int_0^1 \int_{x^{3/2}}^x dy dx = \int_0^1 (x - x^{3/2}) dx = \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^{5/2}}{5} \right)_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

דוגמאות פיזיקליות:

מרכז המסה: מרכז כובד של גוף מישורי בעל מסה אחידה נקבע על פי נוסחה:

$$\bar{y} = \frac{\iint_R y dA}{\iint_R dA} \quad \bar{x} = \frac{\iint_R x dA}{\iint_R dA}$$



איור 25.13

הסבר: $\bar{x} = \frac{\sum x dm}{\sum dm} = \frac{\int x dm}{\int dm}$ ואם נציב $dm = \rho dA$

ונניח ρ קבוע נקבל הנוסחה הנ"ל.

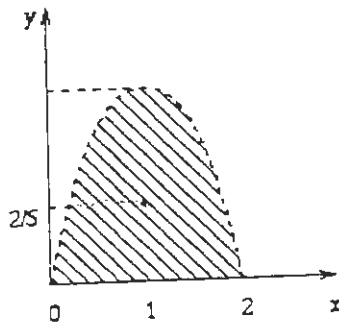
מרכז הכובד הוא אותה נקודה שאפשר לראות בה את כל המסה מרוכזת ונותנת אותו מומנט כמו רצף המסה (ראה איור). בעזרת האנטגרל הכפול נוכל למצוא את מרכזי מסה של גופים שאינם סימטריים.

1) מצא את מרכז המסה של השטח המישורי המוגבל ע"י

הפרבולה: $y = 2x - x^2$ וציר ה- x .

ברור שמבחינה סימטרית ש- $\bar{x}$ יהיה 1 .

נחשב:



איור 25.14

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x dA}{\iint_R dA} = \frac{\int_0^2 \int_0^{2x-x^2} x dy dx}{\int_0^2 \int_0^{2x-x^2} dy dx} = \frac{\int_0^2 x(2x-x^2) dx}{\int_0^2 (2x-x^2) dx}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^2 (2x^2 - x^3) dx}{\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)_0^2} = \frac{\left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)_0^2}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{16}{3} - 4}{\frac{4}{3}} = 1$$

נחשב את $\bar{y}$:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{\iint_R y dA}{\iint_R dA} = \frac{\int_0^2 \int_0^{2x-x^2} y dy dx}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \int_0^2 \frac{(2x-x^2)^2}{2} dx = \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{10} \right)_0^2 = \frac{3}{4} \left(\frac{16}{3} - 8 + \frac{32}{10} \right) = \frac{2}{5} \\ \bar{y} &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

מרכז הכובד בציר y הוא:

נקודת מרכז הכובד היא איפה: $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, \frac{2}{5})$.

מומנט התמדה: נראה עתה כיצד מחשבים מומנט התמדה של שטחים מישוריים. מומנט התמדה ביחס לציר x מוגדר ע"י סכום של מכפלת כל אלמנט מסה Δm_i ברבוע המרחק מציר x , y_i^2 :

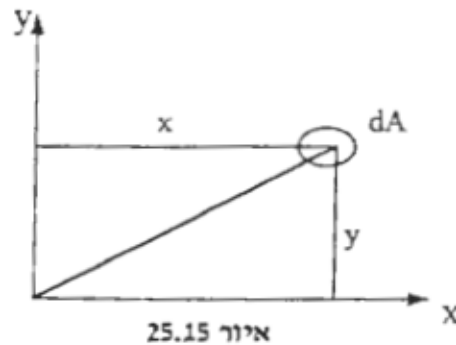
$$I_x = \sum_i y_i^2 \Delta m_i$$

במסה רציפה נקבל בכתיבת אנטגרלית:

$$I_x = \int y^2 dm = \int \rho y^2 dA \quad (\underline{dm = \rho dA})$$

משוואה

אם נניח ρ קבוע $= 1$ נקבל:



איור 25.15

$$I_x = \iint_R y^2 dA \quad \text{ביחס לציר } x$$

באותו אופן מומנט ההתמדה ביחס לציר y יהיה:

$$I_y = \iint_R x^2 dA \quad \text{ביחס לציר } y$$

דוגמה: מצא מומנט ההתמדה

של דיסקית שרדיוסה a ביחס לציר x וביחס לציר y העובר בראשית ונצב לדיסקית.

משוואת המעגל: $x^2 + y^2 = a^2$

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_R y^2 dA = \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2 dy dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_{-a}^a 2(a^2 - x^2)^{3/2} dx \end{aligned}$$

נציב:

$$x = a \sin \theta$$

$$dx = a \cos \theta d\theta$$

$$I_x = \frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2a^4 \cos^3 \theta \cos \theta d\theta \quad \text{ונקבל:}$$

נחשב $\int \cos^4 x dx$

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x dx &= \int \frac{(1 + \cos 2x)^2}{4} dx = \frac{1}{4} \left[\int dx + 2 \int \cos 2x dx + \int \cos^2 2x dx \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left[x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) dx \right] = \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{8} x + \frac{\sin 4x}{32} \end{aligned}$$

$$I_x = \frac{2}{3} a^4 \left(\frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi \cdot a^4}{4}$$

תוצאה שודאי נפגשתם כבר בפיסיקה.

דרך זו היא מסובכת למדי בהמשך נראה דרך קלה ביותר להגיע לאותה תוצאה.

נחשב עתה את מומנט ההתמדה ביחס לציר העובר דרך הראשית:

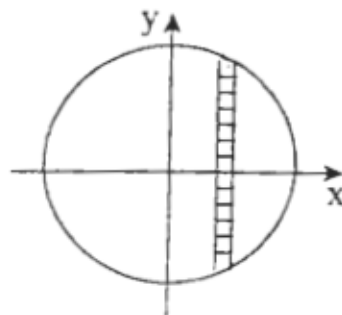
$$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2) dA = \iint_R (x^2 + y^2) dx dy = I_x + I_y$$

$$I_y = I_x$$

אבל מסימטריה

ולכן

$$I_0 = 2I_x = \frac{2\pi a^4}{4} = \frac{\pi a^4}{2}$$

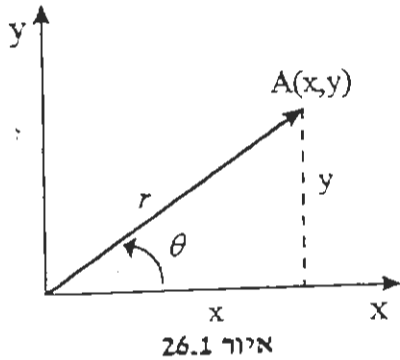


איור 25.16

26. יעקוביאן

26.1 קואורדינטות פולריות

בהרבה מקרים מערכת הצירים הקרטזית (ישרת הזווית) אינה יעילה בחישוב אינטגרל כפול. צורת המשטח שעליו מבצעים את האינטגרציה תציע לנו את מערכת הקואורדינטות הרצויה לפתרון הבעיה.



דוגמה מאוד פשוטה למערכת צירים אחרת היא המערכת הפולרית (ראה איור 26.1). נתונה נקודה $A = (x, y)$ נציין את מרחק הנקודה מהראשית ב- r ואת הזווית ב- r יוצר עם כוון x חיובי ב- θ .

נוכל לומר שכל נקודה במישור ניתנת לקביעה ע"י r ו- θ ולהפך כל r ו- θ קובעים נקודה במישור. זאת אומרת הזוג (r, θ) קובע באופן חד משמעי את הנקודה בה מדובר ונותן אותה אינפורמציה כמו הזוג (x, y) בו השתמשנו עד כה.

הזוג (r, θ) נקרא בשם **קואורדינטות פולריות**. נראה עתה מה הקשר בין הקואורדינטות הפולריות לקואורדינטות הקרטזיות.

מהאיור הנ"ל (איור 26.1) ברור כי:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

ולהפך:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctg \frac{y}{x} \end{cases}$$

המטרה שלנו עתה תהיה ללמוד איך לעבור מאינטגרל על x ו- y לאינטגרל על r ו- θ . **למשל** נתון האינטגרל:

$$\iint_R f(x, y) dA$$

כדי לעבור למשתנה אחר יש להציב במקום $x = r \cos \theta$ ובמקום $y = r \sin \theta$ ונקבל פונקציה $f(r, \theta)$. אולם הבעיה היא כיצד ישתנה $dA = dx dy$ במעבר לקואורדינטות החדשות. נביא נוסחה (ללא הוכחה):

$$dA = \left(\frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial r} \right) dr d\theta$$

א"כ אצלנו נוכל לחשב:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta$$

$$dA = (r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta) dr d\theta = \underline{r dr d\theta}$$

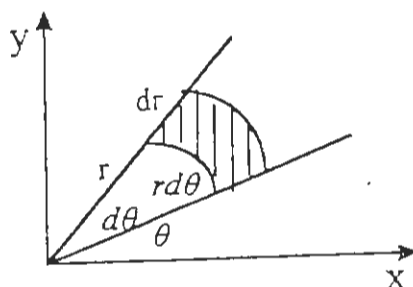
כלומר אלמנט השטח במערכת הפולרית ניתנת ע"י $r dr d\theta$. נבדוק את המשמעות הנאומטרית, ונצדיק את התוצאה:

נתבונן באיור: $rd\theta$ זה אורך הקשת ולכן

$$\text{אלמנט שטח} = rd\theta \cdot dr = dA$$

נוהגים לכתוב את הביטוי הנ"ל בצורה אחרת.

$$\text{הסמל} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \text{ נקרא בשם } \underline{\text{דטרמיננטה}}$$



איור 26.2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

ומשמעותו

לק כותבים בעזרת סמל זה את dA

$$dA = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} dr d\theta$$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \quad \text{הגודל מסומן גם באופן הבא:}$$

ולכן נוכל לכתוב את המשוואה הבאה:

$$\iint_R f(x,y) dx dy \rightarrow \iint_R f(\theta,r) \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} dr d\theta$$

אנטגרל לפי x ו- y עובר לאנטגרל לפי θ ו- r . כמוכן שהגבולות גם ישתנו בהתאם.נפתור עתה את הדוגמה שפתרנו קודם עבור מומנט התמדה של דסקית שרדיוסה a .

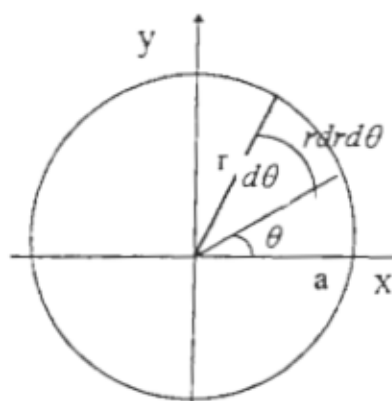
$$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2) dx dy =$$

נציב:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$dx dy = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} dr d\theta = r dr d\theta$$



איור 26.3

$$I_0 = \iint_R (r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) r dr d\theta$$

כדי לבצע אנטגרציה על כל העגול אזי r משתנה מ-0 ל- a ואילו θ מ-0 ל- 2π

(ראה איור 26.3) כלומר:

$$I_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^a r^3 dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{a^4}{4} d\theta = \frac{2\pi a^4}{4} = \frac{\pi a^4}{2}$$

אנו רואים איפוא הפשטות בפתרון הבעיה במערכת פולרית.

מן הראוי לציין באופן כללי יותר אם עוברים

מקוארדינטות (x,y) לקוארדינטות (u,v)

אזי:

$$\iint_R f(x,y) dx dy \rightarrow \iint_R f(u,v) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du dv$$

כאשר:

$$\text{JACOBIAN} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

דוגמאות:

(1) חשב:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

אנטגרל זה לא ניתן לבצע בקואורדינטות קרטזיות x ו- y . אם נעבור לקואורדינטות פולריות,

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$dx dy = J dr d\theta$$

נקבל:

(ייקוביאן - J)

כאשר:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial r} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

לכן

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta$$

נחשב הגבולות: האנטגרל על כל רבע המישור (x, y) החיובי, כלומר θ בין 0 ל- $\frac{\pi}{2}$ ובין 0 ל- ∞ .

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^\infty d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-y^2} e^{-x^2} dx dy = \int_0^\infty e^{-y^2} \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right) dy$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx \cdot \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}} \quad (26.1) \quad \text{מכאן תוצאה חשובה:}$$

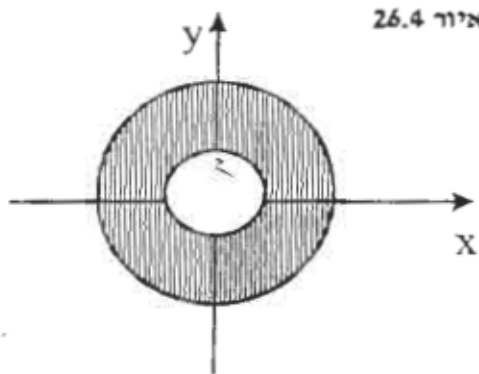
שים לב: לא ניתן היה לחשב אינטגרל זה באופן ישיר אלא בעזרת האנטגרל הכפול ובעזרת קואורדינטות פולריות.

הערה: כאשר האינטגרל הוא על כל המישור כלומר: $\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ נקבל $\int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta = \pi$.
זה נובע גם מכך שהנפח בכל המישור הוא פי 4 מהנפח ברביע הראשון.

(2) חשב

$$\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

כאשר R הוא התחום החסום בין המעלים $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 4$ במקרה זה כיון שהמשטח מעגלי כדאי לעבור לקואורדינטות פולריות,

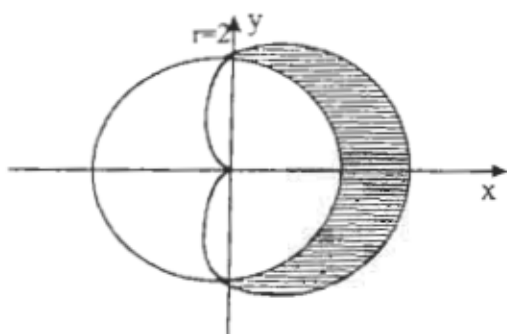


איור 26.4

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= r \\ J &= r \\ dx dy &\Rightarrow r dr d\theta \end{aligned}$$

$$\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_2^3 r \cdot r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3} \right]_2^3 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{19}{3} d\theta = \frac{19}{3} \cdot 2\pi = \frac{38\pi}{3}$$

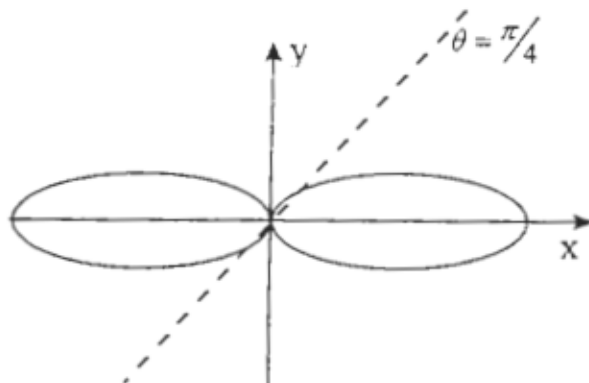
(3) מצא את השטח מחוץ למעגל $r = 2$ ובתוך הקו $r = 2(1 + \cos \theta)$. השטח הדרוש הוא השטח המקווקו.



איור 26.5

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_2^{2(1+\cos \theta)} r dr d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_2^{2(1+\cos \theta)} d\theta = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos \theta + \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= 4 \left(2\sin \theta + \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi + 8 \end{aligned}$$

(4) מצא את השטח התחום במישור xy החסום ע"י הקו $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$. אם נציב עבור θ ערכים שונים נקבל את איור הבא:



איור 26.6

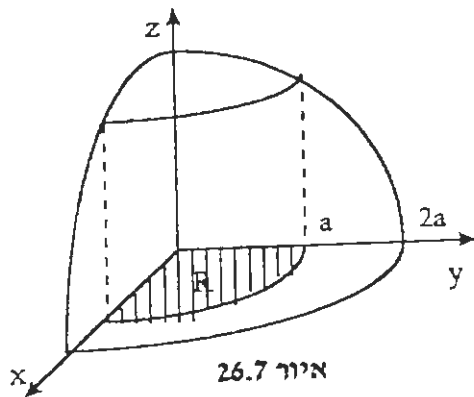
קו זה נקרא למיניסקטה. בתרגיל זה נתון העקום בקואורדינטות גליליות. השטח המבוקש יהיה:

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \rho d\rho d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2 \cos 2\theta}{2} d\theta = \\ &= 2a^2 \frac{\sin 2\theta}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2 \end{aligned}$$

הפקטור 4 לפני האנטגרל נובע מכך שהאנטגרל נותן את השטח ברבע הראשון ובכל 4 הרביעים יש אותו שטח.

(5) נפח כדור

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$



$$\begin{aligned} 2 \iint_R \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr d\theta = \\ &= -2 \int_0^{2\pi} \int_0^a U^{1/2} dU d\theta = 2 \cdot \frac{a^3 2\pi}{3} = \frac{4\pi a^3}{3} \end{aligned}$$

זוהי הנוסחה הידוע לנפח הכדור!

(6) מצא את הנפח הנחתך מהכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$
ע"י הגליל $x^2 + y^2 = a^2$

$$2 \iint_R (4a^2 - x^2 - y^2)^{1/2} dx dy$$

כאשר R הוא שטח באיור.
אם נעבור לקואורדינטות פולריות

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

נקבל:

$$2 \int_0^{2\pi} \int_0^a (4a^2 - r^2)^{1/2} r dr d\theta$$

הפקטור 2 נובע מכך שהאנטגרל נותן רק את הנפח העליון $z > 0$ ועבור $z < 0$ יש אותו נפח.
אם נציב:

$$u = 4a^2 - r^2$$

$$du = -2r dr ;$$

$$r = 0 \Rightarrow u = 4a^2 ; r = a \Rightarrow u = 3a^2$$

ונחשב את הגבולות החדשים:

ולכן האנטגרל במשתנה u יהיה:

$$2 \int_0^{2\pi} \int_{4a^2}^{3a^2} u^{1/2} \frac{du}{(-2)} d\theta = - \int_0^{2\pi} 2 \frac{u^{3/2}}{3} \Big|_{4a^2}^{3a^2} d\theta = - \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} ((3a^2)^{3/2} - 8a^3) d\theta = \frac{4}{3} \pi (8 - 3\sqrt{3}) a^3$$

שים לב: שהמחובר הראשון הוא נפח כל הכדור והשני הוא החלק החלק שארד מנפח זה.
אפשר גם לבצע את האנטגרל הקודם לפי θ ואחר כך לפי r .

$$V = 2 \int_0^a \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 - r^2} r d\theta dr = 2 \int_0^a 2\pi \sqrt{4a^2 - r^2} r dr = \frac{4}{3} \pi (8 - 3\sqrt{3}) a^3$$

27. אנטגרלים משולשים.

המקרה של אנטגרלים משולשים דומה לאנטגרלים כפולים. אנטרל משולש נכתב

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \left[\int_{\beta_1}^{\beta_2} \left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(x, y, z) dx \right) dy \right] dz \quad \text{ומשמעותו:} \quad \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(x, y, z) dx dy dz$$

כלומר, מבצעים קודם האנטגרל על x כאשר y ו- z קבועים ומקבלים פונקציה שאינה תלויה ב- x .

אחר כך מבצעים אנטגרל על y כאשר z קבוע ומקבלים פונקציה שאינה תלויה ב- x וב- y .

לבסוף מבצעים אנטגרל על z . כמובן שהסדר גם יכול להשתנות.

דוגמה:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-x} xyz dz dy dx &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left\{ \int_0^{2-x} xyz dz \right\} dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \frac{xy(2-x)^2}{2} dy \right] dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x(1-x)^2(2-x)^2}{4} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 (x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 12x^2 + 4x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{6} - \frac{6}{5} + \frac{13}{4} - \frac{12}{3} + \frac{4}{2} \right) = \frac{13}{240} \end{aligned}$$

27.1 משמעות האנטגרל המשולש:

$dx dy dz$ הוא אלמנט נפח במרחב התלת ממדי. אלמנט הנפח הזה מוכפל $\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz$

בפונקציה $f(x, y, z)$ והאנטגרל מבצע סכום המכפלות על פני כל אלמנט הנפח בחלק המרחב R .

אם $f(x, y, z) = 1$ מחשבים: $\iiint_R dx dy dz$

ומשמעותו: הנפח ע"י החסום R .

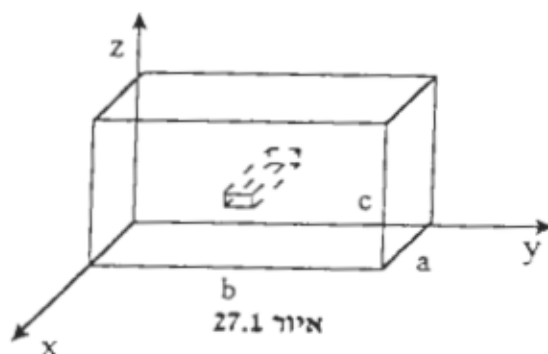
דוגמה: אם R הוא תיבה (a, b, c) אז:

שים לב: אפשר לבצע נפח זה ע"י אנטגרל דו ממדי: נפח התיבת יהיה:

$$V = \int_0^b \int_0^a \int_0^c dx dy dz = a \cdot b \cdot c$$

דוגמה: חשב את האנטגרל

$$\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz$$



כאשר R נפח התיבה הנ"ל והפונקציה $f(x, y, z)$ היא

$$f(x, y, z) = x^2 - 2xy + z^2 \quad \text{נכתוב:}$$

$$\begin{aligned} \int_0^c \int_0^b \int_0^a (x^2 - 2xy + z^2) dx dy dz &= \int_0^c \int_0^b \left(\frac{a^3}{3} - \frac{2a^2 y}{2} + z^2 a \right) dy dz = \\ \int_0^c \left(\frac{a^3 b}{3} - \frac{a^2 b^2}{2} + z^2 ab \right) dz &= \frac{a^3 bc}{3} - \frac{a^2 b^2 c}{2} + \frac{c^3 ab}{3} \end{aligned}$$

כמוכן שבמקרה זה שנוי הסדר באנטגרל לא היה משנה את התוצאה. משמעות אנטרל זה יכול להיות מסה של התיבה כאשר הצפיפות ניתנת ע"י $f(x, y, z)$.

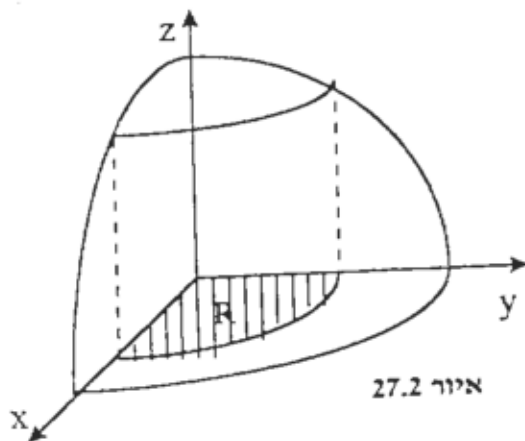
דוגמה:

איך היינו מבצעים באנטגרל משולש את הדוגמה שעשינו קודם:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2 \quad \text{יש למצא את הנפח הנחתך מהכדור:}$$

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{ע"י הגליל}$$

$$\iiint_R dz dy dx = \int_0^a \int_0^{(a^2-x^2)^{1/2}} \int_{-(4a^2-x^2-y^2)^{1/2}}^{(4a^2-x^2-y^2)^{1/2}} dz dy dx = \int_0^a \int_0^{(a^2-x^2)^{1/2}} (4a^2 - x^2 - y^2)^{1/2} dy dx$$



כלומר יש לנו כאן שלב מוקדם יותר מהאנטגרל

שבצענו קודם. את המשך חשוב האנטגרל

מבצעים כמו קודם.

היתרון בשיטה זו הוא שבאנטגרלים

משולשים ניתן לבצע גם אנטגרלים שאי אפשר

לבצע בדרך ממדיים.

במיוחד אנטגרלים תלת ממדיים המוכפלים

בפונקציה $f(x, y, z)$.

דוגמה: חשב את האנטגרל:

$$\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

כאשר R הוא הנפח התלת ממדי החסום ע"י

ארבעת המישורים:

$$x + y + z = a > 0 \quad z = 0, y = 0, x = 0$$

נתאר את הנפח הנ"ל בצורה גאומטרית כדי להבין את הגבולות (ראה איור 27.3).

נכתוב את האנטגרל:

$$\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx$$

z משתנה מ-0 עד ל- $z = a - x - y$ שזה המישור החותך את הצירים.

מבצעים אנטגרציה על z ומקבלים את אלמנט

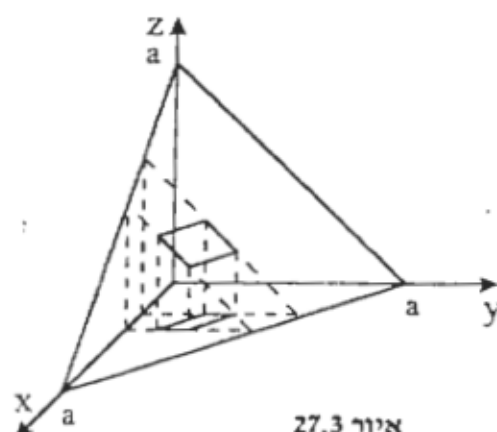
הנפח שבאיור. אח"כ מבצעים אנטגרל על y .

y - משתנה מ-0 עד משוואת הקו $y + x = a$

כלומר $y = a - x$. ואח"כ מבצעים אנטגרל

על x מ-0 עד a ומקבלים את כל הנפח.

שים לב: שאנטגרל כזה לא ניתן לבצע בעזרת אנטרל דו ממדי.



איור 27.3

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^{a-x} \int_0^{a-x-y} (x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx &= \\ = \int_0^a \int_0^{a-x} \left(x^2 z + y^2 z + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^{a-x-y} dy dx &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^a \int_0^{a-x} \left[x^2(a-x-y) + y^2(a-x-y) + \frac{(a-x-y)^3}{3} \right] dy dx = \\ &= \int_0^a \int_0^{a-x} \left[x^2(a-x) - x^2 y + y^2(a-x) - y^3 + \frac{(a-x-y)^3}{3} \right] dy dx = \\ &= \int_0^a \left(x^2(a-x)y - \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{y^3}{3}(a-x) - \frac{y^4}{4} - \frac{(a-x-y)^4}{12} \right) \Big|_0^{a-x} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^a \left(x^2(a-x)^2 - \frac{x^2(a-x)^2}{2} + \frac{(a-x)^4}{3} - \frac{(a-x)^4}{4} + \frac{(a-x)^4}{12} \right) dx = \\ &= \int_0^a \left(\frac{x^2(a-x)^2}{2} + \frac{(a-x)^4}{6} \right) dx = \frac{a^5}{20} \end{aligned}$$

28. קואורדינטות גליליות.

כאשר יש צורך לבצע אינטגרל $\iiint_R f(x,y,z) dx dy dz$ ו- R הוא נפח של גליל למשל: $x^2 + y^2 = a^2$

שגבחו b הרי צריך לבצע את האינטגרל הבא:

$$\int_0^b \int_{-a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y,z) dx dy dz$$

במקרה כזה האינטגרלים הופכים למסובכים ביותר. ולכן כדאי לעבור

למערכת צירים אחרת המקלה על החישובים.

במקרה זה כדאי לעבור למערכת הצירים הגלילית.

נתבונן באיור 28.1 על נקודה $P(x, y, z)$. נוכל לומר

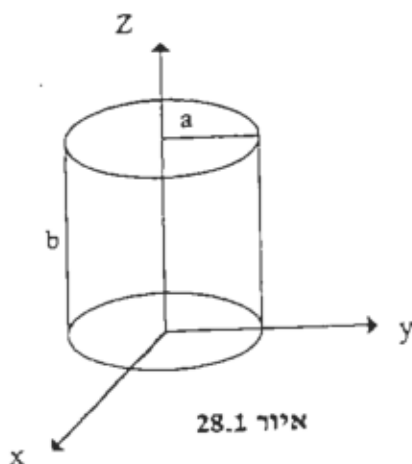
כל נקודה במרחב במקום ע"י x, y, z

ע"י שלשה הערכים הבאים r, θ, z . ו- r ו- θ נותנים

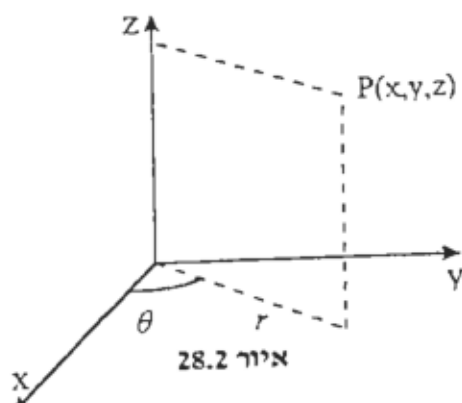
את מקום הנקודה במישור x, y ו- z ייתן את גובהה

מעל מישור $z = 0$. הקשר בין הקואורדינטות

x, y, z לקואורדינטות החדשות יהיה:



איור 28.1



איור 28.2

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta \quad \theta = \arctg \frac{y}{x}$$

$$z = z \quad z = z$$

שים לב: שקואורדינטות אלו הם כמו קואורדינטות

פולריות רק נוסף ציר z . קואורדינטות אלו נוחות

במיוחד לשמוש במערכות גליליות. המעבר

מקואורדינטות לקואורדינטות צריך להעשות

בעזרת היקוביין J אלא שכאן התמונה תהיה

שונה במקצת. נגדיר דטרמיננטה של 3×3

באופן הבא:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

המעבר מאלמנט נפח $dx dy dz$ לאלמנט נפח תלת ממדי בקואורדינטות r, θ, z יהיה ע"י הנוסחה:

$$dV = J dr d\theta dz = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} dr d\theta dz$$

כאשר:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \cos \theta \begin{vmatrix} r \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \sin \theta \begin{vmatrix} -r \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -r \sin \theta & r \cos \theta \\ 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

מקבלים איטא :

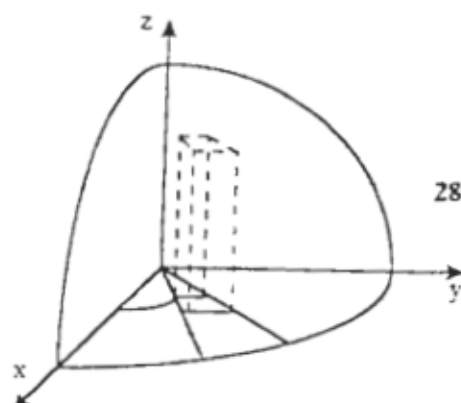
$$dx dy dz \rightarrow r dr d\theta dz$$

כלומר היקוביין כמו במערכת פולרית. אמנם $r d\theta dr$ זה אלמנט שטח וכאשר הוא מוכפל ב- dz הוא נותן אלמנט נפח.

מכאן:

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dz dy dx \Rightarrow \iiint_{(V)} f(r, \theta, z) r dz dr d\theta =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\eta(\theta)}^{\zeta_2(\theta)} \int_{\zeta_1(\theta)}^{\zeta_2(\theta)} f(r, \theta, z) r dz dr d\theta$$



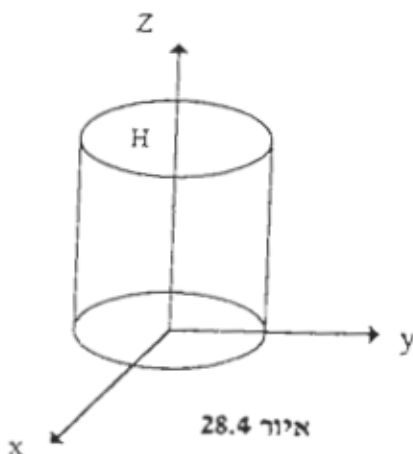
איור 28.3

האנטגרציה הראשונה על z מחברת אלמנטי נפח לעמוד נפח במקום r ו- θ . האנטגרציה השנייה על r מחברת העמודים לפרוסה. והאנטגרציה השלישית מחברת את הפרוסות לכל הנפח.

דוגמאות:

(1) חשב את מומנט ההתמדה של גליל ביחס לציר z :

$$I_0 = \rho \iiint_R (x^2 + y^2) dx dy dz$$



איור 28.4

$$I_0 = \rho \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^a (r^2) r dz dr d\theta =$$

$$= H \cdot \rho \int_0^{2\pi} \int_0^a r^3 dr d\theta = \frac{\rho a^4}{4} \cdot H \cdot 2\pi =$$

$$= \rho \pi a^2 H \frac{a^2}{2} = \frac{Ma^2}{2}$$

(2) חשב את מסתו של חרוט שגובהו 4 יחידות ורדיוסו 2 כאשר ידוע שצפיפותו פרופורציונית למרחק מקודקדו. משואת החרוט היא:

$$z = 2r = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

מרחק נקודה מה קודקוד:

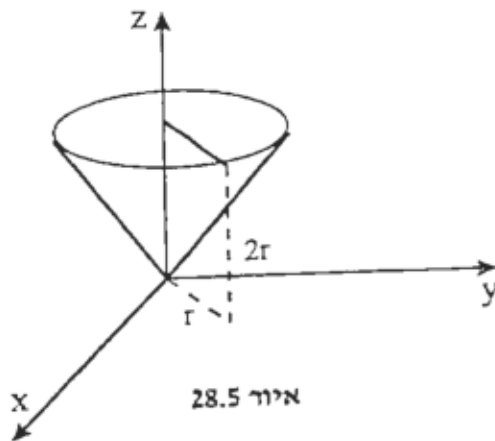
$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$\rho = k\sqrt{r^2 + z^2}$$

צפיפות החרוט:

ולכן מסת הגוף תהיה:

$$\begin{aligned} M &= k \iiint \sqrt{r^2 + z^2} dV = \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^4 \int_0^{2r} \sqrt{r^2 + z^2} r dz dr d\theta = \\ &= k \int_0^{2\pi} \int_0^4 \int_0^{\frac{z}{2}} \sqrt{r^2 + z^2} r dr dz d\theta \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{z}{2}} \sqrt{r^2 + z^2} r dr &= \frac{1}{2} \int_z^{\frac{5}{4}z^2} u^{\frac{1}{2}} du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \bigg|_z^{\frac{5}{4}z^2} = \\ &= \frac{5^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}} z^{\frac{3}{2}} - \frac{z^{\frac{3}{2}}}{3} \end{aligned}$$

נציב $u = r^2 + z^2$ $du = 2r dr$

$$\begin{aligned} M &= k \int_0^{2\pi} \int_0^4 \left(\frac{5^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{3} \right) z^{\frac{3}{2}} dz d\theta = \\ &= k \int_0^{2\pi} \left(\frac{5^{\frac{3}{2}}}{24} - \frac{1}{3} \right) \frac{4^4}{4} d\theta = \frac{128\pi k}{3} \left(\frac{5^{\frac{3}{2}}}{8} - 1 \right) \end{aligned}$$

28.1 קואורדינטות כדוריות

המערכת הקודמת טובה במקרים בהם הבעיות מתוארות ע"י גלילים או חרוטים במרחב. כאשר הגופים הגאומטריים הם כדורים או חלקי כדור רצוי לעבור למערכת קואורדינטות כדוריות.

נקבע את מקומה של נקודה במרחב לפי 3 גדולים הבאים: ρ , θ ו- φ .

ρ - מרחק מהראשית

θ - הזווית בין הטל

ρ (r) לבין לציר x.

φ - הזווית שבין

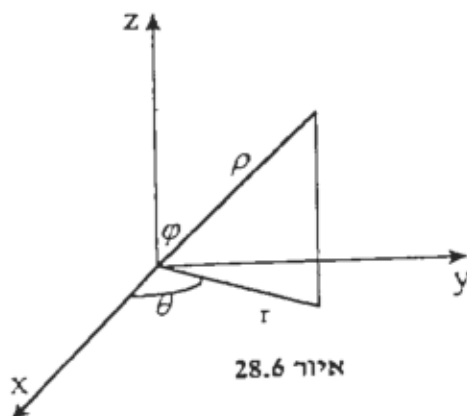
ציר z ל- ρ .

נבדוק מה הקשר בין

קואורדינטות אלו לבין הקואורדינטות

הקרטיזיות והקואורדינטות הגליליות.

נתחיל בגלילות (r, θ, z)



מתמטיקה לפיזיקאים

$$r = \rho \sin \varphi$$

$$z = \rho \cos \varphi$$

$$\theta = \theta$$

$$\rho^2 = r^2 + z^2$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{r}{z}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{r}{z}$$

הקשר ההפוך

נעבור עתה לקרטזיות: (x, y, z)

מתמטיקה לפיזיקאים

$$x = (\rho \sin \varphi) \cos \theta$$

$$y = (\rho \sin \varphi) \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \varphi$$

הקשר ההפוך:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \varphi = \\ &= \rho^2 \sin^2 \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \rho^2 \cos^2 \varphi = \rho^2 \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi = \rho^2 \end{aligned}$$

$$\theta = \arctg \frac{y}{x}$$

$$\varphi = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

המעבר מקואורדינטות לקואורדינטות צריך לעשות בעזרת היקוביין

$$dV = dx dy dz = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} d\rho d\theta d\varphi$$

כלומר:

נחשב J:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi \\ \rho \cos \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta & -\rho \sin \varphi \\ -\rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \sin \varphi \cos \theta \begin{vmatrix} \rho \cos \varphi \sin \theta & -\rho \sin \varphi \\ \rho \sin \varphi \cos \theta & 0 \end{vmatrix} - \sin \varphi \sin \theta \begin{vmatrix} \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \\ -\rho \sin \varphi \sin \theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \cos \varphi \begin{vmatrix} \rho \cos \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \\ -\rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \end{vmatrix} = \sin \varphi \cos \theta (\rho^2 \sin^2 \varphi \cos \theta) +$$

$$\begin{aligned} &+ \sin \varphi \sin \theta (\rho^2 \sin^2 \varphi \sin \theta) + \cos \varphi (\rho^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \sin \varphi \cos \varphi \cos^2 \theta) = \\ &= \rho^2 \sin^3 \varphi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^3 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi \cos^2 \theta = \end{aligned}$$

$$= \rho^2 \sin^3 \varphi + \rho^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi = \rho^2 \sin \varphi$$

$$V = \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi$$

כלומר אלמנט הנפח בקואורדינטות כדוריות הינו

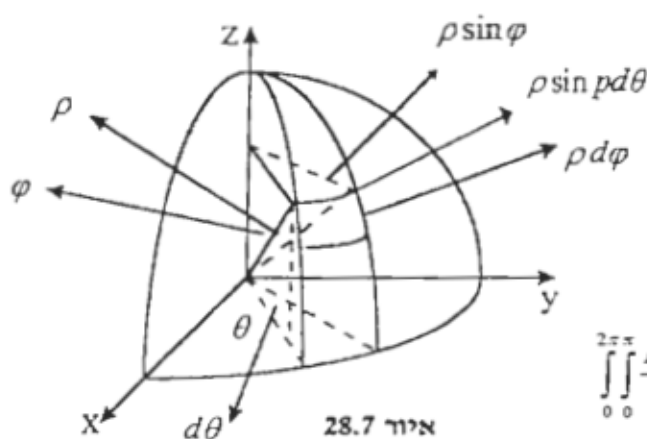
והמעבר הוא: $dx dy dz \rightarrow \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi$

אלמנט שטח במעטפה כדורית:

$$\Delta S = \rho \sin \varphi d\theta d\varphi$$

$$dV = \Delta S d\rho = \rho^2 \sin \varphi d\theta d\varphi d\rho$$

אלמנט נפח:



דוגמאות:

(1) מצא את הנפח של כדור שרדיוסו R.

$$\iiint_{(V)} dV = \iiint_{(V)} \rho^2 \sin \phi d\theta d\phi d\rho =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{R^3}{3} \sin \phi d\phi d\theta = -\frac{R^3}{3} \int_0^{2\pi} \cos \phi \Big|_0^\pi d\theta =$$

$$= \frac{2R^3}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4\pi R^3}{3}$$

באופן כללי אנטגרל על כדור שרדיוסו R יהיה:

$$\iiint_{(V)} F(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R F(\rho, \theta, \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

(2) מצא את מומנט ההתמדה של כדור בעל רדיוס a ביחס לקוטר כאשר צפיפות המסה של כל נקודה בכדור פרופורציונית למרחק הנקודה ממרכז הכדור. בקואורדינטות כדוריות משוואת הכדור היא: $\rho = a$

נחלק המסה לאלמנטים dM בעלי נפח dV .נוכל לכתוב $dM = k_f dV$ מומנט ההתמדה יהיה:

$$I = \iiint (\rho \sin \phi)^2 k_f dV$$

$$dV = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

אלמנט הנפח:
ולכן נקבל

$$I = k \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a \rho^2 \sin^2 \phi \rho d\rho d\phi d\theta =$$

$$= k \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho^3 \sin^3 \phi d\phi d\theta = \frac{ka^6}{6} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \phi d\phi d\theta =$$

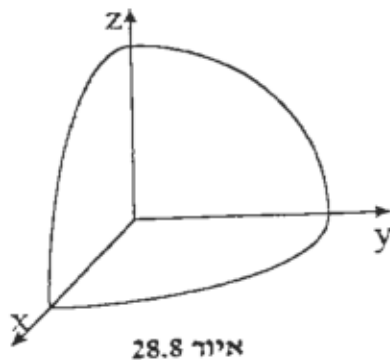
$$= \frac{ka^6}{6} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \phi) \sin \phi d\phi d\theta = \frac{ka^6}{6} \frac{4}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4}{9} \pi ka^6$$

כי:

$$\int_0^\pi (1 - \cos^2 \phi) \sin \phi d\phi = \int_1^{-1} (1 - u^2) du = \left(-u + \frac{u^3}{3} \right) \Big|_1^{-1} = \frac{4}{3}$$

אם צפיפות המסה קבועה נקבל במקום $\frac{a^5}{5}, \frac{a^6}{6}$ כלומר

$$I = \frac{8}{15} a^5 \pi \rho = \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{2}{5} a^2 = \frac{2Ma^2}{5}$$



(3) מצא את קואורדינטות מרכז המסה של חצי כדור החסום בין $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ בעל צפיפות אחידה ρ_0 . בגלל סימטריה $\bar{x} = 0$ $\bar{y} = 0$ נחשב את $\bar{z}$.

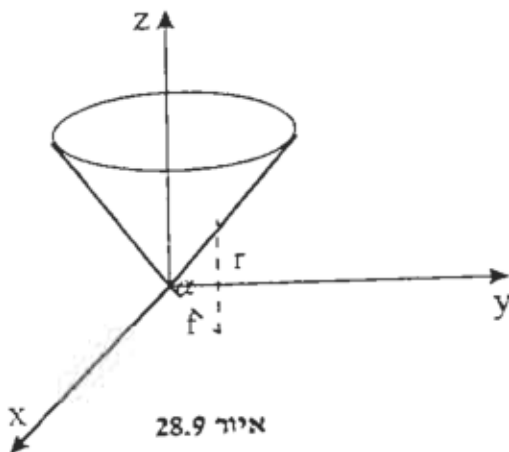
$$I = \iiint (\rho \sin \varphi)^2 k \rho dV$$

$$\bar{z} = \frac{\rho_0 \iiint_{(V)} z dx dy dz}{\rho_0 \iiint_{(V)} dx dy dz} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho \cos \varphi \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta}{\frac{2\pi R^3}{3}} =$$

$$= \frac{3 \frac{R^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi d\theta}{2\pi R^3} = \frac{\frac{3}{8} R^3 2\pi}{2\pi R^2} = \frac{3}{8} R$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \int_0^1 u du = \frac{1}{2}$$

נקבל $\sin \varphi = u$ $\cos \varphi d\varphi = du$ כי אם נציב



$$(4) \text{ חשב } \iiint_{(V)} e^{-z(x^2+y^2+z^2)} dx dy dz$$

כאשר V חרוט $z^2 = x^2 + y^2$ וגובהו אינסופי.

בקואורדינטות כדוריות נקבל:

$$z^2 = r^2 \Rightarrow z = r$$

ולכן הזווית $\alpha = 45^\circ$.

נחשב האינטגרל על ρ :

$$\int_0^\infty e^{-\rho^3 \cos \varphi} \rho^2 d\rho = \frac{1}{3} \int_0^\infty e^{-u \cos \varphi} du = -\frac{1}{3 \cos \varphi} e^{-u \cos \varphi} \Big|_0^\infty = \frac{1}{3 \cos \varphi}$$

כאשר הצבנו:

$$u = \rho^3$$

$$du = 3\rho^2 d\rho$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^\infty e^{-\rho^3 \cos \varphi} \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} d\varphi d\theta = -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{u} d\theta$$

כאשר הצבנו:

$$\cos \varphi = u$$

$$-\sin \varphi d\varphi = du$$

$$-\frac{2}{3}\pi \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{2}{3}\pi \ln 2^{-1/2} = \frac{1}{3}\pi \ln 2$$

$$\text{7 חשב } \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy e^{y/(x+y)}$$

הכוונה קודם לבצע אינטגרל על y כאשר x קבוע אח"כ על x . קשה לבצע אינטגרל זה באופן ישיר ולכן נעבוק בו כאינטגרל על $e^{y/(x+y)}$ בתוך השטח שבאיור. כדאי לעבור למשתנים חדשים U ו- V :

$$y = UV \quad U = x + y$$

$$x = U - UV$$

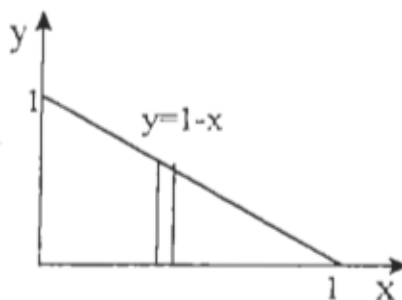
$$V = \frac{y}{x+y}$$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(U,V)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial U} & \frac{\partial x}{\partial V} \\ \frac{\partial y}{\partial U} & \frac{\partial y}{\partial V} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-V & V \\ -U & U \end{vmatrix} =$$

היקוביין יהיה:

$$= (1-V)U + UV = \underline{U}$$

נבדוק הגבולות החדשים ב- U וב- V .



איור 28.10

נבדוק במישור U, V .

$$V = 1 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{הקו}$$

$$V = 0 \Leftrightarrow y = 0 \quad \text{הקו}$$

$$U = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x \quad \text{הקו}$$

אבל התחום צריך להיות סגור וזה נוצר ע"י הנקודה

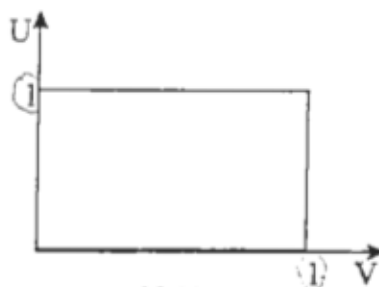
$$U = 0 \Leftrightarrow y = 0, x = 0$$

(ראה איור).

ולכן נקבל

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{y/(x+y)} dy dx = \int_0^1 \int_0^1 e^{\frac{UV}{U}} U dU dV =$$

$$= \int_0^1 \left. \frac{U^2}{2} \right|_0^1 e^V dV = \frac{1}{2} e^V \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (e - 1)$$



איור 28.11

$$(8) \text{ חשב אנטגרל } \iint_R (y-x) dx dy$$

כאשר R הוא תחום במישור xy החסום ע"י הקווים

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{9} \quad y = x - 3 \quad y = x + 1 \quad y = -\frac{1}{3}x + 5$$

יהיה קשה לחשב אנטגרל כפול זה באופן ישיר אולם אם נחליף משתנים נוכל להביא מערכת צירים שתהיה מקבילה לישרים הללו.

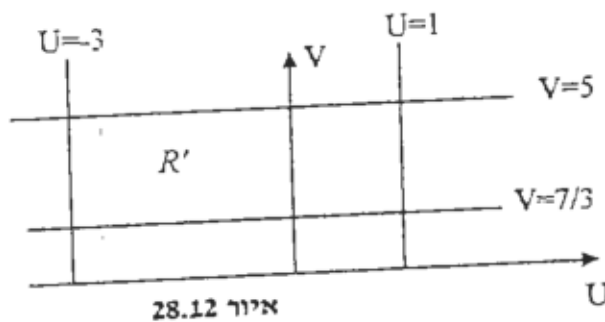
$$U = y - x$$

$$V = y + \frac{1}{3}x \quad \text{אם נבחר}$$

אזי הקו $y = x + 1$ הופך לקו $U = 1$ ואילו הקו $y = x - 3$ הופך לקו $U = -3$ במישור U, V .

אילו הקווים $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{9}$ ו- $y = -\frac{1}{3}x + 5$ הופכים

לקווים $V = \frac{7}{3}$ ו- $V = 5$ כלומר התחום R במערכת הקרטזית יהפוך לתחום R' כבאיור.



כדי לחשב את היעקוביאן נבטא
 $y = \frac{1}{4}U + \frac{3}{4}V$ $x = -\frac{3}{4}U + \frac{1}{4}V$
 היעקוביאן יהיה

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(U,V)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial U} & \frac{\partial y}{\partial U} \\ \frac{\partial x}{\partial V} & \frac{\partial y}{\partial V} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3/4 & 1/4 \\ 3/4 & 3/4 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{9}{16} - \frac{3}{16} = -\frac{3}{4}$$

$$|J| = \frac{3}{4}$$

ולכן

$$\iint_R (y-x) dx dy = \iint_{R'} \left[\left(\frac{1}{4}U + \frac{3}{4}V \right) - \left(-\frac{3}{4}U + \frac{1}{4}V \right) \right] \left(\frac{3}{4} \right) dU dV =$$

$$= \frac{3}{4} \iint_{R'} U dU dV = \frac{3}{4} \int_{7/3}^5 \int_{-3}^1 U dU dV = \frac{3}{4} \int_{7/3}^5 \left[\frac{U^2}{2} \right]_{-3}^1 dV = (-4) \frac{3}{4} \int_{7/3}^5 dV = (-4) \frac{3}{4} \left(5 - \frac{7}{3} \right) = -8$$

(5) חשב את מסתו של כדור שרדיוסו R אם צפיפות המסה פרופורציונלית

$$\frac{x^2 e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \rightarrow$$

$$M = \iiint_{(V)} \frac{x^2 e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx dy dz =$$

המסה היא:

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta$$

נציב:

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{\rho^2}{\rho^3} \sin^2 \varphi \cos^2 \theta e^{-\rho^2} \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho \sin^3 \varphi \cos^2 \theta e^{-\rho^2} d\rho d\varphi d\theta = -\frac{1}{2} (e^{-R^2} - 1) \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \sin^3 \varphi d\varphi \right) \cos^2 \theta d\theta =$$

$$U = \cos \varphi$$

נציב:

$$dU = -\sin \varphi d\varphi$$

$$= \left(\int_0^\pi (1 - \cos^2 \varphi) \sin \varphi d\varphi \right) \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_1^{-1} (1 - U^2) dU \left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right)_0^{2\pi} = -\frac{1}{2} \left(U - \frac{U^3}{3} \right)_1^{-1} \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi$$

(6) חשב את הנפח החסום בין הגלילים

$$x^2 + y^2 = 9 \quad x^2 + y^2 = 4$$

ובתוך הכדור

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16$$

בקואורדינטות גליליות הנפח היה

נציב:

$$16 - r^2 = U$$

$$-2r dr = dU$$

$$U = 12 \Leftarrow r = 2$$

$$U = 7 \Leftarrow r = 3$$

$$\int_2^3 \int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{16-r^2}}^{\sqrt{16-r^2}} r dz d\theta dr = 2 \int_2^3 \int_0^{2\pi} r \sqrt{16-r^2} d\theta dr = 2 \cdot 2\pi \int_2^3 r \sqrt{16-r^2} dr =$$

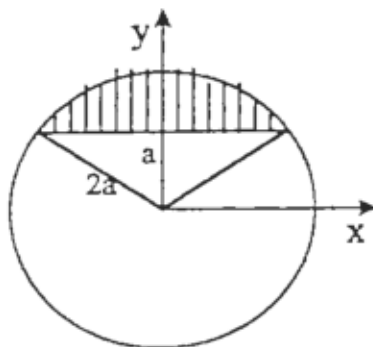
$$= \frac{4\pi}{2} \int_7^{12} U^{1/2} dU = 2\pi \frac{2}{3} U^{3/2} \Big|_7^{12} = \frac{4\pi}{3} (12^{3/2} - 7^{3/2})$$

$$\iint_R e^{-\frac{7x}{4}} dx dy \quad \text{חשב (9)}$$

כאשר R הוא תחום במישור x y החסום ע"י הקווים:

$$y = \frac{1}{4}x + 3 \quad y = \frac{1}{4}x - 2 \quad y = 2x + 4 \quad y = 2x - 1$$

$$4y - x + 8 = 0 \quad 4y - x - 12 = 0$$



איור 28.13

$$z = a$$

$$z = \rho \cos \varphi$$

$$\frac{a}{\rho} = \cos \varphi$$

$$\rho = a \sec \varphi$$

$$2a = a \sec \varphi$$

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{3}$$

$$M = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_{a \sec \varphi}^{2a} \frac{\rho^2}{\rho} \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$U = y - 2x$$

$$V = y - \frac{1}{4}x$$

רמז: העזר בטריגונומטריה

10 מצא את המסה של חלק הכדור (החלק הקטן) בין המישור $z = a$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$$

כאשר צפיפות המסה נתונה ע"י:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

נכתוב את משואת המישור $z = a$

בקואורדינטות כדוריות באמצעות a ו- φ .

ומכאן משואת המישור:

נחשב הזווית ע"י:

ולכן המסה תהיה:

29. אנליזה וקטורית

הפרק שלפנינו נקרא אנליזה וקטורית והוא עוסק בחשבון דפרנציאלי ואנטגרלי של וקטורים. הרבה גדלים בפיסיקה יש להם גם ערך מספרי **גודל** וגם **כיוון** במרחב. למשל העתק, או מהירות של גוף, כח שפועל על גוף, שדה חשמלי או מגנטי בנקודה מסוימת. גדלים אלה נקראים וקטורים. הם שונים מגדלים אחרים שאתם מכירים כמו מסה, זמן, טמפרטורה שיש להם ערך מספרי בלבד (אין להם כיוון) והם נקראים **סקלרים**. הטכניקה והסימונים של אנליזה וקטורית מאוד שימושיים בפיסיקה.

מקובל לסמן וקטור ע"י חץ.

כיוון החץ מציין את **כיוון** הוקטור ואורכו את הערך המספרי של הוקטור.

גודל.

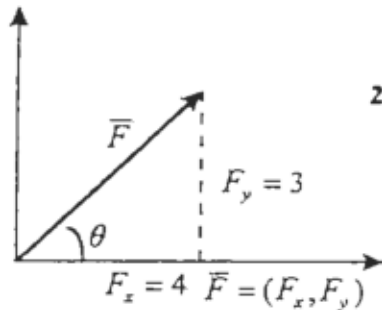
דרך אלטרנטיבית היא לציין ע"י **רכיבים**

$$\vec{F} = (F_x, F_y) \quad F_x, F_y$$

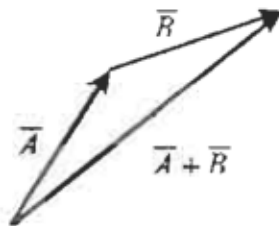
גדלו של הוקטור מסומן ע"י $F = |\vec{F}|$

$$F = |\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad d = 2 \text{ - ב}$$

$$F = |\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad d = 3 \text{ - ב}$$



איור 29.1



איור 29.2

חיבור וקטורים

שני דרכים לחבר: גאומטרית ואלגברית.

א. חק המקבילית

שמים את הזנב של B בראש A

ומציירים וקטור מהזנב של A

לראש של B.

דרך ב: לחשב הרכיבים בהתאמה.

$$\vec{A} = (A_x, A_y)$$

$$\vec{B} = (B_x, B_y)$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x, A_y + B_y)$$

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$

$$\vec{A} + \vec{A} + \vec{A} = 3\vec{A}$$

שני הדרכים זהות!

קיימים החוקים: חק החלופ

חק הפלוג (אסוציאטיב)

וקטור שלילי מוגדר כוקטור בעל אותו גודל רק בכיוון הפוך. כל רכיבי הוקטור

$$-\vec{A} \text{ הוא שלילי של } \vec{A} \text{ אם } \vec{A} = (A_x, A_y)$$

$$-\vec{A} = (-A_x, -A_y)$$

ניתן לכן להגדיר הפרש בין וקטורים $\vec{A} - \vec{B}$ שמשמעותו חבור הוקטור $\vec{A}$ עם הוקטור $-\vec{B}$.

$$\vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x, A_y - B_y)$$

היות שהוקטור יש לו שני רכיבים בממד $d = 2$ או שלושה רכיבים בממד $d = 3$

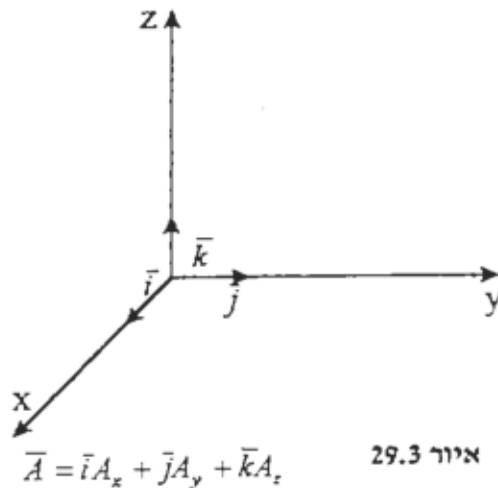
אזי **משוואה וקטורית** משמעותה סט של שתיים או שלוש משוואות.

לכן פשוט יותר לכתוב חוקים פיסיקלים בצורה וקטורית.

למשל תנועה של גוף בעל מסה m שמופעל עליו כח $\vec{F}$ תתואר ע"י משוואת ניוטון

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (\text{החק השני})$$

שים לב שחק זה אינו תלוי כלל במערכת הצירים שנבחר!



איור 29.3

וקטור יחידה

נסמן מערכת צירים

נתאר $\vec{i}$ וקטור יחידה בסיון x חיובי

נתאר $\vec{j}$ וקטור יחידה בסיון y חיובי

נתאר $\vec{k}$ וקטור יחידה בסיון z חיובי

הוקטורים $\vec{i}$ $\vec{j}$ $\vec{k}$ נקראים וקטורי

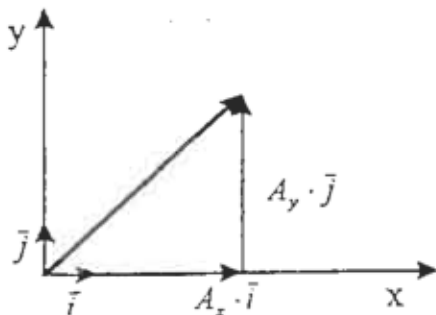
יחידה או וקטורי בסיס עבור מערכת צירים זו.

כל וקטורים ניתן לבטא במערכת

וקטורי יחידה אלו.

$$\vec{A} = \vec{i}A_x + \vec{j}A_y$$

ובאופן כללי



איור 29.4

$$\begin{aligned}\vec{A} + \vec{B} &= (\vec{i}A_x + \vec{j}A_y) + (\vec{i}B_x + \vec{j}B_y) = \\ &= \vec{i}(A_x + B_x) + \vec{j}(A_y + B_y)\end{aligned}$$

מכפלת וקטורים

ישנם שני סוגי מכפלה של וקטורים. האחת נקראת מכפלה

סקלרית שנותנת כתוצאה סקלר. השניה נקראת מכפלה

וקטורית התוצאה היא וקטור.

מכפלה סקלרית

הגדרה: מכפלה סקלרית של $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ (כתבים $\vec{A} \cdot \vec{B}$) הוא סקלר שגדלו

מכפלת הגדלים של $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ כפול הקוסינוס של הזווית בין $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta = AB\cos\theta$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad \text{כמובן חק החלופה קיים}$$

משמעות:

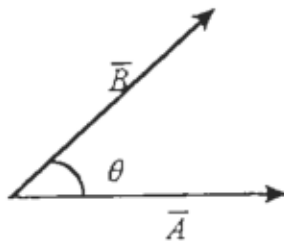
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A(\vec{A} \text{ על } \vec{B} \text{ הטל}) = B(\vec{B} \text{ על } \vec{A} \text{ הטל})$$

$$\vec{A}^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = A^2 \quad \text{קיים}$$

קל להראות שקיים

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

נעזר עתה בכתיבה בעזרת וקטור יחידה!



איור 29.5

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (\vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z) \cdot (\vec{i}B_x + \vec{j}B_y + \vec{k}B_z)$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1 \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \quad \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

וקטורים מקבילים ונציבים

$$A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0 \quad \text{אם}$$

אזי וקטורים נציבים! איור 29.6

אם שני וקטורים הם מקבילים אזי רכיביהם פרופורציונליים אחד לשני וקיים

$$\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$$

אם נתאי זה מתקיים הוקטורים מקבילים!

עבודה

בפיסיקה למדתם שעבודה שווה לכח כפול העתק (דרך) אם הכח וההעתק אינם מקבילים אזי הרכיב של הכח הניצב להעתק לא עושה עבודה. במקרה זה העבודה שווה לרכיב הכח מקביל להעתק מוכפל בהעתק.

$$W = F \cos \theta d$$

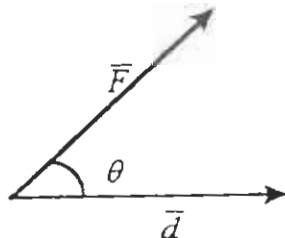
וזאת ניתן לכתוב כמכפלה סקלרית

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

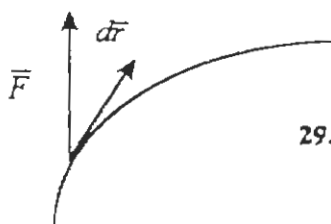
אם הכח משתנה עם מרחק וכן הכוון של התנועה $\vec{d}$ משתנה עם הזמן ניתן לכתוב עבור העתק אינפיניטסימלי $d\vec{r}$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

העבודה W תחושב ע"י אינטגרציה על dW שאת זה נלמד בשלב יותר מאוחר לחשב



איור 29.6



איור 29.7

מכפלה וקטורית

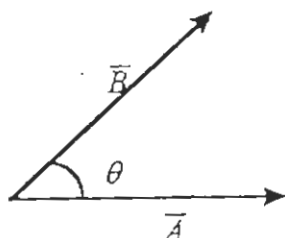
מכפלה של $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ נכתוב באופן $\vec{A} \times \vec{B}$

$\vec{A} \times \vec{B}$ הוא וקטור לפי הגדרה שגדלו וכוונו ניתן ע"י:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta$$

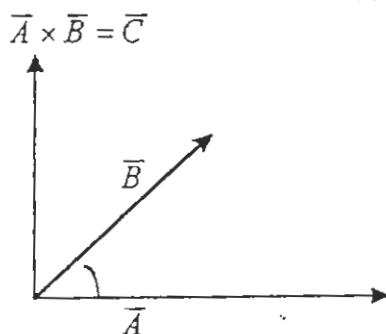
גדלו: $\theta > \pi$ הזווית בין $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$.

כוון $\vec{A} \times \vec{B}$ הוא וקטור נצב למישור שיוצרים $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ ובכוון שבורג (ימני) $\vec{A}$ ו- $\vec{B}$ מתקדם כאשר מסובבים אותו מ- $\vec{A}$ ל- $\vec{B}$.



איור 29.8

איור 29.9



לפי חק היד הימנית בכוון הבהן! אחת התוצאות הישירות מהגדרה זו

$$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \quad \text{אלא}$$

מכפלה וקטורית אינה קומוטטיבית!

חשוב לדעת מכפלה וקטורית של וקטורי יחידה

$$\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}$$

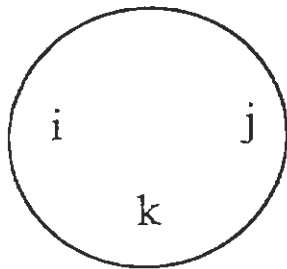
$$\vec{i} \times \vec{i} = |\vec{i}| |\vec{i}| \sin 0 = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \quad \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 0$$

מכפלה וקטורית של כל וקטור בעצמו $\vec{A} \times \vec{A} = 0$

מתמטיקה לפיזיקאים

$$\vec{i} \times \vec{j} = ?$$

$$|\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}||\vec{j}| \sin \frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$



איור 29.10

ולכן כל שני וקטורים יחידה שונים

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad \text{מהאיור קל לראות ש-}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

ולכל השלשה האחרים הם שליליים

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \quad \vec{k} \cdot \vec{j} = -\vec{i} \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

דרך טובה לזכור ליישום אותם על מעגל משפט חוק הפלוג:

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

(ללא הוכחה)
מכאן

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (\vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z) \times (\vec{i}B_x + \vec{j}B_y + \vec{k}B_z) = \\ &= (A_yB_z - A_zB_y)\vec{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\vec{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\vec{k} = \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

הדטרמיננטה הזו היא הדרך הקלה ביותר לזכור.



איור 29.11

שמוש פיזיקלי.

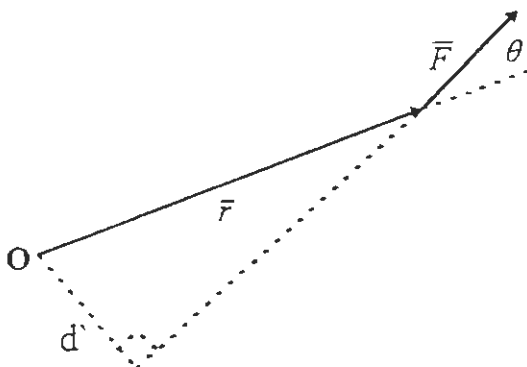
מומנט (תנופה) (torque)

 $F' \times d'$ נקרא מומנט של F' שניהם נצביםבאופן כללי המומנט של $\vec{F}$ סביב O (ציר נצב לאיור)מוגדר כמכפלה הכח בזרוע $r \sin \theta$

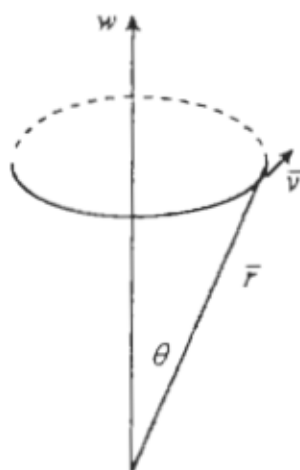
שניהם נצבים

כלומר $Fr \sin \theta$ וזה בדיוק $\vec{r} \times \vec{F}$ הגודל $Fr \sin \theta$

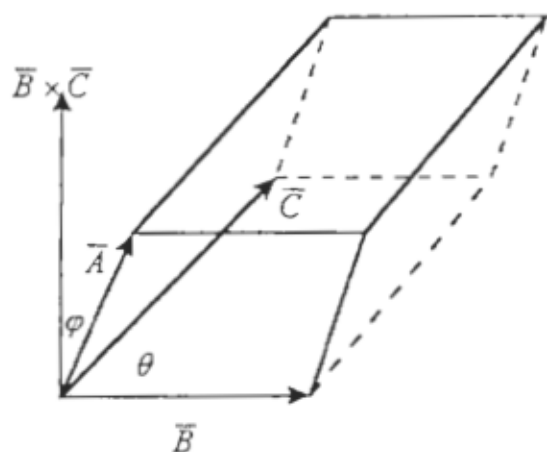
כוון נצב ללוח בכיוון שלנו! לפי כלל היד הימנית

מהירות זוויתית $\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{F}$ 

איור 29.12



איור 29.13



איור 29.14

מקבילון

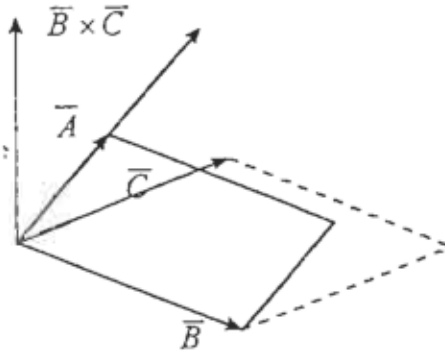
$$|\vec{B} \times \vec{C}| = |\vec{B}||\vec{C}|\sin\theta$$

$$V = |\vec{B}||\vec{C}|\sin\theta \cdot A \cos\varphi = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

מכפלה משולשת

יש מכפלה משולשת סקלרית ויש מכפלה משולשת וקטורית.
מכפלה משולשת סקלרית נכתבת

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$



איור 29.15

$$\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= A_x (\vec{B} \times \vec{C})_x + A_y (\vec{B} \times \vec{C})_y + \\ &+ A_z (\vec{B} \times \vec{C})_z = A_x (B_y C_z - B_z C_y) - \\ &- A_y (B_x C_z - B_z C_x) + A_z (B_x C_y - B_y C_x) \end{aligned}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

היות והחלפת שתי שורות משנה סימן בדטרמיננטה נוכל לכתוב את כל 12 מכפלות האפשריות (2x3!):

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \\ &= \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} = \dots \end{aligned}$$

החלפה בסדר ציקלי לא משנה!
בגלל שאין חשיבות היכן הנקודה והיכן סימן הכפל כותבים מכפלה סקלרית, משולשת: $(\vec{A}\vec{B}\vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}$

מכפלה וקטורית משולשת

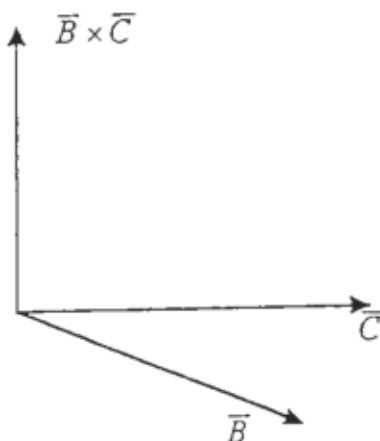
גודל זה (הוא וקטור) ניתן לומר מספר דברים.
($\vec{B} \times \vec{C}$) הוא וקטור ניצב למישור $\vec{B}$ ו- $\vec{C}$.

$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ הוא וקטור ניצב למישור $\vec{A}$ ו- $(\vec{B} \times \vec{C})$. במיוחד נתעניין

בעובדה ש- $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ הוא ניצב ל- $(\vec{B} \times \vec{C})$ כל וקטור מאונך ל- $(\vec{B} \times \vec{C})$ נמצא במישור ניצב ל- $(\vec{B} \times \vec{C})$ וזהו המישור של $\vec{B}$ ו- $\vec{C}$. לכן הוקטור $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ הוא וקטור כלשהו במישור של $\vec{B}$ ו- $\vec{C}$.

ולכן ניתן להיכתב כקומבינציה של $a\vec{B} + b\vec{C}$ כאשר a ו-b סקלרים שאותם נרצה לחשב! משוואות וקטוריות אינם תלויות במערכת הצירים.

נבחר ציר x לאורך $\vec{B}$ וציר y במישור $\vec{B}$ ו- $\vec{C}$ אזי $(\vec{B} \times \vec{C})$ נמצא לאורך ציר z.



איור 29.16

ולכן במערכת צירים זו:

$$\vec{B} = B_x \vec{i}$$

$$\vec{C} = C_x \vec{i} + C_y \vec{j}$$

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

ולכן:

$$\vec{B} \times \vec{C} = B_x \vec{i} \times (C_x \vec{i} + C_y \vec{j}) = B_x C_y \vec{i} \times \vec{j} = B_x C_y \vec{k}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = A_x B_x C_y \vec{i} \times \vec{k} + A_y B_x C_y \vec{j} \times \vec{k} = A_x B_x C_y (-\vec{j}) + A_y B_x C_y \vec{i}$$

אנו מעוניינים לכתוב אותם באמצעות קומבינציה של $\vec{B}$ ו- $\vec{C}$ נוריד ונוסיף $A_x B_x C_x \vec{i}$ ונקבל

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = -A_x B_x (C_x \vec{i} + C_y \vec{j}) + (A_y C_y + A_x C_x) B_x \vec{i}$$

$$A_x B_x = \vec{A} \cdot \vec{B}$$

$$A_y C_y + A_x C_x = \vec{A} \cdot \vec{C}$$

אבל

$$C_x \vec{i} + C_y \vec{j} = \vec{C}$$

$$B_x \vec{i} = \vec{B}$$

ולכן

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

דוגמה למשל מכפלה סקלרית משולשת: הראנו שמומנט סביב ציר ניתן ע"י $\vec{r} \times \vec{F}$ כאשר $\vec{r}$ ו- $\vec{F}$ היו במישור ניצב לציר הסיבוב!

שים לב: הגאומטריה האנליטית הופכת להיות פשוטה יותר בעזרת וקטורים.

29.1 נגזרות של וקטורים

נתון וקטור $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$ כאשר $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ וקטורים יחידה. ו- A_x, A_y, A_z הם פונקציות של t אזי הנגזרת של $\vec{A}$ ניתנת ע"י

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt} \vec{i} + \frac{dA_y}{dt} \vec{j} + \frac{dA_z}{dt} \vec{k}$$

כלומר נגזרת של וקטור שווה לוקטור שרכיביו הם נגזרות של רכיבי $\vec{A}$.

דוגמה: נתון חלקיק שנע במרחב ומקומו בזמן $t: (x, y, z)$ וקטור המעטק של החלקיק מהראשית הוא

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

אנו אומרים ש- $\vec{r}$ הוא וקטור מקום החלקיק בזמן t .

רכיבי המהירות הם: $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$. כך שמהירות

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

והתאוצה

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k}$$

מכפלה של סקלר בוקטור, מכפלה סקלרית ומכפלה וקטורית גוזרים בהתאם

לחוקים הרגילים של מכפלה:

כלומר:

$$\frac{d}{dt}(a\vec{A}) = \frac{da}{dt} \vec{A} + a \frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B}$$

שים לב באחרון אסור להחליף הסדר כי

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

דוגמה:

נדון בתנועת חלקיק במעגל במהירות קבועה.

$$r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} = \text{const}$$

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \text{const}$$

$$(א) \quad 2\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{v} = 0$$

$$(ב) \quad 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{נגזור}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{a} + \vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{a} = -v^2$$

מ (א) נובע $\vec{r}$ נצב ל- $\vec{v}$

מ (ב) טבע $\vec{a}$ נצב ל- $\vec{v}$

לכן $\vec{a}$ ו- $\vec{F}$ הם או מקבילים (והתנעה היא במישור) והזווית בין $\vec{a}$ ו- $\vec{F}$ היא 0 או π .

$$\vec{F} \cdot \vec{a} = |\vec{F}| |\vec{a}| \cos \theta = -v^2$$

רואים ש- $\cos \theta < 0$ כלומר $\theta = \pi$!

$$|\vec{F}| |\vec{a}| (-1) = -v^2$$

$$a = \frac{v^2}{r}$$

הוכחנו: עבור תנועה במעגל במהירות קבועה התאוצה היא לכוון מרכז המעגל וערכה $-\frac{v^2}{r}$!

29.2 נגזרת כיוונית : גרדיאנט

נניח שנתונה פונקציה בכל נקודה במרחב. למשל טמפרטורה $T(x, y, z)$ בכל נקודה ונקודה. נתבונן בנקודה מסוימת ונוכל לשאול מהו קצב השנוי של הטמפרטורה עם המרחק מהנקודה (במעלות לס"מ) כאשר נעים מנקודה זו. בד"כ קורה שהטמפרטורה תרד בכוונים מסוימים ותעלה בכוונים אחרים. וכן קצב הירידה או העליה יהיו שונים בכוונים שונים. כלומר: קצב שינוי הטמפרטורה עם המרחק תלוי בכוון שבו נווע. לקצב זה נקרא **נגזרת כווינית**.

בכתיבה מתמטית: רוצים למצא $\frac{\Delta T}{\Delta s}$ כאשר Δs הוא אלמנט אורך בכוון נתון.

ו- ΔT השנוי המתאים בטמפרטורה. נסמן הנגזרת הכווינית $\frac{dT}{ds}$. נלמד איך לחשב נגזרת זו.

נוכל גם לשאול עצמנו באיזה כוון $\frac{dT}{ds}$ הוא בעל הערך הגדול ביותר- המכסימלי.

זהו הכוון שממנו זורם החום (החום נע ממקום חם למקום קר- בכוון הפוך למקסימום של $\frac{dT}{ds}$)

לפני שנדון איך לחשב נגזרת כווינית, נדון בדוגמה הבאה:

נניח שאנו נמצאים בנקודה במעלה הר. אנו יכולים לשאול, באיזה כוון שפוע

ההר כלפי מטה הוא הגדול ביותר?

נדיק מעט יותר! זהו הכוון אליו נחליק אם נפול.

נניח שנעים מרחק קצר Δs על ההר. השנוי בגובה Δz יכול להיות חיובי (מעלה)

או שלילי (כלפי מטה) או אפס. אזי $\frac{\Delta z}{\Delta s}$ או הגבול $\frac{dz}{ds}$ תלוי בכוון שאנו הולכים.

כלומר $\frac{dz}{ds}$ הוא נגזרת כווינית.

הכוון של השפוע המכסימלי הוא הכוון שבו $\frac{dz}{ds}$ יש לו ערך מוחלט גדול ביותר!

הערה: היות האנרגיה הפוטנציאלית על גרויטציה (כח המשיכה) היא $V = mgz$

אזי מכסימום $\frac{dz}{ds}$ יהיה כמו מכסימום של $\frac{dV}{ds}$ וקוים שוי פוטנציאליים יהיו

$$V(x, y) = mgz(x, y) = \text{const}$$

ננסה עתה למצא נגזרת כונית. נתונה פונקציה $\phi(x, y, z)$ (שדה סקלרי) או בשני ממדים $\phi(x, y)$.

אנו רוצים למצא $\frac{d\phi}{ds}$ קצב השנוי של ϕ עם המרחק מנקודה (x_0, y_0, z_0) בכוון נתון.

נניח $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ יהיה וקטור יחידה בכוון הנתון. אזי משוואת הישר שעובר דרך (x_0, y_0, z_0) ובכוון $\vec{u}$ ניתן ע"י פרמטר s

$$\begin{cases} x = x_0 + as \\ y = y_0 + bs \\ z = z_0 + cs \end{cases} \quad (29.15)$$

המשמעות של s הוא מרחק הנקודה (x, y, z) מ- (x_0, y_0, z_0) שכן:

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = \sqrt{(as)^2 + (bs)^2 + (cs)^2} = s$$

מכיון ש- $\vec{u}$ וקטור יחידה קיים $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. אם נציב עתה (x, y, z) מ- (29.15) ב- $\phi(x, y, z)$

נקבל פונקציה ϕ רק של משתנה אחד s !

כלומר לאורך הקו הישר (29.15) ϕ היא פונקציה של משתנה אחד s בלבד!

נוכל א"כ לחשב בעזרת נוסחת השרשרת:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{ds} &= \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} = \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x} a + \frac{\partial\phi}{\partial y} b + \frac{\partial\phi}{\partial z} c \end{aligned}$$

וזה בדיוק מכפלה סקלרית של הוקטור $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ עם הוקטור

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$$

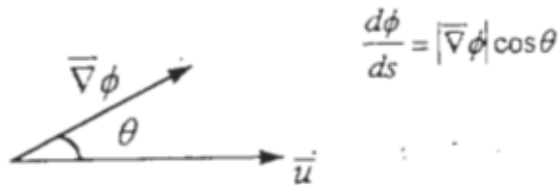
לוקטור האחרון קוראים גרדיאנט של ϕ ומסמנים $\text{grad}\phi$ או $\nabla\phi$.

$$\vec{\nabla}\phi = \text{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$$

מצאנו איפה נגזרת בכוון $\vec{u}$

$$\frac{d\phi}{ds} = \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{u} \quad (30.16)$$

נדון עתה במשמעות של הגרדיינט:



איור 29.17

כאשר θ זווית בין $\vec{u}$ לבין $\vec{\nabla}\phi$.

כלומר $\frac{d\phi}{ds}$ זה ההטל של $\vec{\nabla}\phi$ בכיוון $\vec{u}$.

ומכאן $|\vec{\nabla}\phi| \geq \frac{d\phi}{ds}$ כלומר $|\vec{\nabla}\phi|$ הוא העזרת הכונית הגדולה ביותר!

ואילו הכוון בו העזרת הכונית היא גדולה ביותר הוא כוון הוקטור $\vec{\nabla}\phi$.

דוגמה: מצא את העזרת הכונית של $\phi = x^2y + xz$ בנקודה $(1, 2, -1)$ בכיוון $\vec{A} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

נחשב את וקטור היחידה בכיוון $\vec{A}$: $\vec{u} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{1}{3}(2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})$. נחשב את הגרדיינט של ϕ :

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k} = (2xy + z)\vec{i} + x^2\vec{j} + x\vec{k}$$

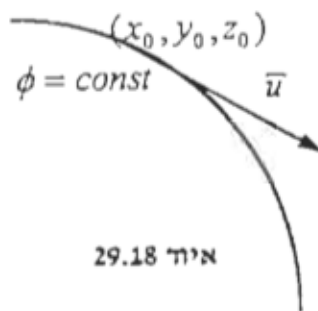
$$\vec{\nabla}\phi_{(1,2,-1)} = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\frac{d\phi}{ds} = \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{u} = (3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \cdot \frac{1}{3}(2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) = 2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

העזרת הכונית המכסימלית היא:

$$|\vec{\nabla}\phi| = \sqrt{3^2 + 1 + 1} = \sqrt{11}$$

וכוונה $\vec{\nabla}\phi$.



איור 29.18

29.3 משטחים שווי פוטנציאל

ניח עתה $\vec{u}$ וקטור יחידה משיק למשטח $\phi = \text{const}$ אזי:

$\frac{d\phi}{ds}$ בכיוון $\vec{u}$ הוא אפס זאת מכיוון ש- ϕ

$$\frac{d\phi}{ds} = \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{u} \text{ מכיוון ש-}$$

נובע ש- $\vec{\nabla}\phi$ ניצב למשטח $\phi = \text{const}$ בנקודה זו!

היות ו- $|\vec{\nabla}\phi|$ הוא ערך העזרת הכיוונית בכיוון ניצב

(נורמל) למשטח $\phi = \text{const}$ הוא נקרא הרבה פעמים

$$|\vec{\nabla}\phi| = \frac{d\phi}{dn} \text{ העזרת הנורמלית ומסומן:}$$

הוכחנו: הקצב הגדול ביותר של שנוי פונקציה הוא בכיוון ניצב למשטחים שווי פוטנציאל! $\phi = \text{const}$

במקרה של טמפרטורה, המכסימום של העזרת הכונית $\frac{dT}{ds}$, יהיה ניצב לאזותרמים (קוים שווי

טמפרטורה). העזרת הכונית המכסימלית גדלה $|\vec{\nabla}T|$ וכוונה בכיוון $\vec{\nabla}T$ הנקרא גרדיינט הטמפרטורה!

29.4 הגדרות נוספות עם אופרטור $\bar{\nabla}$:

$$\bar{\nabla}\phi = \left[\bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z} \right] \phi$$

כאשר כותבים

ניתן לקרוא לסוגריים $\bar{\nabla}$. ל- $\bar{\nabla}$ יש משמעות של אופרטור שפועל על פונקציה (כמו $\frac{d}{dx}$)

קוראים ל- $\bar{\nabla}$ המוגדר, כדלהלן:

$$\bar{\nabla} = \bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (29.17)$$

אופרטור וקטורי!

עד כה הפעלנו את האופרטור $\bar{\nabla}$ על פונקציה סקלרית בהמשך נדון איך להפעיל $\bar{\nabla}$ על וקטורים!

נניח $\bar{V}(x, y, z)$ פונקציה וקטורית. כלומר יש לה 3 רכיבים V_x, V_y, V_z שהם פונקציה של x, y, z

$$\bar{V}(x, y, z) = \bar{i}V_x(x, y, z) + \bar{j}V_y(x, y, z) + \bar{k}V_z(x, y, z)$$

$\bar{V}(x, y, z)$ נקרא שדה וקטורי למשל שדה חשמלי בנקודה (x, y, z) כתוצאה ממטען חשמלי.

בכל נקודה במרחב יש וקטור $\bar{V}(x, y, z)$ שכוונו וגדלו עשוי להשתנות.

מגדירים שתי פעולות חשובות בין $\bar{\nabla}$ ל- $\bar{V}(x, y, z)$. ואחת מכפלה סקלרית $\bar{\nabla} \cdot \bar{V}$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = \text{div} \bar{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (29.18)$$

והשני מכפלה וקטורית הנקראת curl או רוטור:

$$\bar{\nabla} \times \bar{V} = \text{curl} \bar{V} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \bar{i} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \bar{j} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \bar{k} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \quad (29.19)$$

להגדרות אלו שמושים רבים בפיסיקה ומשמעותם נלמד בהמשך.

הגודל $\bar{\nabla}\phi$ הוא וקטור. נוכל להפעיל עליו מכפלה סקלרית ומכפלה וקטורית את $\bar{\nabla}$.

נגדיר $\bar{V} = \bar{\nabla}\phi$ ונחשב $\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = \text{div grad} \phi$.

זהו אחד האופרטורים החשובים ביותר ונקרא לפלסיאן של ϕ מסומן $\nabla^2 \phi$ והוא סקלר:

$$\nabla^2 \phi = \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}\phi = \text{div grad} \phi = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

הפלסיאן מופיע כמעט בכל תחומי המתמטיקה השמושית. למשל:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{משוואת לפלס!}$$

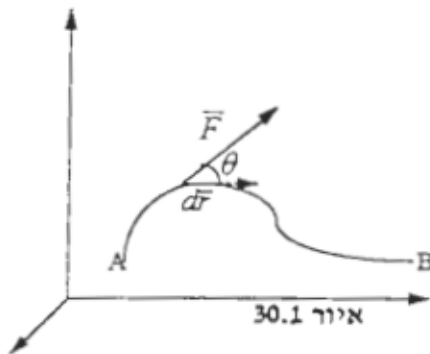
$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad \text{משוואת הגלים!}$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{משוואת הדיפוזיה}$$

משוואות אלו מופיעות בכל תחומי המדע והטכנולוגיה, תורת החום, הדרודינמיקה, חשמל, מגנטיות,

אורודינמיקה אלסטיות, אופטיקה ועוד!

30. אנטגרלים קויים.



ראינו שאלמנט עבודה הנו $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, דהיינו: מכפלה סקלרית בין העתק אינפיניטסימלי לבין הכוח (ראה איור 31.1). נניח שהמערכת נעה בין A ל-B עם כוח משתנה כאשר המקום משתנה. למשל כוח על מטען חשמלי בשדה חשמלי. הכח $\vec{F}$ משתנה מנקודה לנקודה כלומר $\vec{F}(x, y, z)$ מכיוון שאנו מעוניינים בעבודה על מסלול קוי הרי שהקואורדינטות x, y, z אינם בלתי תלויים אלא קשורים אחד לשני ותלויים במשתנה אחד בלבד.

בשלושה ממדים צריך 2 משוואות לתאר קו - כמו חתוך בין שני משטחים - לכן לאורך הקו יש רק משתנה אחד בלתי תלוי (כמו בגזרת כוונות!).

נכתוב את $\vec{F}$ ו- $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ כפונקציה של משתנה אחד. ולכן, האנטגרל של

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

העבודה שנעשתה ע"י $\vec{F}$ בתנועה מ-A ל-B.

אנטגרל כזה נקרא- **אנטגרל קוי**.

אנטגרל קוי משמעותו אנטגרל לאורך עקומה- קו- כלומר זהו אנטגרל חד ממדי בניגוד לאינטגרלים דו ממדיים שנעשים על משטח! או אינטגרלים משולשים שנעשים על נפח. חשוב להבין שיש רק משתנה בלתי תלוי אחד מכיוון שנמצאים על הקו.

בשני ממדים משוואת הקו ניתנת לכתיבה ע"י $y = f(x)$ כאשר x משתנה בלתי תלוי.

בשלושה ממדים משוואת הקו (כגון ישר) כמו למשל אם הוא קו ישר:

$$x = x_0 + as$$

$$y = y_0 + bs$$

$$z = z_0 + cs$$

על מנת לחשב את האנטגרל הקוי צריך לבטא זאת קודם כאנטגרל חד ממדי. נוכל להמחיש זאת בדוגמה הבאה.

$$\vec{F} = xy\vec{i} - y^2\vec{j} \quad \text{דוגמה: נתון הכח}$$

מצא את העבודה הנעשית ע"י כח זה לאורך הקוים הנראים באיור 31.2 המחברים את הנקודה

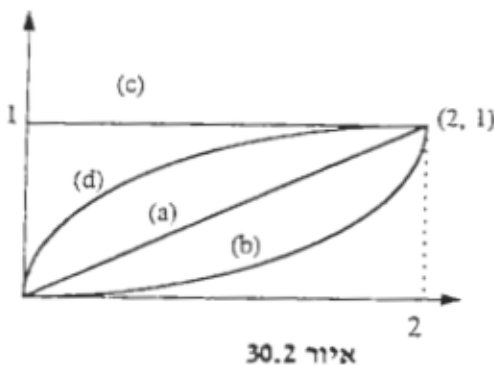
מ-(0,0) ל-(2,1)

(a) קו ישר

(b) פרבולה

(c) קו שבור

(d) לאורך הקו $x = 2t^3$ $y = t^2$



$$W = \int_{(0,0)}^{(2,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{נחשב את העבודה}$$

המסלולים הנ"ל.

במישור x, y קיים.

$$\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} \quad \text{כלומר:}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = xydx - y^2dy \quad \text{ולכן}$$

$$W = \int (xy dx - y^2 dy)$$

נכתוב עתה את האנטגרל באמצעות משתנה אחד לאורך מסלול (a) שהוא קו ישר. כאן מתקיים

$$dy = \frac{1}{2} dx \quad y = \frac{1}{2} x$$

ולכן נקבל אנטגרל על משתנה x בלבד:

$$W_a = \int_0^2 \left(x \frac{1}{2} dx - \left(\frac{1}{2} x \right)^2 \frac{1}{2} dx \right) = \int_0^2 \frac{3}{8} x^2 dx = \frac{x^3}{8} \Big|_0^2 = 1$$

אפשר לעשות גם האנטגרל על y : $x = 2y$ ו- $dx = 2dy$ ולעשות אינטגרל מ-0 ל-1 ונקבל אותה התוצאה.

$$dy = \frac{1}{2} x dx \quad y = \frac{1}{4} x^2 \quad \text{לאורך מסלול (b): פרבולה}$$

$$W_b = \int_0^2 \left(x \frac{1}{4} x^2 dx - \frac{1}{16} x^4 \frac{1}{2} x dx \right) = \int_0^2 \left(\frac{1}{4} x^3 - \frac{1}{32} x^5 \right) dx = \left[\frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{192} \right]_0^2 = \frac{2}{3}$$

לאורך מסלול (c) קו שבור

נעשה קודם אנטגרל מ-(0,0) ל-(0,1) ואח"כ מ-(0,1) ל-(2,1) ונחבר התוצאות.

לאורך $(0,0) \leftarrow (0,1)$ קיים $x=0$ ו- $dx=0$ ואז נצטרך y כמשתנה ונקבל

$$\int_{y=0}^1 (0 \cdot y \cdot 0 - y^2 dy) = -\frac{y^3}{3} \Big|_0^1 = -\frac{1}{3}$$

מ-(0,1) ל-(2,1) $y=1$ ו- $dy=0$ ולכן:

$$\int_{x=0}^2 (x \cdot 1 dx - 1 \cdot 0) = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 2$$

העבודה תהיה במסלול (c):

$$W_c = -\frac{1}{3} + 2 = \frac{5}{3} \quad \text{סייה}$$

במסלול (d) נזדקק לטכניקה אחרת:

$$dx = 6t^2 dt \quad dy = 2t dt \quad \text{במקום } y \text{ נציב } y = t^2 \text{ ובמקום } x \text{ נציב } x = 2t^3, \text{ וכמו כן}$$

$$t=0 \text{ ו- } t=1 \text{ ב- } (2,1)$$

ואז נקבל:

$$W_d = \int_0^1 (2t^3 t^2 6t^2 dt - t^4 2t dt) = \int_0^1 (12t^7 - 2t^5) dt = \frac{12}{8} - \frac{2}{6} = \frac{7}{6}$$

30.1 חוקי שמור.

יש מקרים שבהם האנטגרל בכל דרך נותן אותה תוצאה ויש שלא! בדוגמה הקודמת ראינו שבכל דרך התוצאה היא שונה.

מהי המשמעות הפיזיקלית של תופעה זו?

אם מפרשים האינטגרלים כעבודה על גוף לאורך מסלול האנטגרל, אזי יש מקרים שבהם העבודה משמרת (כאשר אין חיכוך למשל) ואז בכל מסלול מקבלים אותה תוצאה. ויש מקרים שהעבודה לא משמרת ובדרכים שונות עושים עבודה שונה.

אם העבודה תלויה בדרך אנו קוראים לכח **לא משמר**. אם העבודה אינה תלויה רק בשתי קצוות האנטגרל אזי הכח נקרא **משמר**!

למשל העבודה להעלות מסה m למעלה הר בגובה h היא $W = mgh$ כל זמן שאין חיכוך. תוצאה זו נכונה הן בעליה בשיפוע או בעליה בכוון אנכי! נחזור עתה על הדוגמה הקודמת אלא

$$\vec{F} = xy\vec{i} + \frac{1}{2}x^2\vec{j} \quad \text{יהיה:}$$

$$(a) \quad \text{קו ישר} \quad y = \frac{1}{2}x \quad dy = \frac{1}{2}dx$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} \quad \vec{F} = xy\vec{i} + \frac{1}{2}x^2\vec{j}$$

$$W_{(a)} = \int_{(0,0)}^{(2,1)} (xydx + \frac{1}{2}x^2dy) =$$

$$= \int_0^2 x \frac{1}{2} x dx + \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{2} dx = \frac{3}{4} \int_0^2 x^2 dx = \frac{3}{4} \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = 2$$

$$(b) \quad \text{פרבולה} \quad y = \frac{1}{4}x^2 \quad dy = \frac{1}{2}x dx$$

$$W_{(b)} = \int_{(0,0)}^{(2,1)} (xydx + \frac{1}{2}x^2dy) =$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{4}x^3 dx + \frac{1}{4}x^3 dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^3 dx = \frac{1}{2} \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = 2$$

$$(c) \quad \begin{aligned} (0,0) &\rightarrow (0,1) \\ (0,1) &\rightarrow (2,1) \end{aligned}$$

$$W_{(c)} = \int_{(0,0)}^{(2,1)} (xydx + \frac{1}{2}x^2dy) = 0 + \int_0^2 (x \cdot 1 dx + \frac{1}{2}x dy) = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{4}{2} = 2$$

$$(d) \quad \begin{aligned} dx &= 6t^2 dt & x &= 2t^3 \\ dy &= 2t dt & y &= t^2 \end{aligned}$$

$$W_{(d)} = \int_{(0,0)}^{(2,1)} (xydx + \frac{1}{2}x^2dy) = \int_0^1 2t^3 \cdot t^2 \cdot 6t^2 dt +$$

$$+ \int_0^1 \frac{1}{2} 4 \cdot t^6 \cdot 2t dt = 12 \int_0^1 t^7 dt + 4 \int_0^1 t^7 dt = 16 \frac{t^8}{8} \Big|_0^1 = 2$$

אנו רואים איפה שלפעמים הכח משמר כמו בדוגמה האחרונה ולעיתים אינו משמר כמו בדוגמה הקודמת. רצוי לכן לדעת לזהות כוחות משמרים או שאינם משמרים לפני שמבצעים אינטגרציה.

כי אם הכח משמר מספיק לעשות אינטגרל על מסלול אחד כדי לדעת את התשובה! נלמד משפט חשוב על הבחנה בין כוחות משמרים ושאנים משמרים.

משפט: תנאי הכרחי ומספיק ש $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ יהיה בלתי תלוי במסלול הוא $\text{curl} \vec{F} = 0$ או $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$. כלומר אם קיים $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ הכוח משמר ואם $\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0$ הכוח אינו משמר.

נסביר עכשיו מדוע משפט זה נכון!

נניח שתונה פונקציה רציפה $w(x, y, z)$ כזו ש $\vec{F}$ הוא גרדיינט שלה

$$\vec{F} = \nabla w = \frac{\partial w}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial w}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial w}{\partial z} \vec{k}$$

$$\text{כלומר } F_x = \frac{\partial w}{\partial x} \quad F_y = \frac{\partial w}{\partial y} \quad F_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\text{נעזר בתכונה } \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \text{ וכו' ונקבל}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

ולכן

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \text{curl} \vec{F} \text{ של מהגדרה}$$

מהגדרה של $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \text{curl} \vec{F}$ נובע שכל הרכיבים של $\text{curl} \vec{F}$ שווים לאפס כלומר:

אם $\vec{F} = \vec{\nabla} w$ אזי $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$. להפך גם קיים (כפי שנראה בהמשך) אם $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$

נוכל למצוא תמיד פונקציה $w(x, y, z)$ שעבורה $\vec{F} = \vec{\nabla} w$. ולכן אם $\vec{F} = \vec{\nabla} w$ נוכל לכתוב

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{\nabla} w \cdot d\vec{r} = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz = dw \quad (30.1)$$

ומכאן

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B dw = w(B) - w(A)$$

כאשר $w(A)$ ו- $w(B)$ הם ערכי הפונקציה w בנקודות A ו-B של מסלול האינטגרציה

והתוצאה אינה תלויה במסלול בו עשינו האינטגרציה. כלומר $\vec{F}$ הוא כח משמר.

הדיפרנציאל dw במשוואה (30.1) נקרא דיפרנציאל שלם. נוכל לומר ש- $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$

הוא תנאי הכרחי ומספיק ש- $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ הנו דיפרנציאל שלם.

ע"מ להסביר נראה דוגמאות

מתי $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ דיפרנציאל שלם או לא.

דוגמאות

(1) דון בפונקציה:

$$w = x^2y - xz^3 - z$$

$$dw = (2xy - z^3)dx + x^2dy - (3xz^2 + 1)dz$$

כאן dw דיפרנציאל שלם לפי הגדרה כי קבלנו אותו מתוך דיפרנציאל של פונקציה.

נוכל לראות שאם נכתוב $dw = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ אזי $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \text{curl} \vec{F} = 0$.

הנגזרת החלקית לפי x של המקדם של dy שווה לנגזרת החלקית לפי y של המקדם של dx .

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2) = 2x = \frac{\partial}{\partial y}(2xy - z^3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(-3xz^2 - 1) = -3z^2 = \frac{\partial}{\partial z}(2xy - z^3)$$

וכן

$$\frac{\partial}{\partial y}(-3xz^2 - 1) = 0 = \frac{\partial}{\partial z}(x^2)$$

קשרים אלו קיימים שכן $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$ וכו'.

דבר זה ברור שכן קבלנו dw ע"י לקיחת הדיפרנציאל של w .

(2) נראה עתה דוגמה נוספת בה נתון $dw = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$dw = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (2xy - z^3)dx + x^2dy + (3xz^2 + 1)dz$$

נדון בדוגמה

זה כמעט כמו dw מהדוגמה הקודמת אלא שהסימן של המקדם של dz הוא הפוך.

עכשיו שתי משוואות האחרונות לא קיימות כלומר $\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0$ ו- dw אינו דיפרנציאל מדויק.

אם נשאל האם ישנה פונקציה ש- dw הוא הדיפרנציאל שלה? התשובה היא לא כי אילו

הייתה פונקציה כזו אזי הנגזרות השניות המתחלפות היו שוות: $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \text{curl} \vec{F} = 0$$

משוואה כזו מופיעה הרבה פעמים, כאשר dw לא דיפרנציאל מדויק אזי $\vec{F}$ הינו כח שאינו משמר

ו- $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$ שהיא העבודה הנעשית בין A ו- B תלויה לא רק בנקודות A ו- B אלא גם במסלול עליו

האובייקט נע. זה קורה כפי שאמרנו כאשר ישנם למשל כוחות חיכוך.

מצד שני לפעמים נתון $\vec{F}$ כזה או $dw = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, שמקיים $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \text{curl} \vec{F} = 0$.

אז אנו יודעים שקיימת פונקציה w ונרצה לדעת איך למצוא אותה (עד כדי קבוע אינטגרציה).

לצורך זה נוכל לחשב את האינטגרל (30.1) מנקודה התחלתית A ועד למשתנה B לאורך מסלול

כוח כלשהו. מכיוון שהאינטגרל אינו תלוי במסלול התוצאה תיתן את הערך של w בנקודה B .

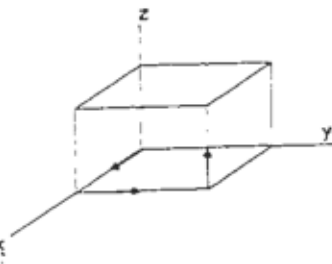
יהיה גם תוספת קבוע w שערכו תלוי בנקודה ההתחלה A .

$$dw = (2xy - z^3)dx + x^2dy - (3xz^2 + 1)dz$$

(3) נתון:

נחשב אינטגרל של dw :מהראשית עד לנקודה (x, y, z) מכיוון שזה דיפרנציאל שלם.

כל מסלול ייתן אותה תוצאה ולכן נבחר מסלול נח. כמסלול

אינטגרציה ניקח את הקו השבור מ- $(0,0,0)$ ל- $(x,0,0)$ ומשםל- $(x,y,0)$ ומשם ל- (x,y,z) (ראה איור 30.3).מ- $(0,0,0)$ ל- $(x,0,0)$: קיים $y = z = 0$ $dy = dz = 0$
כך שהאינטגרל הוא אפס לאורך מסלול זה.מ- $(x,0,0)$ ל- $(x,y,0)$: קיים $dx = dz = 0$ $z = 0$ $x = \text{const}$
כך שהאינטגרל הוא

איור 30.3

$$\int_0^y x^2 dy = x^2 \int_0^y dy = x^2 y$$

מ- $(x,y,0)$ ל- (x,y,z) : $x = \text{const}$ $y = \text{const}$ $dx = dy = 0$
והאינטגרל

$$-\int_0^z (3xz^2 + 1) dz = -xz^3 - z$$

$$w = x^2 y - xz^3 - z$$

ולכן ס"ה נקבל

ואמנם

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz = (2xy - z^3) dx + x^2 dy - (3z^2 x + 1) dz$$

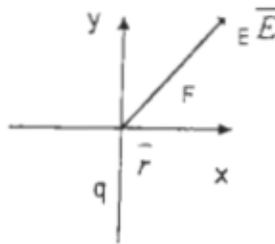
אבל $w = x^2 y - xz^3 - z + \text{const}$ גם יהיה פתרון.**שים לב:** w שקיבלנו הוא האינטגרציה של $dw = \vec{F} \cdot d\vec{r}$. כלומר אם $\vec{F}$ הוא כח אזי w היא העבודהשנעשתה ע"י הכח $\vec{F}$ במעבר מ- $(0,0,0)$ ל- (x,y,z) .

אם הכח משמר כמו בדוגמה האחרונה אזי בכל מסלול נקבל אותו דבר.

אם הכח אינו משמר התשובה אינה פונקציה של (x,y,z) בלבד אלא גם של המסלול בו בחרנו. לכן לאניתן לומר שקיימת פונקציה w כזו ש- $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ זה הדיפרנציאל שלה!או ש- $\vec{F} = \vec{\nabla} w$.

30.2 פוטנציאלים

במכניקה כאשר $\vec{F} = \vec{\nabla} \phi$, שהוא עבודה שנעשתה ע"י הכוח $\vec{F}$. לדוגמה אם מסה m נופלת מגובה z תחת כח הגרוויטציה. העבודה שנעשית על ידי הכוח $\vec{F}$ של הגרביטציה היא $w = mgz$. אם לעומת זאת מרימים את המסה לגובה z נגד הגרביטציה, העבודה שנעשית ע"י כח הגרביטציה $\vec{F}$ היא $w = -mgz$ כי כוון התנועה הפוך ל- $\vec{F}$.
עלית האנרגיה הפוטנציאלית של m במקרה זה היא $\phi = +mgz$ כלומר $w = -\phi$ או $\vec{F} = -\vec{\nabla} \phi$. הפונקציה ϕ נקראת אנרגיה פוטנציאלית או הפוטנציאל הסקלרי של הכוח $\vec{F}$. (כלומר ϕ יכול להשתנות ע"י תוספת קבוע- זה מתאים לבחירת רמת האפס של האנרגיה הפוטנציאלית ולא משפיעה על $\vec{F}$).
באופן כללי לכל וקטור $\vec{V}$ אם $\text{curl} \vec{V} = 0$ קיימת פונקציה ϕ שנקראת הפוטנציאל הסקלרי של $\vec{V}$ כך ש- $\vec{V} = -\vec{\nabla} \phi$.
זהו ההגדרה המקובלת של פוטנציאל סקלרי במכניקה וחשמל. (לפעמים בהידרודינמיקה מגדירים פוטנציאל מהירות $\vec{V} = -\vec{\nabla} \phi$).



איור 30.4

דוגמה:
מצא את הפוטנציאל הסקלרי של שדה חשמלי של נקודת מטען q הנמצאת בראשית הצירים (ראה איור 31.4).
נזכור שבנקודה $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ השדה החשמלי שמשמעותו הכוח ליחידת מטען ב- $\vec{r}$ הודות למטען q (ביחידות אלקטרוסטטיות)

$$\vec{E} = \frac{q}{r^2} \vec{e}_r = \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{q}{r^3} \vec{r} \quad \text{הוא:}$$

זהו חוק קולון מחשמל.
אם ניקח את רמת האפס של האנרגיה החשמלית ב- ∞ , אזי הפוטנציאל הסקלרי ϕ משמעותו הסימן ההפוך של העבודה הנעשית ע"י השדה על מטען יחידה כאשר מביאים אותו מ- ∞ ל- $\vec{r}$. וזה

$$\phi = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = q \int_{\infty}^{\vec{r}} \frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}}{r^3}$$

כדאי לחשב אינטרגל זה בעזרת קואורדינטות פולריות (r, θ) כאשר θ קבוע ו- $\vec{r}$ ישתנה

מ- ∞ ל- $\vec{r}$. זה מוצדק אם נוכיח ש- $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ (תרגיל!)

כלומר $\vec{E}$ הוא כח משמר.

נחשב את $\vec{r} \cdot d\vec{r}$

$$d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = d(r^2) = 2r dr$$

מצד שני

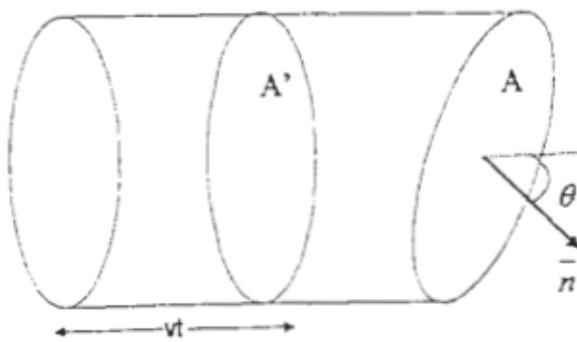
$$d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = 2\vec{r} \cdot d\vec{r}$$

כלומר

$$\vec{r} \cdot d\vec{r} = r dr$$

ולכן נקבל

$$\phi = q \int_{\infty}^{\vec{r}} \frac{r dr}{r^3} = q \int_{\infty}^{\vec{r}} \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{r} \Big|_{\infty}^{\vec{r}} = \frac{q}{r}$$

31. הדיברגנט

איור 31.1

הגדרנו דיברגנט של וקטור $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$ ע"י

$$\text{div} \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

נבדוק את המשמעות הפיזיקלית של הדיברגנט.

נניח תחום בו זורמים מים. נוכל לדמיין לעצמנו שבכל נקודה במרחב נצייר וקטור $\vec{v}$ שיהיה שווה בגודלו ובכיוונו למהירות המים בנקודה. הוקטור $\vec{v}$ מיצג שדה וקטורי. הקווים המשיקים ל- $\vec{v}$ נקראים קווי זרם (stream lines). נוכל לדון באותו מידה גם בזרימה של נוזל אחר כגון: גז, חום, חשמל או חלקיקים כלשהם. אנו נראה שאם $\vec{v}$ מיצג את מהירות הזרימה של כל אחד

מהתכונות לעיל, אזי $\text{div} \vec{V}$ יהיה קשור לכמות החומר נטו שזורם החוצה מנפח נתון. כמות החומר שזורם החוצה יכולה להיות שונה מאפס אם בגלל שנוי צפיפות למשל (יותר אויר זורם החוצה מאשר פנימה בחדר מחומם) או כתוצאה ממקור או בולע בתוך הנפח. בדיק אותה גישה עובדת גם בשדות חשמליים ומגנטיים כאשר $\vec{v}$ מייצג ע"י $\vec{E}$ (שדה חשמלי) או $\vec{B}$ (שדה מגנטי) והגודל המתאים לכמות החומר שזורמת החוצה נקרא בשם שטף חשמלי או שטף מגנטי.

נחזור לדוגמה שלנו של זרימת מים נגדיר וקטור חדש $\vec{V} = \rho \vec{v}$. כאשר ρ היא צפיפות המים בנקודה (x, y, z) . כמות המים שעוברת בזמן t דרך שטח A' אשר ניצב לכיוון הזרמים הוא

כמות המים בגליל שחתכו A' וארכו $v \cdot t$. כמות זו הנה $A' \cdot v \cdot t \cdot \rho$. ראה איור 31.1 אותה

כמות תעבור גם דרך שטח A . מכיוון ש $A' = A \cos \theta$ אזי כמות המים העוברת דרך שטח

$$A' \cdot v \cdot t \cdot \rho = vt \rho \cdot A \cos \theta$$

בזמן t תהיה:

כלומר, אם מים זורמים בכיוון $\vec{V}$ ויוצרים זווית θ עם $\vec{n}$ (וקטור יחידה) הניצב למשטח, אזי כמות המים העוברים יחידת שטח ביחידת זמן על המשטח היא: $v \rho \cos \theta = V \cos \theta = \vec{V} \cdot \vec{n}$. נוסחה זו לכמות הנוזל העוברת ביחידת שטח ביחידת זמן היא חשובה ביותר!

שים לב ש- $\vec{V}$ תלוי בזרם בלבד ו $\vec{n}$ תלוי רק במשטח!

נדון באלמנט נפח $dx dy dz$ בתחום בו המים זורמים או פנימה או החוצה מהנפח $dx dy dz$ דרך אחת משטח המשטחים $dx dy$, $dx dz$, וכו'. נוכל לחשב את הכמות נטו הזורמת החוצה.

בציור רואים שקצב הזרם הנכנס לתוך $dx dy dz$ דרך

$$\text{משטח (1)} \quad dx dz \quad \text{ניתן ע"י} \quad \vec{V} \cdot \vec{j}$$

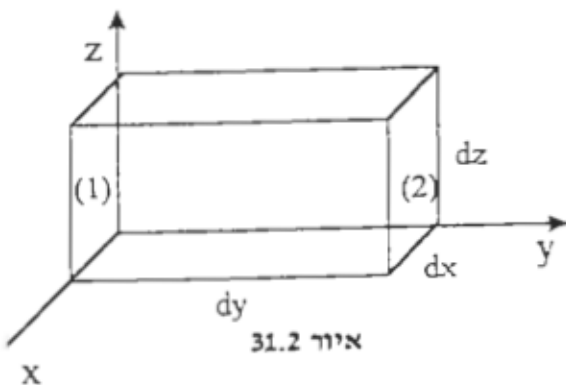
ליחידת שטח או $\vec{V} \cdot \vec{j} dx dz$ דרך כל אלמנט השטח $dx dz$.

היות ש- $\vec{V} \cdot \vec{j} = V_y$ אנו מוצאים

שקצב הזרמים (כמות ליחידת זמן) דרך משטח (1) הוא $V_y dx dz$. באותו מידה $V_x dx dz$ הוא

הקצב שהמים זורמים החוצה דרך משטח (2) אלא ש- V_y כאן הוא הערך של V_y במשטח (2) במקום (1).

אנו מעוניינים בהפרש של שני ערכי V_y : במשטח (2) פחות משטח (1) באותו x -ו- z שנסמן ΔV_y .



איור 31.2

$$dV_y = \left(\frac{\partial V_y}{\partial y} \right) dy$$

הגודל ΔV_y ניתן בקרוב ע"י

שכן $dx = dz = 0$.

ולכן זרימה החוצה נטו היא זרימה במשטח (2) פחות (1)

$$[V_y(2) - V_y(1)] dx dz = \left(\frac{\partial V_y}{\partial y} dy \right) dx dz$$

באותו אופן נקבל עבור הזרמים נטו החוצה דרך הזוגות האחרים של המשטחים

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} dx dy dz$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} dx dy dz$$

ולכן ס"ה קצב כמות המים שיוצא מהנפח $dx dy dz$ הנו:

$$\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \text{div} \vec{V} dx dy dz$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} dx dy dz$$

או

אם נחלק ב- $dx dy dz$ נקבל ש- $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ משמעותו קצב יציאת המים ליחידת נפח. זוהי המשמעות הפיזיקלית של הדיברגנט. זהו הקצב נטו (כמות מים ליחידת זמן) של הזרימה החוצה ליחידת נפח בנקודה (x, y, z) .

זו הזרימה של חומר בנוזלים, גזים או חלקיקים אחרים. בשדות חשמליים ומגנטיים גודל זה נקרא שטף חשמלי או שטף מגנטי.

שים לב שזה כמו צפיפות. צפיפות היא מסה ליחידת נפח בנקודה מסוימת (x, y, z) ויכולה להשתנות מנקודה לנקודה. אותו דבר הדיברגנט יחושב בנקודה מסוימת ויכול להשתנות מנקודה לנקודה. $\text{div} \vec{V}$ יכול להיות שונה מאפס או בגלל שנוי הצפיפות או בגלל מקור או בולע שנמצאים באזור!

נניח

ϕ - מקור נקודתי פחות בולע נקודתי שערכו הוא:

- כמות המסה של נוזל שנוצרת ביחידת נפח ביחידות זמן.

ρ - צפיפות הנוזל = מסה ליחידת נפח.

$$\text{קצב גידול המסה ליחידת נפח} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

אזי גידול המסה באלמנט $dx dy dz$ - קצב יצירה של חומר פחות קצב יציאה של חומר.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = \phi dx dy dz - \vec{\nabla} \cdot \vec{V} dx dy dz$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \phi - \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \quad (31.1)$$

אם נחלק בנפח נקבל:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \phi - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

או:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (31.2)$$

אם אין מקור או בולע אזי $\phi = 0$ ונקבל:

משוואה זו נקראת משוואת הרצף.

$$\phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \quad (31.3)$$

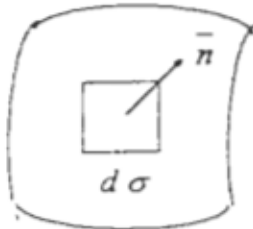
אם הנוזל הנו בלתי דחיס אזי $\rho = \text{const}$ ונקבל:

31.1. משפט הדיברגנט

משפט הדיברגנט מקשר בין אינטגרל על נפח τ לבין אינטגרל על המשטח שמקיף את הנפח, σ . ניסוח המשפט הוא:

$$\iiint_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} d\tau = \iint_{\sigma} \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma \quad (31.4)$$

כאשר $\vec{n}$ הוא וקטור יחידה ניצב לאלמנט השטח (ראה איור 31.3)



איור 31.3

משמעות שני האגפים הוא ס"ה הזרימה היוצאת מהנפח. הוכחה:

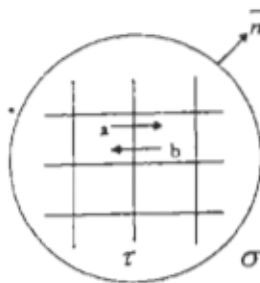
ראוי כי $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} d\tau$ כמות המסה של הנוזל שזורמת דרך $d\sigma$ ביחידת זמן מצד שני $\vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma$ ($d\tau = dx dy dz$) כמות המסה שיוצאת מאלמנט הנפח $d\tau$ ביחידת זמן.

על מנת להמחיש את ההבנה של משפט הדיברגנט נתבונן באלמנט נפח המורכב משריג של תת נפחים (ראה איור 31.4).

אם נתבונן בגודל $\sum \vec{\nabla} \cdot \vec{V} d\tau$, כאשר הסכום על כל התת

נפחים אזי גודל זה הוא גם הזרימה החוצה מכל הנפח τ .

הסיבה היא שהזרימות בתוך כל תת נפח פנימית מתבטלות. שכן בכל אלמנט שטח הזרימה מ- a ל- b שווה בדיוק לזרימה מ- b ל- a רק בסימן הפוך. לכן בכל אלמנט שטח פנימי הזרימה מתבטלת ונשארת רק הזרימה החוצה מכל הנפח τ .



איור 31.4

הסכום $\sum \vec{\nabla} \cdot \vec{V} d\tau$ כאשר $d\tau \leftarrow o$ הוא נכתב כאינטגרל כמו אגף שמאל ב- (31.4).

דוגמה:

$$\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

נחשב $\iint \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma$ על מעטפת של גליל באיור 31.5.

משמעות גודל זה הוא כמות הנוזל היוצאת מתוך הגליל

ביחידת זמן כאשר מהירותו $\vec{U}$ ניתנת ע"י $\vec{V} = P\vec{U}$.

לפי משפט הדיברגנט במקום לחשב אינטגרל זה נוכל

לחשב אינטגרל נפחי, דהיינו האינטגרל $\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{V} d\tau$

על הנפח של הגליל. כפי שנראה חישוב זה הרבה יותר קל!

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 \quad \text{נחשב}$$

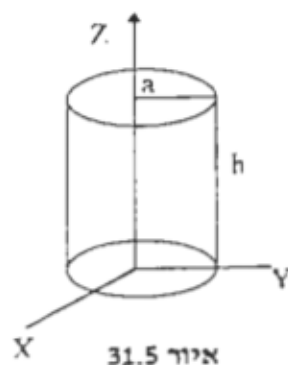
$$\iint \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{V} d\tau = \iiint 3 d\tau = 3 \cdot \pi a^2 h$$

אזי נסה לחשב את אינטגרל $\iint \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma$ באופן ישיר.

חישוב זה הרבה יותר מסובך אך נבצע זאת על מנת להראות דוגמה של חישוב אינטגרל על משטח וכדי

להמחיש את משפט הדיברגנט במקרה פרטי זה.

אנו זקוקים לחשב וקטור יחידה $\vec{n}$ ניצב למשטח.



איור 31.5

במשטח העליון (איור 31.7) $\vec{n} = \vec{k}$ ולכן $\vec{V} \cdot \vec{n} = \vec{V} \cdot \vec{k} = z = h$ ולכן במשטח

$$\text{עליון: } \int \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = h \int d\sigma = h \cdot \pi a^2$$

במשטח התחתון $\vec{n} = -\vec{k}$ $\vec{V} \cdot \vec{n} = -z = 0$

ולכן האינטגרל במשטח התחתון הוא אפס. נחשב עתה את האינטגרל של חלק המשטח הגלילי.

$$\vec{n} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{a}$$

נוכל לראות שהוקטור $x\vec{i} + y\vec{j}$ הוא ניצב למשטח ולכן

דרך שיטתית לחשב וקטור נורמלי הוא בעזרת הגרדיינט.

אם משוואת המשטח היא $\Phi = x^2 + y^2 = \text{const} = a^2$ הרי $\vec{\nabla}\Phi$ הוא וקטור מאונך למשטח

$$\vec{\nabla}\Phi = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$$

וקיבלנו אותו וקטור כמו קודם.

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = \frac{x^2 + y^2}{a} = \frac{a^2}{a} = a \quad \text{לכן}$$

$$\text{ומכאן } \int \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = a \int d\sigma = a \cdot 2\pi a \cdot h = a \cdot 2\pi a \cdot h \quad (\text{האינטגרל על המשטח הגלילי})$$

$$\text{ולכן סה"כ } \int \vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma = \pi a^2 h + 2\pi a^2 h = 3\pi a^2 h$$

גליל. כמו האינטגרל המשטחי.

משפט הדיברנט הוא מאוד חשוב בחשמל. בעזרתו וביחד עם חק גאוס ניתן לקבל את משוואת מקסוול

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad \text{כאשר } \rho \text{ צפיפות המטען, } \vec{D} \text{ הוא המעטק החשמלי המוגדר ע"י } \vec{D} = \epsilon \vec{E}, \vec{E} \text{ הוא השדה}$$

החשמלי ו- ϵ קבוע דיאלקטרי.

32. טורי פורייה

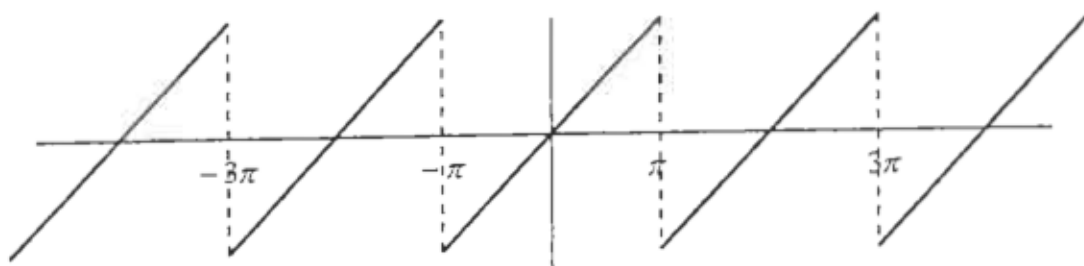
ראינו כיצד לפתח פונקציה לטור טילור בחזקות של $(x - x_0)$ לעתים קרובות פתוח כזה מאוד חשוב. נשאלת השאלה האם יש אפשרות לפתח פונקציה לטור אחר.

פורייה פתח שיטה כיצד לפתח פונקציה המוגדרת ברווח $(-l, l)$ או $(0, l)$ לטור אינסופי של פונקציות טריגונומטריות. נגדיר פונקציה מחזורית:

פונקציה $f(x)$ תקרא פונקציה מחזורית במחזור p אם לכל x קיים $f(x+p) = f(x)$. p הקטן ביותר נקרא מחזור הפונקציה.

לדוגמה $\sin x$ היא פונקציה מחזורית עם מחזור 2π שכן $f(x+2\pi) = f(x)$ לכל x .

דוגמה: פונקציה $f(x) = x$ בתחום $-\pi < x < \pi$ וממשיכה מחוץ לתחום בצורה מחזורית:



איור 32.1

משפט פורייה אומר שכל פונקציה מחזורית בעלת מחזור 2π ניתן לפתח לטור הבא

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (32.1)$$

כאשר

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

ישנם הרבה תופעות מחזוריות בטבע, כמו גל קול, גלים אלקטרומגנטיים, אוסצילטור הרמוני, תנודות אטומים וכו'. בד"כ גל קול לא כולל רק גל בתדירות אחת (טון טהור). בד"כ מקבלים גל יסודי מלווה במספר הרמוניות בתדירויות פי 2, 3, 4 וכו' מהתדירות היסודית.

אם הפונקציות המחזוריות $\sin \omega t$ ו- $\cos \omega t$ מתאימות לגל בעל התדירות היסודית הרי $\sin n\omega t$ ו- $\cos n\omega t$ מתאימות להרמוניקות הגבוהות ביותר.

הקומבינציה של הגל היסודי עם ההרמוניקות שלו היא פונקציה מחזורית מסובכת עם מחזור כשל היסודית.

אם נתונה לנו פונקציה מחזורית כלשהי נוכל לשאול עצמנו איך לכתוב אותה כקומבינציה של ההרמוניות.

בד"כ נזדרקים לכל ההרמוניות כלומר נקבל טור אינסופי. טור זה נקרא טור פורייה.

בעיתנו היא איפוא לפתח פונקציה מחזורית נתונה בטור של $\sin \omega t$ ו- $\cos \omega t$

על מנת לפשט הנוסחות בתחילה נטפל בפונקציות בעלות מחזור של 2π והפונקציות היסודיות יהיו $\sin nx$ ו- $\cos nx$. אח"כ נטפל בפונקציות בעלות מחזור שונה. הפונקציות $\sin x$ ו- $\cos x$ בעלות מחזור 2π ולכן נניח שאם $f(x)$ בעלת מחזור 2π היא נתונה לכתיבה ע"י טור פורייה:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots = \\ = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

כאשר a_n ו- b_n ניתנו למעלה.

לפני שנעבור להוכיח את הנוסחות ל- a_n ו- b_n נזדקק לאינטגרלים הבאים:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dx (\sin(m-n)x + \sin(m+n)x) =$$

לכל m ו- n

$$= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{m-n} \cos(m-n)x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{m+n} \cos(m+n)x \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = 0$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{1}{2} & m = n \neq 0 \\ 0 & m = n = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{1}{2} & m = n \neq 0 \\ 1 & m = n = 0 \end{cases}$$

אנו נצא עתה מהנחה שאמנם פתוח פורייה (32.1) אפשרי ונראה כיצד נחשב את a_n ו- b_n .

כדי לחשב את a_0 נבצע אינטגרל בין $-\pi$ ל- π בשני האגפים של (32.1).

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + a_1 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx + a_2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x dx + \dots + b_1 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx + \dots$$

באגף ימין כל האינטגרלים שווים לאפס פרט לראשון.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad \text{כלומר}$$

נחשב a_1 נכפיל (32.1) ב- $\cos x$ ונבצע אינטגרל:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx + a_1 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx + a_2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cos 2x dx + \dots + \\ + b_1 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin x dx + \dots$$

אבל כל האינטגרלים באגף ימין אפס פרט ל-

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \frac{1}{2}$$

ולכן

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx$$

השיטה ברורה עתה, כדי למצא את a_n נכפיל 2 האגפים ב (32.1) ב $\cos nx$ ונבצע אינטגרציה מ- π עד π

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx f(x) dx &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cos nx dx + a_2 \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cos nx dx + \dots + \\ &+ b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx + \dots \end{aligned}$$

כל המחוברים באגף ימין מתאפסים פרט ל-

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi$$

ולכן

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

שים לב שזה כולל גם את a_0 ולכן לקחנו המחובר הראשון $\frac{1}{2} a_0$

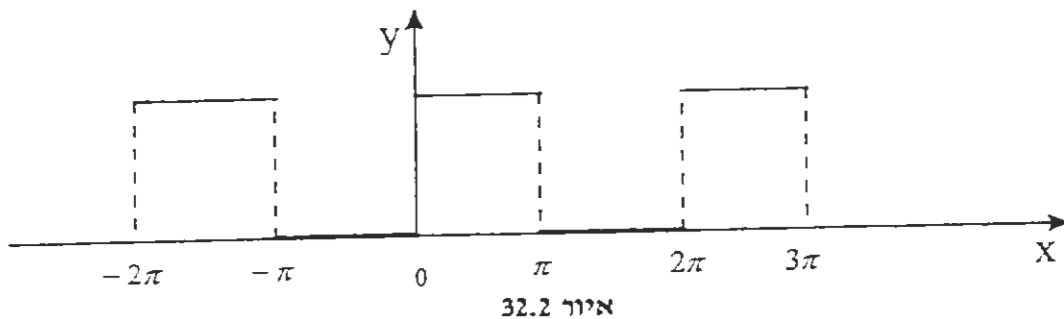
על מנת לחשב b_n נכפיל שני האגפים של (33.1) ב $\sin nx$ ונבצע אינטגרציה מ- π עד π ואז נקבל

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

הוכחנו מהם המקדמים בהנחה שהפתוח אפשרי אך לא הראנו שהפתוח קיים.

דוגמה:

פתח לטור פורייה את הפונקציה הבאה:



איור 32.2

פונקציה זו יכולה לתאר למשל פולס מתח חשמלי מחזורי. הבטויים בטור פורייה יתנו את התדירויות השונות שיוצרות "גל של מתח רבועי". וערכי המקדמים יתנו את המשקל היחסי של כל תדירות. כך מיצרים באופן מעשי במעבדה גל מתח רבועי.

שים לב כי ל- $f(x)$ מחזוריות 2π . בד"כ בבעיות יהיה טעון $f(x)$ רק עבור מחזור אחד. במקרה זה:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

והפונקציה $f(x)$ ממשיכה באופן מחזורי גם מחוץ לתחום $(-\pi, \pi)$.
נחשב את המקדמים a_n ו- b_n .

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 0 \cos nx dx + \int_0^{\pi} 1 \cos nx dx \right] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx =$$

$$= \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

עבור $n = 0$ $a_0 = 1$ ולכל n שונה מאפס $a_n = 0$.
נחשב את b_n :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 0 \sin nx dx + \int_0^{\pi} 1 \sin nx dx \right] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos nx}{n} \right)_0^{\pi}$$

$$= \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \frac{2}{n\pi} & n = 2k + 1 \end{cases}$$

ואז נקבל

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

טור זה, אם נצייר אותו נקבל את הפונקציה שבאיור.

בנקודות האי רציפות נקבל את הערך הממוצע, במקרה זה $\frac{1}{2}$.

למשל: $f(\pi) = \frac{1}{2}$, $f(0) = \frac{1}{2}$.

32.1 משפט דיריקלה:

א: אם $f(x)$ מוגדרת וחד ערכית פרט אולי למספר סופי של נקודות בחזון $(-l, l)$ אצלנו $(-\pi, \pi)$.

ב: מחזורית מחוץ ל- $(-\pi, \pi)$ עם מחזור 2π .

ג: $f(x)$ ו- $f'(x)$ רציפות למקוטעין בין $-\pi$ ל- π .

אזי טור פורייה עם מקדמיו a_n ו- b_n מתכנס

א: ל- $f(x)$ אם x נקודה רציפה.

ב: ל- $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ אם x נקודת אי רציפות.

כאשר $f(x^-)$ ו- $f(x^+)$ גבול ימני ושמאלי בהתאמה.

תנאים אלו הם מספיקים אבל לא הכרחיים ובד"כ הם קיימים בבעיות מעשיות.

כיום לא ידוע שום תנאי הכרחי ומספיק להתכנסות של טור פורייה.

בדוגמה שלנו אם נציב $x = 0$ נקבל $f(x) = \frac{1}{2}$

והסבה כיון ש $x = 0$ היא נקודת אי רציפות!

32.2 הצורה המורכבת של טורי פורייה

$$\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} = \cos nx$$

$$\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = \sin nx$$

נזכור כי:

ואם נציב קשרים אלו בפתוח לטור פורייה נקבל טור של אקספוננטים.

אנו נמצא את הטור באופן ישיר וזו דרך מקובלת יותר וקלה יותר מאשר שמוש ב $\sin nx$ ו $\cos nx$.

$$f(x) = C_0 + C_1 e^x + C_{-1} e^{-x} + C_2 e^{2ix} + C_{-2} e^{-2ix} + \dots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx} \quad (32.2) \quad \text{ניח:}$$

וננסה למצא את C_n השונים.

נחשב C_0 ע"י אינטגרציה על שני האגפים

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} C_0 dx + C_1 \int_{-\pi}^{\pi} e^x dx + C_2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{2ix} dx + \dots$$

אבל עבור $n \neq 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx = \frac{1}{in} (e^{in\pi} - e^{-in\pi}) = \frac{2}{n} (\sin n\pi) = 0 \quad \text{קיים}$$

ואילו

$$\int C_0 dx = C_0 \cdot 2\pi$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad \text{ולק}$$

ע"מ למצא את C_n ($n \neq 0$) נכפיל הטור ב e^{-inx} ונבצע אינטגרציה על x כלומר:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = C_0 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i0x} dx + C_1 \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} e^{ix} dx + C_{-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} e^{-ix} dx + \dots + C_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} e^{inx} dx + \dots$$

כל האברים חוץ מהמקדם של C_n יתאפסו ולכן נקבל

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (32.3)$$

לכל n .

שים לב שנוסחה זו נכונה לכל n חיובי, שלילי ואפס. ולכן היא קלה, יותר לזכרון ולחשובים. נחזור לדוגמה הקודמת, גל מתח ריבועי, ונפתח אותו באמצעות טור פורייה של אקספוננטים:

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 e^{-inx} 0 dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-inx} 1 dx = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-inx}}{-in} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{-2\pi in} (e^{-in\pi} - 1) = -\frac{1}{2\pi in} (\cos n\pi - i \sin n\pi - 1) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi in} & n = 2k + 1 \\ 0 & n = 2k, n \neq 0 \end{cases}$$

עבור $n = 0$ מקבלים

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{1}{2}$$

ומכאן הטור פורייה יהיה:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx} = \frac{1}{2} + \frac{1}{i\pi} \left(\frac{e^{ix}}{1} + \frac{e^{3ix}}{3} + \frac{e^{5ix}}{5} + \dots \right) + \frac{1}{i\pi} \left(\frac{e^{-ix}}{-1} + \frac{e^{-3ix}}{-3} + \frac{e^{-5ix}}{-5} + \dots \right)$$

כך לראות שזה אמנם הטור הקודם:

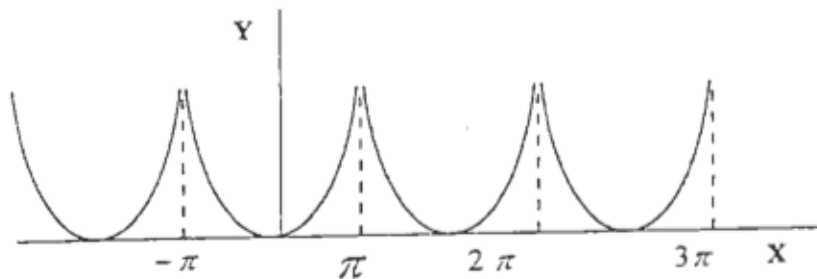
$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} + \frac{1}{3} \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} + \dots \right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots \right)$$

32.3 פונקציות מחזוריות כלליות

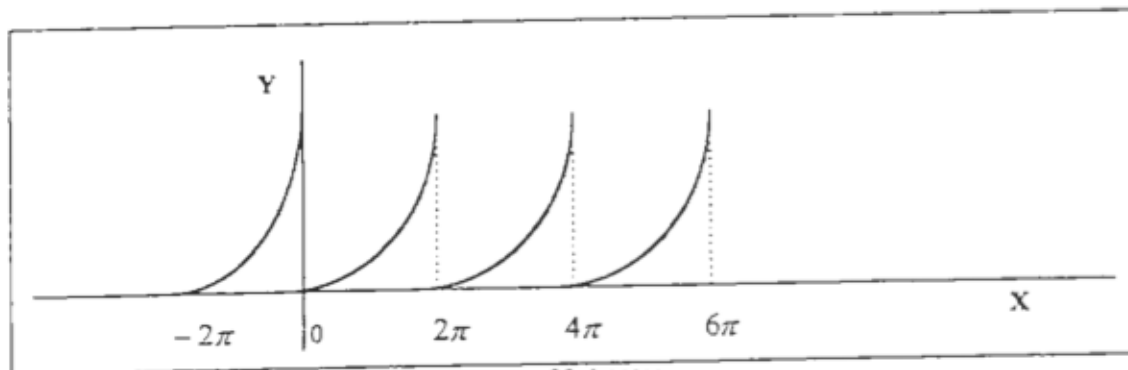
עד כה דנו בפונקציות בעלות מחזור 2π .
 לכן פתחנו בעזרת הפונקציות $\sin x$, $\cos x$, e^{ix} שלהם יש מחזור של 2π .
 הערה: שים לב כי האנטגרל שבצענו לחשב a_n , b_n , c_n עשוי בין $-\pi$ ל- π .
 אם הפונקציה המחזורית היא בין 0 ל- 2π נבצע גם את האנטגרלים בין 0 ל- 2π או בין כל רווח
 אחר שגודלו 2π .

יש חשיבות גדולה לשרטט הגרף ע"מ לראות באופן בחר באיזה תחום מדובר.
 למשל נתונה הפונקציה $f(x) = x^2$ בין $(-\pi, \pi)$ והיא ממשיכה מחזורית לכל תחום אזי הגרף
 נראה כמו באיור 32.3:



איור 32.3

בעוד שאם נתונה הפונקציה $f(x) = x^2$ בין $(0, 2\pi)$ והיא ממשיכה מחזורית לכל תחום זה
 יראה אחרת כמו איור 32.4.



איור 32.4

לכן במקרה הראשון נצטרך לקחת אנטגרל מ- $-\pi$ עד π כדי למצא המקדמים.
 בעוד שבמקרה השני האנטגרל מ-0 עד 2π .
 בעיות בפיסיקה לא מופיעות תמיד עם מחזוריות של 2π .
 נניח שנדון בפונקציה שמחזור 2/ נצטרך לפתח את הפונקציה לפונקציות בעלות מחזור של 2/.

וזאת קל לקבל

לפונקציות $\sin \frac{n\pi x}{l}$, $\cos \frac{n\pi x}{l}$ -1 $e^{\frac{i n \pi x}{l}}$ יש מחזור $2l$. ואמנם

$$\sin \frac{n\pi}{l}(x+2l) = \sin \left(\frac{n\pi x}{l} + 2n\pi \right) = \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$\text{וכך לגבי } e^{\frac{i n \pi x}{l}} -1 \cos \frac{n\pi x}{l}$$

ואז נניח פתוח לטור הבא

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{l} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + \dots + b_1 \sin \frac{\pi x}{l} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{i n \pi x}{l}}$$

וכן

שים לב שכאשר $2l = 2\pi$ כלומר $l = \pi$ חוזרים לבטויים הקודמים.

באותה דרך כמו קודם קל להוכיח כי

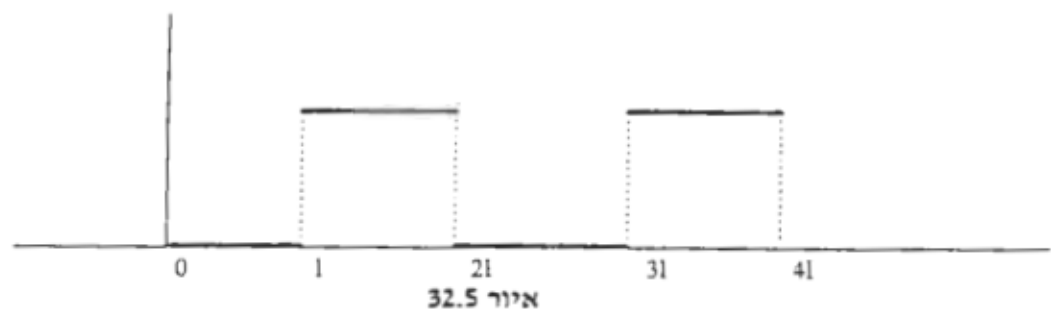
$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{\frac{-i n \pi x}{l}} dx$$

אם הרווח הבסיסי הוא $(0, 2l)$ האנטגרל פשוט משתנה מ-0 עד $2l$.
דוגמה: נתונה פונקציה

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < l \\ 1 & l < x < 2l \end{cases}$$

פתח $f(x)$ לטור פורייה אקספוננציאלי בעל מחזור $2l$ (ראה איור 32.5).

$$C_n = \frac{1}{2l} \int_0^l 0 dx + \frac{1}{2l} \int_l^{2l} 1 e^{\frac{-inx}{l}} dx$$

$$= \frac{1}{2l - in\pi/l} \Big|_l^{2l} = -\frac{1}{2in\pi} (e^{-2inx} - e^{-inx}) =$$

$$= -\frac{1}{2in\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0 & n = 2k, n \neq 0 \\ -\frac{1}{in\pi} & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$e^{-i2n\pi} = \cos 2n\pi - i \sin 2n\pi = 1$$

$$e^{-inx} = \cos n\pi - i \sin \pi = \cos n$$

$$C_0 = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} dx = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{i\pi} \left(e^{\frac{i\pi x}{l}} - e^{\frac{-i\pi x}{l}} + \frac{1}{3} e^{\frac{3i\pi x}{l}} - \frac{1}{3} e^{\frac{-3i\pi x}{l}} + \dots \right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \right)$$

32.4 פונקציות זוגיות ואי זוגיות

בפתות לטור פורייה רצוי להבחין בין פונקציה זוגית לאיזוגית. כבר הגדרנו

פונקציה $f(x)$ תקרא **זוגית** אם $f(x) = f(-x)$

דוגמאות: $e^x + e^{-x}$, $\cos x$, $2x^4 - 3x^2 + 7$, x^4

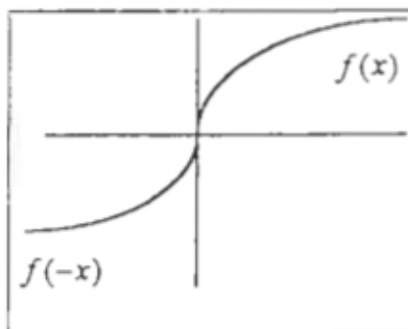
פונקציה $f(x)$ תקרא **איזוגית** אם $f(x) = -f(-x)$

דוגמאות: $\lg 3x$, $\sin x$, $x^3 - 7x^2 + 2x$, x^3

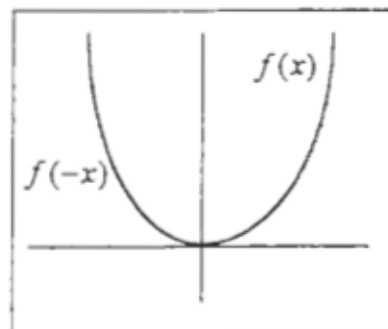
יש פונקציות שאינם זוגיות ואינם איזוגיות למשל $y = x + 3$.

תאור גרפי של פונקציה איזוגית

תאור גרפי של פונקציה זוגית



איור 32.7



איור 32.6

משפט:

בטור פורייה של פונקציה זוגית יופיעו רק אברי הקוסינוס (+ הקבוע)

בטור פורייה של פונקציה אי זוגית יופיעו רק אברי הסינוס.

הוכחה: נוכיח כי לפונקציה זוגית $b_n = 0$ לכל n .

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^0 f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{1}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx =$$

נציב באינטגרל הראשון $x = -u$ ונקבל

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^0 f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = -\frac{1}{l} \int_l^0 f(-u) \sin \frac{-n\pi u}{l} du =$$

$$= -\frac{1}{l} \int_0^l f(u) \sin \frac{n\pi u}{l} du$$

כלומר:

$$b_n = -\frac{1}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{1}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0$$

זה נובע גם מהעובדה שמכפלה של פונקציה זוגית באי זוגית נותנת פונקציה אי זוגית

והאינטגרל על פונקציה איזוגית מ-1 עד 1 נותן 0 בגלל השטחים השווים בסימנים הפוכים

המבטלים זה את זה.

אם $F(x)$ היא מכפלה של פונקציה זוגית באי זוגית הרי היא פונקציה אי זוגית וקיים:

$$\int_{-L}^L F(x) dx = 0$$

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = -f_1(-x) \cdot f_2(-x) \quad \text{הוכחה:}$$

פונקציה אי זוגית! = אי זוגית $\times$ זוגית

$$: f_1(-x) = f_1(x)$$

$$f_2(-x) = -f_2(x) \quad \text{שכן}$$

ומכאן $f_1(-x)f_2(-x) = -f_1(x)f_2(x)$ והמכפלה החא פונקציה אי זוגית.

כאשר $f(x)$ היא אי זוגית $a_n = 0$. הוכחה:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^0 f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{1}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx =$$

$$x \rightarrow -x$$

$$= -\frac{1}{l} \int_l^0 f(-x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{1}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx =$$

$$= -\frac{1}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{1}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0$$

10.3 PARSEVAL משפט

משפט פרסוול במסגרת בין ממוצע של ריבוע פונקציה $f(x)$ במחזור והמקדמים של פורייה. מטרת המשפט אינה לחשב ממוצעים אלא להראות קשר חזק בין ממוצעים של $f^2(x)$ במקדמי פורייה.

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{ניח}$$

נעשה בריבוע את $f(x)$ ואז נחשב ממוצע מ- $-\pi$ עד π .

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \quad \text{הממוצע של } f^2(x) \text{ הוא}$$

כאשר מעלים בריבוע את שני האגפים מקבלים ביטויים רבים. כדי למנוע כתובת רבים מהם נדון אינו סיני ביטויים מופיעים ומה הממוצע שלהם. תחילה מופיעים כל הביטויים האנטיסימטרים ושתמש בעבודה 9.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2}$$

סוראים לבטל זה ממוצע של $\sin^2 nx$ ו- $\cos^2 nx$.

$$\frac{1}{4}a_0^2 \quad \text{הוא } \left(\frac{1}{2}a_0\right)^2 \text{ ממוצע של}$$

$$a_n^2 \cdot \frac{1}{2} \quad \text{הוא } (a_n \cos nx)^2 \text{ ממוצע של}$$

$$b_n^2 \cdot \frac{1}{2} \quad \text{הוא } (b_n \sin nx)^2 \text{ ממוצע של}$$

ועכשיו יש ביטויים מעורבים מהצורה

$$2 \cdot \frac{1}{2} a_0 a_n \cos nx, 2 \cdot \frac{1}{2} a_0 b_n \sin nx, 2 a_n b_m \cos nx \cos mx (m \neq n)$$

ממוצע של כל הביטויים האלה הוא אפס!

ולכן משפט Parseval:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \quad \text{ממוצע}$$

33. משוואות דיפרנציאליות - מבוא

משוואה דיפרנציאלית (מ"ד) היא משוואה הכוללת נגזרות או דיפרנציאלים.
דוגמאות:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - y = 0 \quad (33.1)$$

$$dy = (x + 2y)dx \quad (33.2)$$

$$y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2x \frac{dy}{dx} - y = 0 \quad (33.3)$$

בפניקה ודאי נתכלתם במשוואות דיפרנציאליות.

למשל אם ידועה התאוצה $\frac{d^2 y}{dt^2} = -5$ מהו y .

משוואות דיפרנציאליות יש להם חשיבות עצומה בפיסיקה במיוחד בבעיות שיל תנועה (דינמיקה).

משוואה דיפרנציאלית המכילה משתנה בלתי-תלוי אחד ולכן יש בה רק נגזרות רגילות נקראת משוואת דיפרנציאלית רגילה.

אם יש שני משתנים בלתי-תלויים או יותר, אז המשוואה מכילה נגזרות חלקיות והיא נקראת משוואת דיפרנציאלית חלקיות.

דוגמה:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (33.4)$$

המשוואות הקודמות היו מ"ד רגילות, אני במסגרת קורס זה נעסוק במ"ד רגילות ונקרא להם משוואות דיפרנציאליות.

מכיוונים משוואות דיפרנציאליות לסוגים שונים על פי סדר ומעלה (degree-order).

הסדר של משוואה דיפרנציאלית הוא סדר הנגזרת הגדול ביותר המופיע במשוואה.

משוואה (33.1) הוא מסדר שני.

משוואות (33.2) (33.3) הם מסדר ראשון.

המשוואה (33.4) $\frac{d^3 y}{dx^3} - 5x \frac{dy}{dx} = 8$ היא מסדר שלוש.

המעלה של משוואה דיפרנציאלית היא המעלה של הנגזרת בעלת הסדר הגבוהה ביותר.

משוואה (33.1) (33.2) (33.4) ממעלה ראשונה

משוואה (33.3) ממעלה שניה.

המשוואה (33.5) $x \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 7$ (33.5)

היא ממעלה ראשונה.

פתרון של משוואה דיפרנציאלית היא פונקציה המקיימת את המשוואה זהותית (לכל x).
לדוגמה:

משוואה (33.1) $\frac{d^2 y}{dx^2} - y = 0$

אם נניח

התוצאה היא:

התוצאה היא:

1) מצא מ"ד שהפונקציה $x^2 - y^2 - 2cx = 0$ פתרון שלה.

נזכר לפי א $2x - 2y \frac{dy}{dx} - 2c = 0$

נחלק את C:

$$x - y \frac{dy}{dx} = c$$

נציב בפונקציה הפרמיטיבית:

$$x^2 - y^2 - 2 \left(x - y \frac{dy}{dx} \right) x = 0$$

או $x^2 - y^2 - 2x^2 + 2xy \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y^2 - x^2 + 2xy \frac{dy}{dx} = 0$

שים לב כי יביטו לחלק את הקבוע ע"י גזירה נוספת

$$1 - y \frac{d^2 y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0$$

אזכר: זו לא המשוואה מהסדר הנמוך ביותר שניתן לסבב ולכן זו אינה המשוואה הדרושה.

2) לבד את המשוואה ההומוגנית אשר הפתרון הכללי הוא

נזכר 3 פעמים $y = C_1 x^3 - C_2 x - C_3$

$$y' = 3C_1 x^2 - C_2$$

$$y'' = 6C_1 x$$

$$y''' = 6C_1$$

נציב המשוואה האחרונה במשוואה הסודמת ונסבב

$$y'' = y''' x$$

כנזכר זו המשוואה המבוקשת.

34.1 הפרדת משתנים

$$y = \int f(x) dx$$
$$\frac{dV}{dt} = f(x)$$
$$\dot{\psi} = f(x)dx$$

סיכומים:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2} = \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2} dx = \frac{1}{\sigma}$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = \mathcal{I}^\alpha f(t)$$

[illegible]

$$1 = 2^{-1} = 2^{-1} = 2^{-1} = 2^{-1}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$$

62

$$\Delta y' = y - 1 \quad \therefore y = 1$$

$$\frac{dy}{dx} \frac{1}{y-1} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{y-1} dy = \frac{1}{x} dx$$

$$\ln(y+1) = \ln x + C = \ln(ax)$$

$$y' + 1 = ax$$

$$\gamma = \alpha x - 1$$

(3)

פתור

$$e^{x^2} \sec y dx - \frac{1}{y} \sin y dy = 0 \quad / -x / \sec y$$

$$e^{x^2} x dx - \cos v \sin v dv = 0$$

$$\int e^{x^2} x dx + \int \cos y \sin y dy = C$$

$$\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 y = C$$

או הפתרון:

$$e^{2x} - \sin^2 y = C$$

(4)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 x}$$

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$\int dy = -\cot x + C$$

$$y = \arctan(-\cot x - C)$$

התחלנו ללמוד פתרון סוגים שונים של משואות דיפרנציאליות מסדר ראשון וממעלה ראשונה. טיפלנו במקרה של הפרדת משתנים.

אם המשוואה מהצורה $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ או $dy = f(x, y)dx$ נאם

$$f(x, y) = \frac{A(x)}{B(y)}$$

אזי ניתן לכתוב

$$B(y)dy - A(x)dx = 0$$

וניתן לבצע אינטגרל על שני אגפים

$$\int B(y)dy - \int A(x)dx = const$$

וכך לפתור המשוואה.

נראה דוגמה נוספת

(5)

$$\cot x y' = -(y+3)$$

$$F(x, y) = -(y+3) \tan x$$

$$\frac{dy}{dx} = -(y+3) \tan x$$

$$\frac{dy}{y+3} + \tan x dx = 0$$

$$\ln(y+3) - \ln \cos x = C$$

$$y+3 = const \cdot \cos x$$

$$y = -3 - k \cos x$$

ניתן להוכיח שזה פתרון ע"י גזירה

אגף שמאל:

$$\frac{dy}{dx} = -k \sin x$$

אגף ימין:

$$-(y+3) \tan x = -k \cos x \tan x = -k \sin x$$

$$\cos z \frac{dz}{dx} - \frac{dz}{x} = 0$$

$$\sin z - \ln x = C$$

$$\sin z = \ln x - C$$

$$z = \arcsin(\ln x - C)$$

$$y = x \arcsin(\ln x - C)$$

ראוי להעיר שבשיטה זו ניתן גם לעתים לפתור במעלה שניה.
לדוגמה:

$$x(y'^2 - 1) = y$$

$$y'^2 - 1 = \frac{y}{x}$$

$$y' = \sqrt{\frac{y}{x} + 1} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{y}{x} = z \quad y = xz$$

$$\frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx} = \sqrt{z^2 + 1}$$

$$x \frac{dz}{dx} = \sqrt{z^2 + 1} - z$$

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1} - z} - \frac{dz}{x} = 0$$

דוגמה (2):

$$(y^2 - xy)dx - 3x^2 dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 - xy}{3x^2} = -\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{y}{x} = z$$

$$\frac{dy}{dx} = z - x \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{3}(z^2 + z)$$

$$x \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{3}z^2 - \frac{4}{3}z$$

$$\frac{dz}{\frac{1}{3}(z^2 + 4z)} - \frac{dz}{x} = 0$$

$$\frac{3dz}{z^2 + 4z + 4 - 4} - \frac{dz}{x} = 0$$

ברור שיש כל משוואה ניתנת להפרדת משתנים.
לדוגמה:

$$dy = \cos(xy) dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos(xy) + \frac{1}{x}$$

נעבור עתה לטיפול בסוג פשוט אחר של משוואות מסדר ראשון, שניתן להביא להפרדת משתנים.

10.1 משוואות של הנדסא

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

סוג שני של משוואות נחלק מהצורה

כאשר

$$F(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

במקרה זה נציב במסוים $z = \frac{y}{x}$

$$y = xz \quad \frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}$$

נקבל באגף שמאל:

כדומר נקבל

$$z + x \frac{dz}{dx} = g(z)$$

$$x \frac{dz}{dx} = g(z) - z$$

$$\frac{dz}{g(z) - z} = \frac{dx}{x}$$

ואז

$$\int \frac{dz}{g(z) - z} = \int \frac{dx}{x} = \text{const}$$

לדוגמה:

$$xy' = \left(x \sec\left(\frac{y}{x}\right) + y \right) / x$$

$$y' = \sec\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

נציב

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xz$$

$$\frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx} = \sec z + z$$

$$x \frac{dz}{dx} = \sec z$$

$$\frac{dz}{\sec z} = \frac{dx}{x} = 0$$

$$\frac{3dz}{(z-2)^2-4} - \frac{dx}{x} = 0$$

$$\frac{3}{4} \ln \frac{z}{z-4} - \ln x = C$$

$$3 \ln \frac{y}{y-4x} - 4 \ln x = C'$$

BRUNNEN

$$\frac{y^3 x^4}{(y-4x)^3} = C''$$

34.3 מעדמים לינאריים ב- x ו- y

סוג שלישו של משוואות שאפשר להביאם בצורה של הפרדת משתנים הם משוואות מהצורה

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$$

אם $c_1 = c_2 = 0$ אזי נקבל את המסרה הפרטית

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(a_1x + b_1y)}{a_2x + b_2y} = -\frac{a_1 + b_1 \frac{y}{x}}{a_2 + b_2 \frac{y}{x}}$$

שזה המסרה השקדים.

אולם אם c_1 או c_2 או שניהם שונים מאפס אזי לא מסבילים תוצאה כזו.

אזכר ניקח להתגבר על קושי זה ע"י החלפת משתנה. נציב משתנה חדש

$$u = x - \alpha$$

$$v = y - \beta$$

כאשר α ו- β נבדע אותם אח"כ

אזי נקבל

$$x = u + \alpha$$

$$y = v + \beta$$

$$(a_1u + b_1v + (a_1\alpha + b_1\beta + c_1))du + (a_2u + b_2v + (a_2\alpha + b_2\beta + c_2))dv = 0$$

למאורת אזי באותה בעיה כמסודם כיון שיש לנו קבוע. אזכר אין הדבר כן שכן אזי יכולים

לבחור את α ו- β כרצוננו.

ואזכרם נבחר אותם כך שידוימו את סט המשוואות

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta = -c_1 \\ a_2\alpha + b_2\beta = -c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta = -c_1 \\ a_2\alpha + b_2\beta = -c_2 \end{cases}$$

ואז נקבל משואה

$$(a_1u + b_1v)du + (a_2u + b_2v)dv = 0$$

משואה שניתנת לפתירה בהפרדת משתנים.

לדוגמה:

$$(2x - y)dx + (x - 2y - 3)dy = 0$$

נציב

$$x = u + \alpha$$

$$y = v + \beta$$

$$(2u - v + 2\alpha - \beta)du + (u - 2v + \alpha - 2\beta - 3)dv = 0$$

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = 0 \\ \alpha - 2\beta - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = 0 \\ \alpha - 2\beta - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -2 \end{cases}$$

המשוואה הפרטית

$$(2u - v)du - (u - 2v)dv = 0$$

$$\frac{dv}{du} = -\frac{2u - v}{u - 2v} = -\frac{2 - \frac{v}{u}}{1 - 2\frac{v}{u}}$$

$$z = \frac{v}{u} \quad v = uz$$

$$\frac{dv}{du} = z - u \frac{dz}{du} = \frac{z - 2}{1 - 2z}$$

$$(1 - 2z) \left(z - u \frac{dz}{du} \right) = z - 2$$

$$z - u \frac{dz}{du} - 2z^2 - 2zu \frac{dz}{du} = z - 2$$

$$\frac{dz}{du} (u - 2zu) = 2z^2 - 2$$

$$\frac{dz}{du} = \frac{2(z^2 - 1)}{u(1 - 2z)}$$

$$\frac{dz(1 - 2z)}{z^2 - 1} - 2 \frac{du}{u} = 0$$

$$\int \frac{dz}{z^2 - 1} - \int \frac{2z dz}{z^2 - 1} - 2 \int \frac{du}{u} = \text{const}$$

$$\frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z + 1} \right)$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{z - 1}{z + 1} - \ln(z^2 - 1) - 2 \ln u = \text{const}$$

$$\frac{(z - 1)^{1/2}}{(z^2 - 1)^{1/2} u^2} = c$$

$$\frac{(z - 1)}{(z^2 - 1)^{1/2} (z - 1) u^4} = c$$

$$(z - 1)(z + 1)^{1/2} u^4 = k$$

$$\left(\frac{v}{u} + 1 \right)^{1/2} \left(\frac{v}{u} - 1 \right) u^4 = k$$

הצורה
ל

34.4 משוואות לינאריות

משוואה בהצורה:

$$y' - Py = Q \quad (34.6)$$

כאשר P ו- Q פונקציות של x בקבוצה נראת משוואה לינארית מסדר ראשון. נראה כיצד לפתור משוואה כזו. נדון תחילה במקרה הפשוט $Q = 0$. אז המשוואה נראת הומוגנית והיא

$$y' - Py = 0 \quad (34.7)$$

א

$$\frac{dy}{dx} = Py$$

$$\frac{dy}{y} = P dx$$

$$\ln y = \int P dx + c$$

$$y = e^{\int P dx + c} = A e^{\int P dx} \quad A = e^c$$

למשוואה הומוגנית

$$I = \int P dx$$

$$\frac{dy}{dx} = P y$$

$$\frac{dy}{dx} = P y$$

ואז הפתרון

$$y = A e^{I}$$

א

$$y e^I = A$$

נחזור משוואה זו לפי א

$$\frac{d}{dx}(y e^I) = y' e^I + y e^I P = y' e^I + y e^I P = e^I (y' + P y)$$

נחזור למשוואה המקורית

$$y' + P y = Q$$

נכפיל ב e^I שני האגפים

$$(y' + P y) e^I = Q e^I$$

נציב התוצאה הקודמת ונקבל

$$\frac{d}{dx}(y e^I) = Q e^I$$

היות ו- Q ו- e^I פונקציות של x בקבוצה, אזי נוכל לבצע אינטגרציה על שני אגפים

$$y e^I = \int Q e^I dx + c$$

$$y = e^{-I} \left(\int Q e^I dx + c e^I \right) \quad (34.8)$$

ונקבל פתרון

כאשר

$$I = \int P dx$$

יהי הפתרון הכללי של משוואה (34.5) יש בו קבוע אחד.

מדאי לדעת פתרון כללי זה כיון שמשוואה דינאמית מסדר ראשון מופיעה לעתים סדומות.

דוגמה:

$$x^2 y' - 2xy = \frac{1}{x}$$

בצורה שקנו

$$y' - \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^3}$$

$$P = -\frac{2}{x} \quad Q = \frac{1}{x^3}$$

$$I = \int P dx = -\int \frac{2}{x} dx = -2 \ln x$$

$$e^I = e^{-2 \ln x} = \frac{1}{x^2}$$

$$y = x^2 \int \frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{x^2} dx - cx^2$$

$$y = x^2 \left(-\frac{1}{4x^2} \right) - cx^2$$

$$y = -\frac{1}{4x^2} - cx^2$$

דוגמה 2:

$$xy' - (1-x)y = e^x \quad / x$$

$$y' - \frac{1-x}{x}y = \frac{e^x}{x}$$

$$P(x) = \frac{1-x}{x}$$

$$Q(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$I = \int P dx = \int \frac{1-x}{x} dx = \ln x + x$$

והפתרון

$$y = e^{-I} \int Q(x) e^I dx - ce^{-I}$$

$$e^I = e^{\ln x + x} = xe^x$$

$$y = \frac{e^{-x}}{x} \int \frac{e^x}{x} xe^x dx - \frac{c}{x} e^{-x} = \frac{e^{-x}}{x} \int e^{2x} dx - \frac{c}{x} e^{-x} = \frac{e^{-x}}{2x} \cdot e^{2x} - \frac{c}{x} e^{-x}$$

$$y = \frac{1}{x} \left(\frac{e^x}{2} - ce^{-x} \right)$$

35. משוואות לא ליניאריות

35.1 משוואות ברנולי

משוואות דיפרנציאליות לא ליניאריות ניתנות לעיתים להפכה למשוואות ליניאריות ע"י טרנספורמציה מתאימה.

דוגמה משוואת מהצורה

$$y' - P(x)y = Q(x)y^k \quad (35.1)$$

כאשר k הוא כל מספר ממשי.

משוואה זו נקראת בשם משוואת ברנולי (מתמטיקאי שחי בשנים 1654-1705) שהוא פתח אותה לראשונה.

נראה את הדרך הפתרון.

נכפיל את המשוואה ב- y^{-k} ונקבל

$$y^{-k}y' - P(x)y^{-k+1} = Q(x)$$

לעיתים קוראים למשוואה זו משוואת ברנולי.

נציב

$$y^{-k+1} = v$$

$$(1-k)y^{-k}y' = v'$$

$$\frac{v'}{1-k} - P(x)v = Q(x)$$

כלומר סיבגנו מיד משוואה ליניארית ב- v שאותה אנו יודעים לפתור.

דוגמה:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = (x^2 + 4)y^{-1}$$

$$y^2 \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y^3 = x^2 + 4$$

$$y^3 = v$$

$$3y^2 \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{1}{3} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = x^2 + 4 \quad / \cdot 3$$

$$\frac{dv}{dx} + \frac{3}{x}v = 3(x^2 + 4)$$

זוהי המשוואה ליניארית מהצורה

$$\frac{dv}{dx} + Pv = Q$$

נחשב את

$$I = \int P dx = \int \frac{3}{x} dx = 3 \ln x$$

הפתרון

$$v = e^{-x} \int Q e^x dx - c e^{-x}$$

$$e^x = e^{3 \ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$$

$$v = \frac{1}{x^3} \int 3(x^2 - 4)x^3 dx - c x^{-3} = \frac{3}{x^3} \left(\frac{x^6}{6} - x^4 \right) - c x^{-3}$$

$$v = y^3$$

$$y^3 = \frac{x^3}{2} - 3x - c x^{-3}$$

ישנם עוד משוואות שאפשר להביאם לצורה של משוואה לינארית ע"י הצבה המתאימה.

נושא זה די קשה ודרוש מומחית רבה.

דוגמאות:

$$\sin y y' - \sin x \cos y = \sin x$$

נשים לב כי הנגזרת של $\cos y$ היא $-\sin y y'$ ולכן נקח $\cos y = u$

$$\frac{du}{dx} - \sin x u = -\sin x$$

וזו משוואה לינארית הניתנת לפתרון

$$I = \int P dx = \int -\sin x dx = \cos x$$

$$u = e^{-I} \int Q e^I dx + c e^{-I}$$

$$e^I = e^{\cos x}$$

$$u = e^{-\cos x} \int (-\sin x) e^{\cos x} dx - c e^{\cos x}$$

$$z = \cos x \quad dz = -\sin x dx$$

$$u = e^{-\cos x} \int e^z dz + c e^{\cos x} = e^{\cos x} e^{-\cos x} + c e^{\cos x} = 1 + c e^{\cos x}$$

$$u = \cos y$$

$$y = \arccos u = \arccos(1 + c e^{\cos x})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - y^3}{3xy^2} = \frac{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^3}{3\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

נציב

$$y = xz \quad z = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx} = \frac{1 - z^3}{3z^2}$$

$$z + x \frac{dz}{dx} = \frac{1}{3z^2} - \frac{1}{3}z$$

$$x \frac{dz}{dx} = \frac{1}{3z^2} - \frac{2}{3}z$$

$$\frac{dz}{dz} = \frac{dz}{z^2} = \frac{dz}{z}$$

$$\frac{z^2 dz}{\frac{1}{3}(1 - 2z^3)} = \frac{dz}{x}$$

$$-\frac{1}{2} \ln(1 - 2z^3) = \ln x + C$$

$$(1 - 2z^3)^{-1/2} = xk$$

$$x \left(1 - 2 \left(\frac{y}{x} \right)^3 \right)^{-1/2} = k$$

$$x^2 \left(\frac{x^3 - 2y^3}{x^3} \right) = k^2 = k'$$

הפתרון:

ג.

$$x^3 - 2y^3 = k'x$$

$$y \ln y dx + (x - \ln y) dy = 0$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y \ln y} x = \frac{1}{y}$$

זו משוואה לינארית ב- x כאשר y משתנה ביצד.

35.2 משואות קלר Clairaut.

משואות קלר היא סוג של משואה מסדר ראשון אך ממעלה גבוהה יותר מאחד. צורת המשואה היא:

$$y = xy' - f(y') \quad (35.2)$$

כאשר $f(y')$ היא פונקציה כלשהי של y' .

בשנת 1734 קלר ציין שהפתרון של משואה זו הוא פשוט $y' = c$. ואמנם אם נניח פתרון כזה יגיעי נדבן

$$y = cx - f(c)$$

$$\frac{dy}{dx} = c$$

ואמנם

דוגמה:

$$xy'^2 - xy' - 3 = 0$$

נוכח כדלה

$$y = -x^2 + \frac{3}{y'}$$

שזו משואת קלר

נציב $y' = C$ ונקבל

$$y = Cx - \frac{3}{C}$$

כאשר C קבוע כלשהו.

דוגמאות כלליות:

א. מצא הפתרון הפרטי של $(1-x^2)dy - x^2ydx = 0$ המקיים תנאי התחלה $y=2$ $x=1$.

$$\frac{dy}{y} - \frac{x^2 dx}{1+x^3} = 0$$

$$\ln y - \frac{1}{3} \ln(1+x^3) = c$$

$$y^3 = k(1+x^3)$$

$$2^3 = k(2) = 2k$$

$$k = 4$$

ולכן הפתרון

$$y^3 = 4(1+x^3)$$

ב. פתור

$$(x^3 + y^3)dx - 3xy^2 dy = 0$$

משואה זו נחלק ב- x^3 ונקבל הומוגנית

37. דוגמאות שימושיות למשוואות ממעלה ראשונה.

1) אוכלוסיות ארץ גדלה פי 2 ב-50 שנה. בכמה שנים תגדל פי 3 אם מניחים שקצב הגדלה פרופורציוני למספר התישבים.

נסמן ב- y את האוכלוסיה בזמן t (שנים) ובי- y_0 את האוכלוסיה בזמן $t=0$. מתוך ההנחה:

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

או

$$\frac{dy}{y} = kdt$$

נבצע אינטגרציה

$$\ln y = kt + C$$

$$y = Ce^{kt}$$

כאשר $t=0$, $y=y_0$ ולכן

$$y = y_0 e^{kt}$$

כאשר $t=50$, $y=2y_0$ ולכן נקבל

$$2y_0 = y_0 e^{50k} \Rightarrow e^{50k} = 2$$

כאשר $y=3y_0$ נקבל

$$3y_0 = y_0 e^{kt} = y_0 (e^{50k})^t = y_0 (2)^{t/50}$$

$$3^{50} = 2^t \Rightarrow t \approx 79 \text{ שנים}$$

ומכאן

2) לפי חס הדרור של ניוטון, קצב התקררות של חומר, הנמצא באוויר נע, פרופורציוני להפרש בין טמפרטורת החומר וטמפרטורת האוויר.

אם טמפרטורת האוויר 30°C וידוע שהחומר מתקרר מ- 100°C ל- 70°C במשך 15 דקות, מצא מתי טמפרטורת החומר תהיה 40°C תהיה T טמפרטורה החומר בזמן t . אזי מתקיים

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 30)$$

או

$$\frac{dT}{T-30} = -kdt$$

$$\ln(T-30) = -kt + C$$

$$T-30 = Ce^{-kt}$$

נניח

$$T=100 \quad t=0$$

$$T=70 \quad t=15$$

$$e^{\int 2x dx} = e^{\frac{1}{2}x^2} = e^{x^2} = y^{-4}$$

הינה גורם האינטגרציה לבן ע"י הכפלת המשוואה במוסד זה נקבל משוואה מדויקת:

$$\left(2xe^x - \frac{2x}{y} - \frac{1}{y^3} \right) dx + \left(x^2e^x - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4} \right) dy = 0$$

ואז

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xe^x - \frac{2x}{y^2} - \frac{3}{y^4}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2xe^x - \frac{2x}{y^2} - \frac{3}{y^4}$$

לכן

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2xe^x - \frac{2x}{y^2} - \frac{3}{y^4}$$

$$u = x^2e^x - \frac{x^2}{y} - \frac{x}{y^3} + C$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2e^x - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4} - C'(y) = x^2e^x - \frac{x^2}{y^2} - \frac{3x}{y^4}$$

$$C'(y) = 0$$

$$C(y) = C$$

ואז נקבל הפתרון:

$$u(x,y) = x^2e^x - \frac{x^2}{y} - \frac{x}{y^3} = C$$

מספר 3
פירוק

$$(\cos y - y \cos x)dx - (\sin x - x \sin y)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\sin y - \cos x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \cos x - \sin y$$

מספר המשוואה מדויקת

$$(\cos y dx - x \sin y dy) - (y \cos x dx - \sin x dy) = 0$$

סך כראות:

$$d(x \cos y) - d(y \sin x) = 0$$

הפתרון:

$$x \cos y + y \sin x = C$$

דרך ב'

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos y - y \cos x$$

$$u = x \cos y - y \sin x - \phi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x \sin y - \sin x - \phi'(y) = \sin x - x \sin y$$

$$\phi'(y) = 0$$

$$\phi(y) = C$$

ואז הפתרון

$$x \cos y - y \sin x = C$$

36.1 גורם אינטגרציה

אם המשוואה (36.2) $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ אינה מדויקת מחפשים גורם אינטגרציה

בו מכפילים את המשוואה כולה ומקבלים משוואה מדויקת.

כללים לגורם אינטגרציה:

א.אם $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$ טונקציה של x בלבד

אזי $e^{\int f(x) dx}$ גורם אינטגרציה של (36.2).

ב.אם $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = -g(y)$ טונקציה של y בלבד

$$(2xe^{xy}y' + 2xy^2 + \dots)dx - (x^2e^{xy}y^2 - x^2y^2 - 3x^2y)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 8xe^{xy}y^2 + 2xe^{xy}y^2 + 6xy^2 = \dots \quad \frac{M_y - N_x}{M} = \frac{8xe^{xy}y^2 + 2xe^{xy}y^2 + 6xy^2 - (8x^2e^{xy}y - 2x^2y^2 - 3x^2)}{2xe^{xy}y^2 + 2xy^2 + 3x^2} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{y} = \dots$$

אז

$$2x^2 dx - y dx - dy + 3d(xy) = 0$$

עייני אינטגרציה נסבל

$$\frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{2} - y + 3xy = C$$

ב.

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = 2x^2 + 3y$$

$$\mu = \int^x (2x^2 + 3y) dx - \phi(y) = \frac{2}{3}x^3 + 3yx - \phi(y)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 3x - \phi'(y) = 3x - y - 1$$

$$\phi'(y) = y - 1$$

$$\phi(y) = \int (y - 1) dy = \frac{y^2}{2} - y + C$$

יאו הפתרון

$$\mu(x, y) = \frac{2}{3}x^3 + 3yx - \frac{y^2}{2} - y + C$$

דוגמה 2
פתר

$$(4x^2y^2 + 2xy^3) dx + (3x^3y^2 + x^2y) dy = 0$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = (4x^2y^2 + 2xy^3)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = (4x^2y^2 + 2xy^3)$$

מכאן המשוואה המדויקת ניתנת לכתיבה:

$$4x^3y^2 dx + 3x^4y^2 dy + 2xy dx + x^2 dy = 0$$

$$d(x^4y^2) + d(x^2y) = 0$$

והפתרון:

$$x^4y^2 + x^2y = C$$

דרך ב'

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = 4x^2y^2 + 2xy$$

$$\mu = x^4y^2 + x^2y - \phi(y)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 3x^4y^2 + x^2 - \phi'(y) = 3x^4y^2 + x^2$$

$$\phi'(y) = 0$$

$$\phi(y) = C$$

$$\mu(x, y) = x^4y^2 + x^2y = C$$

3.6. משוואות מדויקות

המשוואה :

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (3.6.1)$$

נבדוק מדויקת אם נרש אם קיים $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

$$(x^2 - y)dx + (y^2 - x)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y) = -1 = \frac{\partial}{\partial x}(y^2 - x) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

היא משוואה מדויקת כי

ניתן לבנות המשוואה המדויקת הניק בצורה הבאה

$$x^2 dx - y^2 dy - (y dx - x dy) = 0$$

או

$$x^2 dx - y^2 dy - d(xy) = 0$$

נעשה ניתן לבצע אינטגרציה אבר אבר ונקבל הפתרון:

$$\frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{3} - xy = C$$

דרך אחרת לפתור משוואה מדויקת היא: נניח $\mu(x, y) = C$ הנחה זו מתבססת על העובדה שאםהמשוואה מדויקת ניתן לזהות אגף ימני של המשוואה עם $d\mu = 0$, כלומר $d\mu$ הוא דיפרנציאל שלםשל $\mu(x, y)$ שהוא פונקציה סביעה.

פתרון:

$$d\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x} dx + \frac{\partial \mu}{\partial y} dy = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

ואז ניכל לזהות

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} dx = M(x, y)dx$$

ואז:

$$\mu(x, y) = \int M(x, y)dx + \phi(y)$$

כאשר $\int^x$ מציון אנטרל על x כאשר y סבוע ואולם

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \int^x M(x, y)dx \right\} + \frac{d\phi}{dy} = N(x, y)$$

וכך ניתן למצא $\frac{d\phi}{dy}$ ומתוך זה את $\phi(y)$.

דוגמאות:

$$(2x^3 + 3y)dx + (3x - y - 1)dy = 0$$

פתור מתקיים $\frac{\partial M}{\partial y} = 3 = \frac{\partial N}{\partial x}$ כלומר המשוואה מדויקת נוכל לפתור ב 2 דרכים:

א. ננסה בצורה הבאה:

$$2x^3 dx - y dy - dy - 3(y dx - x dy) = 0$$

הפתרון:

$$I = \int p dy = \int \frac{1}{y \ln y} dy = \ln \ln y$$

$$e^I = e^{\ln(\ln y)} = \ln y$$

$$e^{-I} = \frac{1}{\ln y}$$

הפתרון הכללי

$$x = e^{-I} \left[Q e^I \frac{dy}{dx} + C e^{-I} \right] = \frac{1}{\ln y} \int \frac{1}{y} \ln y dy - C \frac{1}{\ln y} =$$

$$= \frac{1}{\ln y} \frac{(\ln y)^2}{2} - \frac{C}{\ln y} = \frac{\ln y}{2} - \frac{C}{\ln y} = x$$

$$\ln^2 y - C = 2x \ln y$$

$$100 - 30 = C = 70$$

$$70 - 30 = 70e^{-kt}$$

$$\frac{40}{70} = e^{-kt} \Rightarrow k = \frac{\ln \frac{40}{70}}{-15}$$

נחשב עבור כמה זמן t תהיה הטמפרטורה 40° .

$$40 - 30 = 70e^{-kt}$$

$$\frac{10}{70} = e^{\frac{1}{15} \ln \frac{40}{70}} = \left(\frac{40}{70} \right)^{\frac{1}{15}}$$

$$t = \frac{15 \ln 7}{- \ln 4 - \ln 5} \approx 52 \text{ (דקות)}$$

3) גורמים מסת של 50 דיג על דרך ציפה שחשוכה יותר. והתמסרות הנוצרת בתוצאה

מחנוד עם אויר שווה ל-5v כאשר v מהירות ב- מ"ש שניה.

א. מהו הכוח הקבוע שיוסנה לגוף מהירות 10 מ"ש שניה.

ב. מהו המהירות והמרחק כעבור 16 שניות.

דפי החק העני של ניוטון

$$ma = F - 5v$$

$$m \frac{dv}{dt} = F - 5v$$

$$\frac{dv}{F - 5v} = \frac{dt}{m}$$

$$-\frac{1}{5} \ln |F - 5v| = \frac{t}{m} - C$$

$$F - 5v = Ce^{-\frac{5}{m}t}$$

כאשר $t=0$ ו $v=0$ ואז $C=F$

$$F - 5v = Fe^{-\frac{5}{m}t}$$

א. יש להקנות לגוף מהירות של 10 מ"ש שניה ב $t \rightarrow \infty$ $v=10$ מ"ש שניה ודכו

$$F - 5v = 50$$

ב. המהירות כעבור 16 שניות:

$$50 - 5v = 50e^{-\frac{5 \cdot 16}{50}} = 50e^{-1}$$

$$5v = 50 - \frac{50}{e}$$

$$v = 10 \left(1 - \frac{1}{e} \right)$$

$$v = F \left(1 - e^{-\frac{5}{m}t} \right)$$

המרחק כעבור 16 שניות:

$$s = \int_0^{16} v dt = \frac{F}{5} \int_0^{16} \left(1 - e^{-\frac{5}{m}t} \right) dt = \frac{F}{5} \cdot \left(t + \frac{m}{5} e^{-\frac{5}{m}t} \right) = 10(16 + 16e^{-1} - 16) = 50 \cdot 16e^{-1}$$

38. משוואות מסדר שני.

נתחיל בסוג הפשוט: משוואות לינאריות.

משוואה מהצורה:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \quad (38.1)$$

נקראת משוואה לינארית מסדר שני.

משוואה מצורה זו מופיעה לעתים סדובות ביותר בפויסה.

ישנו משפט חשוב על משוואות לינאריות שנביאו ללא הוכחה:

אם y_1 הוא פתרון של המשוואה ההומוגנית ($R(x) = 0$) וכן y_2 הוא פתרון אחר של ההומוגנית

$$Ay_{1H} + By_{2H} \quad (38.2)$$

אזי הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית יהיה

פתרון זה כולל את כל הפתרונות האפשריים, כאשר A ו-B סבועים כלשהם.

ואם y_3 הוא פתרון פרטי כלשהו של המשוואה האי הומוגנית אזי

$$Ay_{1H} + By_{2H} + y_3 \quad (38.3)$$

יהיה הפתרון הכללי של המשוואה האי הומוגנית.

ניתן כחוכמה משפט זה ע"י המשפט הקודם שלמדנו, שלמשוואה מסדר n הפתרון הכללי כולל

n- סבועים שרירותיים. אם y_{1H} פתרון ההומוגנית הרי גם Ay_{1H} פתרון הומוגנית, ע"י הצבה במשוואה.

כ"ב לגבי By_{2H} וגם הסכום $Ay_{1H} + By_{2H}$ פתרון. היות וקיבלנו פתרון עם שני סבועים שרירותיים הוא חייב להיות הפתרון הכללי. אם y_3 פתרון האי הומוגנית הרי גם כל פתרון של ההומוגנית פלוס y_3 הוא פתרון של האי הומוגנית. שכן פתרון ההומוגנית ניתן אפס כאשר מציבים אותו באגף שמאל של המשוואה (38.1).

$$y'' - ay' - by = 0$$

נתחיל לטפל במקרים פשוטים ביותר

זו משוואה הומוגנית כאשר המקדמים a, b סבועים.

$$y'' + 5y' - 6y = 0$$

נראה לדוגמה:

במקרים אלה תמיד ננחש פתרון מהצורה

$$y = e^{\mu x}$$

$$y' = \mu e^{\mu x}$$

$$y'' = \mu^2 e^{\mu x}$$

כלומר נקבל:

$$\mu^2 e^{\mu x} + 5\mu e^{\mu x} - 6e^{\mu x} = 0 \quad / \times e^{-\mu x}$$

$$\mu^2 + 5\mu - 6 = 0$$

$$(\mu - 1)(\mu - 6) = 0$$

$$\mu_1 = 1$$

$$\mu_2 = -6$$

מקומי e^x ו- e^{-6x} פתרונות.

הצבה ב- (1) נותנת:

$$y'' - 5y' - 6y = e^x + 5e^x - 6e^x = 0$$

נסבל e^x פתרון

$$y'' - 5y' - 6y = 36e^{-6x} - 12e^{-6x} - 6e^{-6x} = 0$$

כיום נציב

גם הוא פתרון.

$$y = Ae^x + Be^{-6x}$$

לפי המשפט הנ"ל הפתרון הכללי יהיה

ואנחנו נציב ונראה שהוא פתרון

$$y'' - 5y' - 6y = (Ae^x + 36Be^{-6x}) - 5(Ae^x - 6Be^{-6x}) - 6(Ae^x + Be^{-6x}) = 0$$

נראה עתה את הפתרון הכללי כמשוואה

$$y'' - ay' + by = 0$$

נציב

$$y = e^{\mu x}$$

$$\mu^2 - a\mu + b = 0$$

$$\mu_{\pm} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

כאשר הפתרון הכללי

$$y = Ae^{\mu_+ x} + Be^{\mu_- x}$$

אם $\mu_{\pm}$ ממשיים משאירים כך את הפתרון כמו בדוגמה האחרונה.

נבדוק עתה את המקרה כלומר $\mu_{\pm}$ אינם ממשיים.

$$\mu_{\pm} = \frac{-a \pm i\sqrt{4b - a^2}}{2}$$

במקרה זה נוכל לכתוב

כאשר $4b - a^2$ ממשי חיובי.

$$y = Ae^{-\frac{a}{2}x} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}x\right) \right]$$

ואז נסבל את הפתרון הכללי

$$\rho = \sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \quad \text{נסמן}$$

$$y = e^{-\frac{a}{2}x} [Ae^{i\rho x} - Be^{-i\rho x}]$$

הוכחנו

$$e^{iu} = \cos u + i \sin u$$

לבן

$$e^{-iu} = \cos u - i \sin u$$

$$= e^{-\frac{a}{2}x} [A(\cos \rho x - i \sin \rho x) + B(\cos \rho x + i \sin \rho x)] =$$

$$= e^{-\frac{a}{2}x} [(A+B) \cos \rho x + i(A-B) \sin \rho x] = e^{-\frac{a}{2}x} (C \cos \rho x + D \sin \rho x)$$

$$a^2 - 4b = 0 \quad \text{מסרה שני}$$

במסרה זה יש רק פתרון אחד $y = Ae^{-\frac{a}{2}x}$ כמשואה ההומוגנית וא"כ איך נשכל את הפתרון הכללי, שהוא צריך להיות קומבינציה ליניארית של 2 פתרונות.

במסרה זה נוכל להוכיח שפתרון נוסף יהיה

$$y = xe^{-\frac{a}{2}x}$$

יאמנו

$$y' = xe^{-\frac{a}{2}x} \left(-\frac{a}{2}\right) + e^{-\frac{a}{2}x} = e^{-\frac{a}{2}x} \left(1 - \frac{a}{2}x\right)$$

$$y'' = \left(-\frac{a}{2}\right) e^{-\frac{a}{2}x} \left(1 - \frac{a}{2}x\right) - e^{-\frac{a}{2}x} \left(-\frac{a}{2}\right) = e^{-\frac{a}{2}x} \left(-a + \frac{a^2}{4}x\right)$$

$$y'' + ay' + by = e^{-\frac{a}{2}x} \left(-a + \frac{a^2}{4}x\right) + ae^{-\frac{a}{2}x} \left(1 - \frac{a}{2}x\right) + bxe^{-\frac{a}{2}x} =$$

$$= e^{-\frac{a}{2}x} \left(-a + \frac{a^2}{4}x + a - \frac{a^2}{2}x + bx\right) = 0$$

$$b = \frac{a^2}{4} \quad \text{אבל}$$

$$y'' + ay' - by = 0$$

ולכן נהבל

$$y = Ae^{-\frac{a}{2}x} + Bxe^{-\frac{a}{2}x}$$

ומכאן שהפתרון הכללי יהיה:

דוגמאות:

$$1. \text{ פתור } \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$$

נציב $y = e^{mx}$ ונסבל

$$m^2 + m - 6 = 0$$

יהי m_1, m_2

$$m_1 = -3 \quad m_2 = 2$$

ולכן הפתרון הכללי

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{d^2 y}{dx^2} - 12 \frac{dy}{dx} = 0$$

2. פתור את המשוואה

היא משוואה לינארית הומוגנית מסדר 3 יפתר באותה דרך כלומר

$$y = e^{mx}$$

$$m^3 - m^2 - 12m = 0$$

$$m(m^2 - m - 12) = 0$$

$$m_1 = 0 \quad m_2 = -3 \quad m_3 = 4$$

$$y = C_1 + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{4x}$$

ולכן הפתרון הכללי

3. פתור את המשוואה

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$m^2 - 2m + 1 = 0$$

$$(m-1)^2 = 0$$

$$m_{1,2} = 1$$

ולכן הפתרון הכללי יהיה:

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

4.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$m^2 - m + 1 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$y = Ae^{-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}x} + Be^{-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}x} = e^{-\frac{x}{2}} \left(Ae^{\frac{i\sqrt{3}x}{2}} + Be^{-\frac{i\sqrt{3}x}{2}} \right) =$$

$$e^{-\frac{x}{2}} \left(A \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} - i \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} + B \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + i \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right) =$$

$$= e^{-\frac{x}{2}} \left((A+B) \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} - i(A-B) \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right) = e^{-\frac{x}{2}} \left(A' \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + B' \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right)$$

5.

$$y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0 \quad \text{פתור}$$

נציב

$$y = e^{mx}$$

$$m^4 - 8m^2 + 16 = 0$$

$$(m^2 - 4)^2 = 0$$

$$m_{1,2} = 2 \quad m_{3,4} = -2$$

במסרה זה הפתרון הכללי יהיה

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 e^{-2x} + C_4 x e^{-2x}$$

6.

הערה: אם שורש אחד מופיע במשוואה 3 פעמים למשל:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - 9 \frac{d^2 y}{dx^2} + 27 \frac{dy}{dx} - 27y = 0$$

$$(m-3)^3 = 0$$

אזי הפתרון הכללי יהיה:

$$y = Ae^{3x} + Bxe^{3x} + Cx^2e^{3x}$$

דוגמה פיסיקלית:

נראה עתה דוגמה פיסיקלית למשוואה לינארית הומוגנית עם מקדמים סבועים:

מסה m מתנודדת בקצה לפני אנכי. מצא את מסומי של המסה כפונקציה של הזמן. נציין ב- y את ההעתק של המסה מנקודה שיווי משקל. נזכור שהכח המחזיר על מסה m הוא $-ky$, כאשר k קבוע הספיץ. והסימן (-) מצין שהכח וההעתק הם בכיוונים הפוכים. אזי מהחוק השני של ניוטון נקבל

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky \quad (38.4)$$

או נסמן

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m} y = 0$$

זו משוואה דינאמית הרמונית.

נסמן $\omega^2 = \frac{k}{m}$ ואז נקבל

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

נניח פתרון

$$y = e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 + \omega^2 = 0$$

$$\omega = \pm i\omega$$

ולכן הפתרון הכללי:

$$y = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t \quad (38.5)$$

כאשר A_1 ו- B_1 קבועים שרירותיים.נציב $B_1 = C \sin \gamma$ $A_1 = C \cos \gamma$ ונסבל:

$$= C \sin(\omega t - \gamma)$$

כלומר זו משוואת התנועה של הגוף.

גוף המקיים משוואת תנועה כזו, או מקיים את משוואה (1) הוא נע בתנועה הרמונית.

זהו הפתרון הכללי של הבעיה.

נניח עתה תנאי התחלה מסוימים ע"מ למצוא פתרון מיוחד.

נניח שהמסה הוחזקה 10 cm מתחת לשיווי משקל ואז בפתאומיות נעזבה.

כלומר ב- $t = 0$ $y = -10$ $y = 0$ במצב שיווי משקל.

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad \text{מהירות הגוף.}$$

$$y = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t$$

$$\frac{dy}{dt} = A_1 \omega \cos \omega t - B_1 \omega \sin \omega t$$

ואז נקבל מתוך

$$-10 = A_1 \cdot 0 + B_1 \cdot 1$$

$$0 = A_1 \omega \cdot 1 - B_1 \omega \cdot 0$$

$$A_1 = 0$$

$$B_1 = -10$$

ומכאן שהפתרון המסוים של הבעיה הנניל יהיה

$$y = -10 \cos \omega t$$

הבעיה שפתרנו זה עתה אינה ריאליסטית מבחינה מעשית. המשוואה האחרונה אומרת שהמסה,

אם החלה פעם לנוע תתמיד בתנועותיה מעכה ומטה לעולם!

זהו בודאי שאינו נכון. מה ששורה הוא שהתנודות יחלו לדעוך עד שהמערכת תעצר.

הסבה לאי ההתאמה בין המצואות הפיזיקליות לבין התשובה המתמטית הוא בואת שהזנחנו

כח חכו.

הנחה מתקבלת על הדעת עבור בעיה זו ועבור בעיות רבות דומות בפיזיקה שישנו כח מרוזר

שהוא פרופורציונלי למהירות הנניל.

נסמן כח זה ב- $-l \frac{dy}{dt}$ בכוח מנגד למהירות. ואז הם ניוטון השני יהיה:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - l \frac{dy}{dt} \quad (l > 0) / m$$

ונקבל

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{l}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} y = 0$$

נסמן

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad 2b = \frac{l}{m} \quad (b > 0)$$

ונקבל משוואה ליניארית הומוגנית עם מקדמים קבועים.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 2b \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0$$

נפתור אותה:

$$\mu^2 - 2b\mu + \omega^2 = 0$$

$$\mu_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}$$

יש עתה 3 סוגי תשובות לבעיה התלויים ביחס של b^2 ל- ω^2 . ונותנים להם השמות הבאים:

over damped - מרוסנת - $\omega^2 > b^2$

critically damped - קריטית - $\omega^2 = b^2$

under damped - תת מרוסנת - $\omega^2 < b^2$

נדון בכל בפרק בנפרד:

תנועה מרוסנת

היות $\omega^2 > b^2$ אזי $\sqrt{b^2 - \omega^2}$ ממשי וקטן מ- b אזי שני השרשים של μ שדיויים

$$y = Ae^{-\lambda_1 t} - Be^{-\lambda_2 t}$$

כאשר

$$\lambda_1 = -\mu_1 = b - \sqrt{b^2 - \omega^2}$$

$$\lambda_2 = -\mu_2 = b + \sqrt{b^2 - \omega^2}$$

וכפי שהאיים y חולק וקטן עם הזמן ואין בעצ תנועה מחזורית. לכן החכוך המחזיר מבטל את השפעת הכוח ההרמוני.

תנועה קריטית

כאשר $\omega = b$ יש לנו שתי פתרונות שווים $\mu_1 = \mu_2 = -b$

ואז הפתרון הכללי

$$y = Ae^{-bt} - Bte^{-bt} = (A - Bt)e^{-bt}$$

בשני המקרים הנ"ל המסה m נתונה לכה החכוך מחזיר גדול כך שהוא חוזרת למנוחה ולא לתנועה הרמונית חוזרת.

תנועה תת מרוסנת

כאשר $\omega^2 < b^2$ אזי $\sqrt{b^2 - \omega^2}$ הוא מדומה נסמן $\beta = \sqrt{\omega^2 - b^2}$ ממשי אזי

$\sqrt{b^2 - \omega^2} = i\beta$ ואז השרשים הם $-b \pm i\beta$ כלומר הפתרון יהיה:

$$y = C_1 e^{(-b+i\beta)t} + C_2 e^{(-b-i\beta)t} = e^{-bt} (A_1 \sin \beta t + A_2 \cos \beta t) = Ce^{-bt} \sin(\beta t + \gamma)$$

תוצאה זו היא בהתאם למה שאנו יודעים שבדרך כלל קורה למסה m . בגלל המקדם

e^{-bt} האוסצילציות קטנות באמפליטודה עם הזמן.

כ"כ נושם לב שהתדירות $\beta = \sqrt{\omega^2 - b^2}$ היא פחות מהתדירות של האוסצילטור החפשי.

למרות שנתנו דוגמה פשוטה, המתמטיקת בד לנו הוא שמושית למספר רב של בעיות בפיזיקה.

סודם כל יש הרבה צורות של ויברציות מכניות מחוץ למסה השורה בספיץ, כמו מטוטלת סולון, מחט של מכשיר מדידה והרבה דוגמאות נוספות מסובכות יותר כמו תנודות מבנים כמו גשרים, מטוסים ותנודות האטום הגביש.
במקרים אלה אנו זקוקים לפתירת מ"ד דומות למה שעסקנו.

למדנו עד כה למצא את הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית.
אם נמצא עתה פתרון מיוחד למשוואה הלא הומוגנית נוכל להוסיפו לפתרון הכללי של ההומוגנית יקבל את הפתרון הכללי של האי-הומוגנית.

38.1 משוואה ליניארית לא הומוגנית עם מקדמים קבועים.

נטפל עתה במשוואות ליניאריות עם מקדמים קבועים אך לא הומוגניות.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = f(x) \quad \text{כומר מהצורה}$$

כתבו משוואה זו בצורה

$$(D^2 + aD + b)y = f(x)$$

הזכרנו משפט שהפתרון הכללי של המשוואה הזו יהיה הפתרון הכללי של ההומוגנית +

פתרון מיוחד של הלא הומוגנית
נלמד מספר שיטות לפתירת משוואות מהסוג הנ"ל.

$$y = y_H + y_I$$

שיטה ראשונה: שיטת אנטיגרציה.

שיטה זו היא פשוטה ויכולה תמיד לשמש ע"מ לפתור משוואות מהסוג הנ"ל. אולם, ברוב המקרים היא ארוכה יותר ודורשת עבודה יותר משיטות אחרות.

$$y'' + y' - 2y = e^x \quad \text{נבטק על השיטה באמצעות הדוגמה הבאה:}$$

$$(D^2 + D - 2)y = e^x \quad \text{נוכל לכתוב}$$

$$(D - 1)(D + 2)y = e^x \quad \text{או}$$

נסמן לנו

$$u = (D + 2)y$$

$$(D - 1)u = e^x \quad \text{ואז נקבל משוואה דיפרנציאלית עבר } y \text{ מסדר ראשון וליניארית}$$

33.2 שיטת השוואת מקדמים.

בשיטת זו מוצאים תחילה את הפתרון הכללי של ההומוגנית ואח"כ פתרון מיוחד של האי הומוגנית בשיטה הבאה.

מנחשים פתרונות הכוללים סומבינציה של הפונקציות והנגזרות שלהם המופיעות באגף ימין של משוואה האי הומוגנית.

דוגמה אם המשוואה היא מהצורה

$$(D^2 - aD - b)y = x^2$$

נבחר כפתרון מיוחד

$$y_2 = Ax^2 + Bx + C$$

$$y_2 = Ax^2 + Bx + C$$

נציב ואח"כ נזהה את המקדמים

או אם באגף ימין מופיע $e^x - e^{2x}$

$$y_1 = Ae^x - Be^{2x}$$

אם באגף ימין מופיע $\sin ax$

$$y = A \cos ax + B \sin ax \quad \text{אזי נכתב}$$

השיטה אינה יעילה כאשר מספר הנגזרות השונות של הפונקציה באגף ימין הוא אינסופי כמי למשל $\lg x$.

דוגמאות:

$$y'' - y' - 2y = x^2 - x$$

פתרון ההומוגנית

$$m^2 + m - 2 = 0$$

$$(m-1)(m+2) = 0$$

$$y_H = Ae^x + Be^{-2x}$$

ננחש פתרון האי הומוגנית

$$y_1 = Ax^2 + Bx + C$$

ונציב

$$y_1' = 2Ax + B$$

$$y_1'' = 2A$$

$$2A - (2Ax + B) - 2Ax^2 - 2Bx - 2C = x^2 - x$$

ולכן הפתרון המיוחד יהיה

$$y_p = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$$

והפתרון הכללי

$$y = Ae^x + Be^{-x} + \frac{1}{2}(x^2 - 1)$$

דוגמאות:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 2y = x^2 + \sin x$$

ע"י: למצוא פתרון למשוואה ההומוגנית:

$$m^2 - 3m - 2 = 0$$

$$m_1 = 2$$

$$m_2 = -1$$

ולכן פתרון ההומוגנית

$$y = Ae^{2x} + Be^{-x}$$

אצלנו

$$Q = x^2 + \sin x$$

נשים לב שכל הנגזרות של Q הם x , $\sin x$ ו- $\cos x$ ולכן נניח פתרון מהצורה

$$y = ax^2 + bx + c + d \sin x + e \cos x$$

נציב במשוואה:

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b + d \cos x - e \sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a - d \sin x - e \cos x$$

$$2a - d \sin x - e \cos x - 3(2ax + b + d \cos x - e \sin x) + 2(ax^2 + bx + c + d \sin x + e \cos x) = x^2 + \sin x$$

אנו מעוניינים שהביטוי באגף שמאל יתן את אגף ימין ולכן ע"י השוואת מקדמים

נדרוש:

$$2a = 1 \quad a = \frac{1}{2}$$

$$-5a - 2b = 2 \quad b = 3a = \frac{3}{2}$$

$$2a - 3b - 2c = 0 \quad 2a = 3b - 2c = \frac{9}{2} - \frac{7}{2} = \frac{2}{2} \Rightarrow c = \frac{7}{4}$$

$$-d - 3e = 1 \quad d = 3e - 1$$

$$-e - 3d = 0$$

$$-e - 3(3e - 1) = -e - 9e - 3 = 0$$

$$-10e = -3$$

$$e = \frac{3}{10}$$

$$d = 3 \cdot \frac{3}{10} - 1 = \frac{9}{10} - 1 = -\frac{1}{10}$$

זכר: הפתרון הכללי יהיה:

$$y = Ae^{2x} + Be^x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{7}{4} - \frac{1}{10}\sin x - \frac{3}{10}\cos x$$

הערה: השיטה של פתרון נסיוני נופלת כאשר ב- Q יש בסיס שהוא פתרון של המשוואה

ההומוגנית שכן אנך שמאל יתן עבורו אפס, לכן הוא לא יתרום באנך ימין.

לדוגמה:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = e^{2x}$$

$$m^2 - 3m + 2 = 0$$

$$m_1 = 2$$

$$m_2 = 1$$

במקרה זה אם נבחר כפתרון כללי

$$y = Ae^x + Be^{2x}$$

נקבל סתירה שכן באנך שמאל נקבל אפס ובאנך ימין שונה מאפס.

לכן עלינו לקחת כאן כפתרון נסיוני מיוחד

$$u = cxe^{2x}$$

ואת c לקבוע ע"י השוואת מקדמים

$$\frac{du}{dx} = ce^{2x} + 2cxe^{2x}$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 2ce^{2x} + 2ce^{2x} + 4cxe^{2x}$$

$$4ce^{2x} - 4cxe^{2x} - 3ce^{2x} - 6cxe^{2x} + 2cxe^{2x} = e^{2x}$$

$$c = 1$$

מכאן שהפתרון הכללי יהיה

$$\varphi = \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4b^2\omega_0^2} \sin(\omega_0 t - \phi)$$

כאשר

$$\tan \phi = \frac{2b\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

זהו הפתרון המצב היציב שכן כאשר $t \rightarrow \infty$ שאר הפתרון זניח.
זאת אומרת המערכת תנוע לאחר זמן בתדירות הכוח המחובר ω_0 .

דוגמה:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = e^{2x} + 2x^2$$

פתרון ההומוגנית

$$y_H = e^{\alpha x}$$

$$\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0 \quad (\alpha - 3)(\alpha - 2) = 0$$

$$y_H = Ae^{2x} + Be^{3x}$$

נניח הפתרון האי הומוגנית

$$y_p = \alpha xe^{2x} + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

ונקבל

$$\frac{dy_p}{dx} = \alpha e^{2x} + 2\alpha xe^{2x} + 2\beta x + \gamma$$

$$\frac{d^2 y_p}{dx^2} = 2\alpha e^{2x} + 2\alpha e^{2x} + 4\alpha xe^{2x} + 2\beta$$

$$2\alpha e^{2x} + 2\alpha e^{2x} + 4\alpha xe^{2x} + 2\beta - 5\alpha e^{2x} - 10\alpha xe^{2x} - 10\beta x - 5\gamma + 6\alpha xe^{2x} + 6\beta x^2 + 6\gamma x + 6\delta = e^{2x} + 2x^2$$

$$-3\alpha = 1 \quad \alpha = -\frac{1}{3}$$

$$6\beta = 2 \quad \beta = \frac{1}{3}$$

$$-10\beta + 6\beta + 6\gamma = 0 \Rightarrow -\frac{4}{3} + 6\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{2}{9}$$

$$2\beta - 5\gamma - 6\delta = 0$$

$$-\frac{4}{9} + \frac{2}{3} - \frac{10}{9} - 6\delta = 0 \Rightarrow \delta = \frac{4}{9 \cdot 6} = \frac{2}{27}$$

$$y = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} + xe^{i\omega t}$$

נחזור עתה לבעיה הפיזיקלית שטפנו בפרק 38, שם טפנו בבעיה של אוסצילטור הרמוני קלאסי. חיצוני, סבבנו תנועה מרוסנת של אוסצילטור.

נדון עתה בתנודות הנ"ל כאשר ישנו כח מהזרזי חיצוני הפועל על המערכת.

עכשיו לפתור משוואה דיפרנציאלית לא הומוגנית, במקום יסוד פונקציה של t .

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2b \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = F \sin \omega t$$

הפתרון יכולה פתרון של ההומוגנית, השואף לאפס כאשר $t \rightarrow \infty$.

אולם הפתרון יכול גם פתרון סטנדרט, שאינו שואף לאפס בגלל הכוח המהזרז.

נניח פתרון מהצורה

$$y_1 = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

ונסביל

$$-A\omega'^2 \sin \omega t - B\omega'^2 \cos \omega t - 2bA\omega' \cos \omega t - 2bB\omega' \sin \omega t =$$

$$-\omega'^2 A \sin \omega t - \omega'^2 B \cos \omega t = F \sin \omega t$$

$$-A\omega'^2 - 2b\omega' B - \omega'^2 A = F$$

$$-B\omega'^2 - 2bA\omega' + \omega'^2 B = 0$$

$$B(\omega'^2 - \omega'^2) = -2bA\omega'$$

$$B = -\frac{2bA\omega'}{\omega'^2 - \omega'^2}$$

$$-A\omega'^2 - 2b\omega' \frac{2bA\omega'}{\omega'^2 - \omega'^2} + \omega'^2 A = F$$

$$A \left(-\omega'^2 - \frac{4b^2 \omega'^2}{\omega'^2 - \omega'^2} + \omega'^2 \right) = F$$

$$A \frac{-\omega'^2 \omega'^2 - \omega'^4 + 4b^2 \omega'^2 + \omega'^4 - \omega'^2 \omega'^2}{\omega'^2 - \omega'^2} = F$$

$$A \frac{(\omega'^2 - \omega'^2)^2 + 4b^2 \omega'^2}{\omega'^2 - \omega'^2} = F$$

$$A = \frac{F(\omega'^2 - \omega'^2)}{(\omega'^2 - \omega'^2)^2 + 4b^2 \omega'^2}$$

$$B = \frac{-2b\omega' F}{(\omega'^2 - \omega'^2)^2 + 4b^2 \omega'^2}$$

$$y = \frac{F}{(\omega'^2 - \omega'^2)^2 + 4b^2 \omega'^2} ((\omega'^2 - \omega'^2) \sin \omega t - 2b\omega' \cos \omega t)$$

$$y'' + 2b y' + \omega^2 y = F e^{i\omega t} \quad (1)$$

$$y = C e^{i\omega t}$$

$$-\omega'^2 C + 2b i \omega' C + \omega^2 C = F$$

$$C = \frac{F}{(\omega - \omega')^2 + 2i b \omega} = \frac{F(\omega' - \omega^2) - 2i b \omega'}{(\omega' - \omega^2)^2 + 4b^2 \omega'^2}$$

38.3. משוואות אחרות מסדר שני

לברות שהמשוואה הכללית מסדר שני עם מקדמים קבועים היא השוואה ביותר בפסיקה, ישנם גם מספר צורות אחרות של משוואות מסדר שני שאף הם חשובות. נדון בהם לפי חסוגים הבאים:

א. משוואות בהם חסר y .

ב. משוואות בהם חסר x .

ג. משוואות מהצורה $y'' - f(y) = 0$.

ד. משוואות מהצורה

$$a_2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

הנסקרות לעתים משוואת קושי או אייכר.

ע"מ לפתור סוגים א' או ב' מציבים

$$u = y'$$

ואז במידה וא' מקבלים $y'' = u'$.

ואז משוואת מטיפוס א' הופכת למשוואה מסדר ראשון כאשר u משתנה תלוי ו- x משתנה ברת.

תחילה פותרים u בפונקציה של x ואח"כ מציבים $y' = u$ ופתרון משוואה מסדר ראשון עבור y .

דוגמה:

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = x^2$$

נציב

$$\frac{dy}{dx} = u$$

$$x \frac{du}{dx} + u = x^2$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{1}{x} u = x$$

$$P = \frac{1}{x}$$

$$Q = x$$

$$I = \int P dx = \ln x$$

$$u = e^{-\ln x} \int x e^{\ln x} dx - C_1 e^{-\ln x} = \frac{1}{x} \int x^2 dx - \frac{C_1}{x} = \frac{x^3}{3x} + \frac{C_1}{x} = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}$$

$$y = \int \left(\frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x} \right) dx = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln x + C_2$$

עבור מקרה ב' (משוואות בהם חסר א)

נציב $y' = u$ ואז

$$y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = u \frac{du}{dy}$$

כלומר אנו משנים את המשתנה הבית מ- x ל- y .

שים לב שיש רק משתנה בית אחד במשוואה דיפרנציאלית רגילה.

בתחילה א יהיה משתנה בית ו- y תכוי ו- u דיפרנציאל של x . עתה אנו מסתעדים על הבעיה כך:

רואים את y כמשתנה בית כאשר u פונקציה של y .

עם ההצבות הנ"ל משוואה דיפרנציאלית שאין בה x הופכת להיות בסדר ראשון עם x כמשתנה תלוי ו- y כמשתנה בית.

לדוגמה:

בשירים הקודמים דנו בתנועת מסה m המושפיע מכח מחזורי $-ky$ וכח רוטון $l \frac{dy}{dt}$ פרופורציוני

למהירות. נדון עתה בבעיה דומה אבל שבה הרוטון פרופורציוני לרבע המהירות המ"ד שנקבל במסרה זה תהיה

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} \pm l \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + ky = 0 \quad (l > 0)$$

(הסימן $\pm$ נלקח כך שבכל רגע של התנועה הכוח המחזיר מנוגד לכוון התנועה).

נדון במסרה זו הגוף מתחיל ממנוחה ברגע $t = 0$ בנקודה $y = 1$ והמקיים את המשוואה

$$4 \frac{d^2 y}{dt^2} \pm 2 \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + y = 0$$

זוהי דוגמה לסוג ב' בו חסר x אצלנו t .

נשתמש בקשר $\frac{dy}{dt} = u$

ואז

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dt} = u \frac{du}{dy}$$

ואז נקבל

$$4u \frac{du}{dy} = 2u^2 - y = 0$$

או

$$\frac{du}{dy} = \frac{u}{2} = -\frac{y}{4u}$$

אם נזכור הזכרנו את המשוואות ברנולי מהצורה

$$y' - P(x)y = Q(x)y^\alpha$$

אזכנו

$$u' - P(y)u = Q(y)u^\alpha$$

u מתחילת תפסיד עם y

ו-y מתחילת תפסיד עם u

כלומר זוהי משוואת ברנולי ב-u ו-y כאשר $\alpha = 1$

נכפיל המשוואה ב-u

$$u' = \frac{u}{2} = -\frac{y}{4}u^{*1} \quad / u$$

ונקבל

$$uu' = \frac{u^2}{2} = -\frac{y}{4}$$

נציב

$$u^2 = z$$

$$2u \frac{du}{dy} = \frac{dz}{dy}$$

ואז נקבל

$$\frac{1}{2} \frac{dz}{dy} = \frac{z}{2} = -\frac{y}{4} \quad / z$$

$$\frac{dz}{dy} = z = -\frac{1}{2}y$$

זו משוואה ליניארית

$$P(y) = -1$$

$$Q = -\frac{1}{2}y$$

ואז

$$I = \int (\pm 1) dy = \pm y$$

$$z = e^{-y} \int Q(y) e^y dy - C_1 e^{-y} = e^{-y} \int \left(-\frac{1}{2} y \right) e^{2y} dy - C_1 e^{-y} =$$

$$= e^{-y} \left(-\frac{1}{2} e^{2y} (\pm y - 1) \right) - C_1 e^{-y}$$

$$z = -\frac{1}{2} (\pm y - 1) - C_1 e^{-y}$$

$$z = \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = -\frac{1}{2} (y - 1) + C_1 e^{-y}$$

משוואה זו נפתרת רק בעזרת שיטות קרוב ואנו לא נמשיך לבן לפתור אותה.

מקרה ג'.

המשוואה $y'' - f(y) = 0$ נראה כמקרה פרטי של ב' אולם אעפ"כ חשוב ביותר לדעת דרך

פשוטה לפתור אותה. כיון שהיא מופיעה לעתים קרובות בפיסיקה.

הטריק הוא להכפיל פשוט את המשוואה ב- y' ואז מקבלים

$$y' y'' - f(y) y' = 0$$

או

$$y' \frac{dy'}{dx} - f(y) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y' dy' - f(y) dy = 0$$

ואז לאחר אינטגרציה מקבלים

$$\frac{1}{2} y'^2 + \int f(y) dy = const$$

משוואה זו היא מסדר ראשון וניתנת להפרדת משתנים (בהנחה שאין בעיות אינטגרציה)

אם הופכים מש"ד לאנטגרל אחד זה כבר חלק חשוב מהפתרון. אין זה חשוב אם האנטגרל קל

או קשה לפתרון.

דוגמה:

גוף בעל מסה m נע בכיוון ציר x בהשפעת כח $F(x)$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x)$$

זו משוואה מהצורה $y'' - f(y) = 0$ ואז נכפיל ב- $\frac{dx}{dt}$ ונקבל

$$mv \frac{dv}{dt} = F(x) \frac{dx}{dt}$$

$$mv dv = F(x) dx$$

$$\frac{1}{2} mv^2 = \int F(x) dx + \text{const}$$

זה למעשה הקשר בין אנרגיה קינטית ואנרגיה פוטנציאלית. רק שמיר האנרגיה.

אבל כאן לא פתרנו עדיין את משוואת התנועה (t) אלא בכיוון לקשר זה יש לעתים חשובות יותר

באשר למשוואת התנועה.

דוגמה:

נכפיל ב- y'

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y - a$$

$$y' dy' = (y - a) dy$$

$$\frac{y'^2}{2} = \frac{(y - a)^2}{2} + C_1$$

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = (y - a)^2 + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{(y - a)^2 + C_1}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{(y - a)^2 + C_1}} = \pm dx$$

$$\ln(y - a + \sqrt{(y - a)^2 + C_1}) = \pm x + C_2$$

משוואה מסוג ד':

$$a_2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x)$$

משוואה זו ניתנת לכתיבה כמשוואה ליניארית עם מקדמים סבועים ע"י שנוי המשתנה הב"ת מ- x

ל- z . ע"י הקשר

$$x = e^z$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dz} = x \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dz}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dx}{dx} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \right)$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}$$

נע"י הצבה נסבל

$$a_1 \left(\frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} \right) - a_1 \frac{dy}{dz} - a_0 y = f(z)$$

כלומר שבגנו משוואה ליניארית מסדר שני עם מקדמים קבועים.

דוגמה:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - 4y = \cos \ln x - x \sin \ln x$$

נציב $z = \ln x$ $x = e^z$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dz}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{x} \frac{d^2 y}{dz^2} \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} \right)$$

ולכן נסבל

$$\frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} - \frac{dy}{dz} - 4y = \cos z - e^z \sin z$$

$$\frac{d^2 y}{dz^2} - 2 \frac{dy}{dz} - 4y = \cos z + e^z \sin z$$

פתרון ההומוגנית

$$(D^2 - 2D + 4)y = 0$$

$$m = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3}$$

$$y = e^z (C_1 \cos \sqrt{3}z + C_2 \sin \sqrt{3}z)$$

ננחש פתרון פרטי מהצורה

$$y = A \sin z + B \cos z + Ce^z \sin z + De^z \cos z$$

$$\frac{dy}{dz} = A \cos z - B \sin z - Ce^z \sin z + Ce^z \cos z + De^z \cos z - De^z \sin z$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dz^2} &= -A \sin z - B \cos z - (C-D)e^z \sin z - (C-D)e^z \cos z - (C+D)e^z \cos z - (C-D)e^z \sin z = \\ &= -A \sin z - B \cos z - 2De^z \sin z - 2De^z \cos z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -A \sin z - B \cos z - 2De^z \sin z - 2Ce^z \cos z - 2A \cos z + 2B \sin z - 2(C-D)e^z \sin z - \\ - 2(C-D)e^z \cos z - 4A \sin z - 4B \cos z - 4Ce^z \sin z + 4De^z \cos z = \cos z - e^z \sin z \end{aligned}$$

$$-A - 2B - 4A = 0$$

$$-B - 2A - 4B = 1$$

$$A = -\frac{2B}{3}$$

$$3B - \frac{4B}{3} = 1$$

$$B = \frac{3}{13}, A = -\frac{2}{13}$$

$$-2D - 2(C-D) - 4C = 1$$

$$2C - 2(C-D) + 4D = 0$$

$$C = \frac{1}{2}, D = 0$$

ולכן הפתרון הכללי יהיה:

$$\begin{aligned} y &= e^z (C_1 \cos \sqrt{3}z + C_2 \sin \sqrt{3}z) + \frac{1}{13}(3 \cos z - 2 \sin z) - \frac{1}{2}e^z \sin z = \\ &= x(C_1 \cos \sqrt{3} \ln x + C_2 \sin \sqrt{3} \ln x) + \frac{1}{13}(3 \cos \ln x - 2 \sin \ln x) - \frac{1}{2}x \sin \ln x \end{aligned}$$

משוואה דיפרנציאלית ליניארית מסדר שני- כללית

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + R(x) + S(x)y = Q(x)$$

אם R ו- S קבועים ניתן לפתור בשיטות הקודמות אינטגרציה או השוואת מקדמים (ויש גם שיטות נוספות) אם המקדמים אינם קבועים אין שיטה כללית לפתרון. אולם נביא תהליך שעוזר לפעמים במציאת פתרון.

שיטה: שנוי המשתנה התלוי:

בוחרים z פונקציה לפי ההמשך הטרינספורמציה.

$$v = v(x) \quad u = u(x)$$

$$y = u \cdot v$$

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = u \frac{d^2 v}{dx^2} + 2 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + v \frac{d^2 u}{dx^2}$$

נציב ב- (1) ונקבל

$$u \frac{d^2 v}{dx^2} + 2 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + v \frac{d^2 u}{dx^2} - R(x)u \frac{dv}{dx} - R(x)v \frac{du}{dx} - S(x)u \cdot v = Q(x) \quad / u$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \left(2 \frac{du}{dx} - R(x) \right) \frac{dv}{dx} + \left(\frac{1}{u} \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{R(x)}{u} \frac{du}{dx} - S(x) \right) v = \frac{Q(x)}{u}$$

נסמן

$$R_1(x) = \frac{2}{u} \frac{du}{dx} - R(x)$$

$$S_1(x) = \frac{1}{u} \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + R(x) \frac{du}{dx} - S(x)u \right)$$

$$Q_1(x) = \frac{Q(x)}{u}$$

ונקבל

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + R_1(x) \frac{dv}{dx} + S_1(x)v = Q_1(x)$$

לכאורה קבלנו שוב משוואה ליניארית מסדר שני מסובכת.
אולם אם נבחר את u להיות פתרון של ההומוגנית

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + R(x) \frac{dy}{dx} + S(x)y = 0$$

אזי $S_1 = 0$ ו- (2) הופכת להיות למשוואה מהצורה

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + R_1(x) \frac{dv}{dx} = Q_1(x)$$

משוואה ללא v ואז הצבה

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{dz}{dx} \quad \frac{dv}{dx} = z$$

תהפוך את המשוואה מליניארית מסדר ראשון:

$$\frac{dz}{dx} + R_1(x)z = Q_1(x)$$

$$P = -\frac{1}{x}$$

$$Q = 2 - \frac{1}{x}$$

$$I = \int P dx = \ln x$$

$$z = e^{-i} \int Q e^i dx + C_1 e^{-i} = e^{ix} \int \left(2 - \frac{1}{x} \right) e^{-ix} dx + C_1 e^{ix}$$

$$z = x \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx + C_1 x = x \left(2 \ln x - \frac{1}{x} \right) + C_1 x = 2x \ln x - 1 + C_1 x$$

$$\frac{dv}{dx} = z = 2x \ln x + i - C_1 x$$

$$v = \int (2x \ln x + i - C_1 x) dx = x^2 \ln x - x + C_1 x^2 + C_2$$

$$y = xv = C_1 x^3 + C_2 x - x^2 - x^2 \ln x$$

מבחנים

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 1.1

(כולל פתרון)

גזור את הפונקציות הבאות:

$$1. \quad y = \sin^2[\arctan(2x^2 + 1)]$$

$$2. \quad y = \sqrt[3]{\ln\left(\frac{2x^2 + 5x}{e^{-x}}\right)}$$

$$3. \quad y = e^{-\arctan[\ln(x^2)]}$$

4. מצא תחום הגדרה, חתוך עם הצירים, מקסימום, מינימום, נקודות פיתול, גבול ב- $\pm\infty$ וב- 0^+ , 0^- של הפונקציה $y = \frac{a^3}{x^2} + \frac{a^2}{x}$. נתון ש- $a > 0$. כמו כן, שרטט גרף איכותי של הפונקציה.

$$5. \quad \text{א. פתור את המשוואה: } Z^3 + 1 = 0$$

$$\text{ב. חשב את הגבול: } \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta - \tan \theta}{\cos \theta - \sec \theta}$$

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

בחינה 1.1

פתרון

$$y = \sin^2[\arctan(2x^2 + 1)]$$

$$y' = 2 \sin[\arctan(2x^2 + 1)] \cos[\arctan(2x^2 + 1)] \cdot \frac{4x}{(2x^2 + 1)^2 + 1}$$

$$= \sin[2\arctan(2x^2 + 1)] \cdot \frac{4x}{(2x^2 + 1)^2 + 1}$$

.1

$$y = \sqrt[3]{\ln\left(\frac{2x^2 + 5x}{e^{-x}}\right)} = \sqrt[3]{\ln(2x^2 + 5x) + x}$$

$$y' = \frac{1}{3} [\ln(2x^2 + 5x) + x]^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{4x + 5}{2x^2 + 5x} + 1\right)$$

.2

$$y = e^{-\arctan(\ln(x^2))} = e^{-x^2}$$

$$y' = -2xe^{-x^2}$$

.3

$$a > 0 \quad y = \frac{a^3}{x^2} + \frac{a^2}{x}$$

.4

$$\frac{a^3}{x^2} = -\frac{a^2}{x} \quad \Bigg/ \cdot \frac{x^2}{a^2}$$

$$a = -x$$

תחום הגדרה: $x \neq 0$
 חיתוך עם הצירים: $x = 0$ לא ייתכן; אין חיתוך עם ציר y
 $y = 0$

כלומר שיש חיתוך בודד עם ציר x והוא בנקודה $x = -a$.
מינימום / מקסימום:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2a^3}{x^3} - \frac{a^2}{x^2} = 0 \quad \Bigg/ \cdot \frac{x^3}{a^2}$$

$$-2a - x = 0 \Rightarrow x = -2a$$

$$y = \frac{a^3}{4a^2} - \frac{a^2}{2a} = -\frac{a}{4}$$

נקודת אקסטremum:

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=-2a} = \frac{+6a^3}{x^4} + \frac{2a^2}{x^3} \Big|_{x=-2a} = \frac{6a^3}{16a^4} - \frac{2a^2}{8a^3} = \frac{1}{8a} > 0$$

נבדוק אותה:

נקודת מינימום!

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^3}{x^2} + \frac{a^2}{x} = 0 \quad \text{גבול ב-} +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^3}{x^2} + \frac{a^2}{x} = 0 \quad \text{גבול ב-} -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a^3}{x^2} + \frac{a^2}{x} = \infty \quad \text{גבול ב-} 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a^3}{x^2} + \frac{a^2}{x} = \infty \quad \text{גבול ב-} 0^-$$

יש לשים לב כי האיבר השמאלי בגבול שואף ל- ∞ והשני ל- $-\infty$, אולם

הראשון שואף ל- ∞ מהר יותר ולכן הגבול הוא ∞ .

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{6a^3}{x^4} + \frac{2a^2}{x^3} = 0 \quad \Bigg/ \cdot \frac{x^4}{a^2}$$

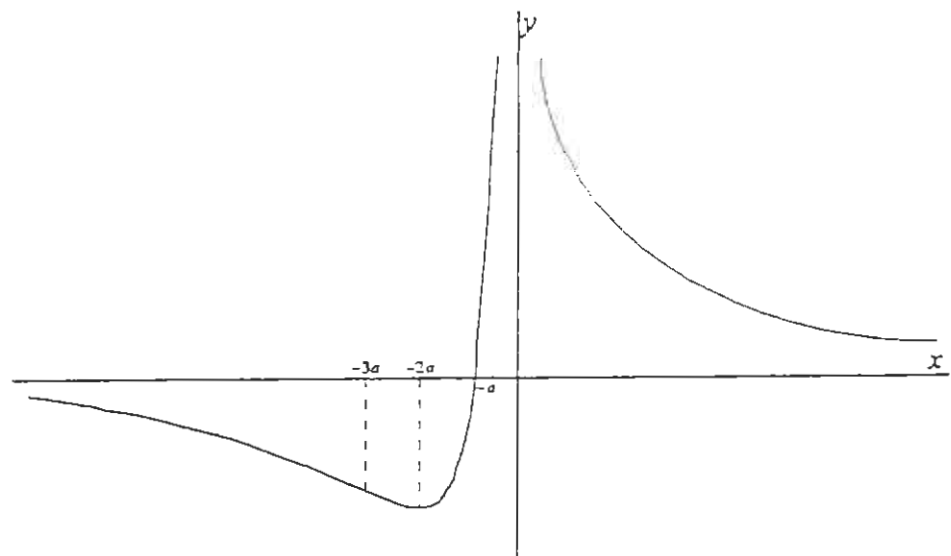
$$x = -3a$$

נקודת פיתול:

$$y = \frac{a^3}{9a^2} - \frac{a^2}{3a} = \frac{a}{9} - \frac{a}{3} = -\frac{2}{9}a$$

הנקודה $(-3a; -\frac{2}{9}a)$ היא נקודת פיתול.

שרטוט איכותי:



5. א. פתור את המשוואה $Z^3 + 1 = 0$

$$\begin{aligned} Z^3 &= -1 = \cos \pi + i \sin \pi \\ &= \cos \left(\frac{\pi + 2\pi k}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi + 2\pi k}{3} \right) \quad \text{או} \\ &= \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \quad k = 0 \\ &= \cos \pi + i \sin \pi = -1 \quad k = 1 \\ &= \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \quad k = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\sin \vartheta - \tan \vartheta}{\cos \vartheta - \sec \vartheta} = \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\sin \vartheta - \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta}}{\cos \vartheta - \frac{1}{\cos \vartheta}} =$$

ב.

$$\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta - \sin \vartheta}{\cos^2 \vartheta - 1} = \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\sin \vartheta (\cos \vartheta - 1)}{(\cos \vartheta + 1)(\cos \vartheta - 1)} = \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 1.2

1. מצא את שרשי המשוואה, $z^3 - i = 0$ ואת מכפלת השרשים.

2. נתונות הפונקציות:

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} + 7x \quad \text{א.} \quad f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 5x^2 & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{ב.} \quad f(x) = \begin{cases} \ln x + 5 & x > 1 \\ \ln x & x \leq 1 \end{cases} \quad \text{א.}$$

מצא את גבול הפונקציות ובדוק את רציפותם בנקודות $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3$.

3. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א.} \quad y = (x^3 + 7)^{3/2}$$

$$\text{ב.} \quad y = \sin^2(\arctg \sqrt{x^2 - 1})$$

4. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א.} \quad yx + x^2 = \sin y$$

$$\text{ב.} \quad \sin^2 x + \cos^2 x = \lg(xy)$$

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 1.3

1. א. חשב הבטוי $\frac{7+i}{7-i}(i+\sqrt{2})^2$

ב. פתור את המשוואה $x^5 - i = 0$.

2. א. מהו תחום ההגדרה והטווח של הפונקציה $y = \log_{10} \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

ב. תאר באופן גרפי (איכותי) את הפונקציה $y = 2x^3 + 5x^2 - 3x$.

3. א. חשב את הגבולות הבאים

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta - \operatorname{tg} \theta}{\cos \theta - \sec \theta}, \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{x + 1}$$

ב. נתונה הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 2 \\ x^3 & x \leq 2 \end{cases}$$

מהו גבול הפונקציה בנקודות $x = 1, 2, 3$?

האם הפונקציה רציפה בנקודות אלו?

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 1.4

עליך לפתור שלשה תרגילים מתוך ארבעת התרגילים הראשונים ושלושה מתוך ארבעת האחרונים.
זמן הבחינה 90 דקות.

1. גזור את הפונקציה $y(x) = \log \sqrt{\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}}$

2. גזור את הפונקציה $y(x) = a \arcsin \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{ax - x^2}$

3. גזור את הפונקציה $y(x) = (2x + a)^{2x}$

4. מצא נקודות מכסימום מינימום ופתול של הפונקציה $y = 2x + \arccos x$
ותאר גרפית את הפונקציה באופן איכותי.

חשב את האנטגרלים הבלתי מסוימים הבאים:

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 2x + 1}}$

6. $\int \frac{dx}{x^4 + 9x^2}$

7. $\int y^2 \cos y dy$

8. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 1.5

$$1. \text{ נתונה הפונקציה } y = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & x > 1 \\ x^2 + 3 & x \leq 1 \end{cases}$$

א. בדוק גבול ורציפות הפונקציה בנקודות 0, 1, 3.

ב. בדוק רציפות הפונקציה הנגזרת בנקודות הנ"ל.

$$2. \text{ חשב } \frac{dy}{dx} \text{ בפונקציות הבאות:}$$

$$א. y^3 x + \operatorname{tgh}(x + y) = \ln x$$

$$ב. y = \sqrt{\arcsin[\ln(e^{i\pi x^2})]}$$

$$ג. y = \sin(x^y)$$

$$3. \text{ נתונה הפונקציה } y = \ln((x - 3)^2(x + 1) + 1) \text{ מצא:}$$

א. נקודות חתוך עם הצירים.

ב. נקודות מכסימום ומינימום.

ג. האם הפונקציה קיימת ב- $x = -2$?

ד. תאר גרפית את הפונקציה.

$$4. \text{ א. פתור } x^6 - 1 = 0 \text{ ותאר הפתרונות במישור המרוכב.}$$

ב. חשב בעזרת דפרנציאלים: $\ln(0.99)$.

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 1.6

$$1. \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{|x - 3|} & x \neq 3 \\ 6 & x = 3 \end{cases}$$

- א. מהו גבול הפונקציה בנקודות $x = 0, 3, 4$?
 ב. האם הפונקציה רציפה בנקודות הנ"ל? נמק!
 ג. במידה שאין גבול מצא גבול ימני וגבול שמאלי.

2. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $x^x + y^{\cos x} = \arctg(x + y)$

ב. $y = \arcsin^3(\ln e^{\sin \sqrt{x}})$

ג. $y = \ln \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}}$

3. נתונה הפונקציה $y = 5 \arctg x - 2 \ln x$

- א. מצא נקודות קיצוניות.
 ב. תאר איכותית את הפונקציה בצורה גרפית.

4. א. פתור את המשוואה $z^3 + 1 + i = 0$.

ב. חשב את הגבול $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta - \operatorname{tg} \theta}{\cos \theta - \sec \theta}$

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 1.7

חומר עזר: דף נוסחאות מצורף ומחשב כיס פשוט (ללא גרפיקה).

1. מצא את שרשי המשוואה $z^3 - i + 1 = 0$ ושרטט את הפתרונות במשור המרוכב.

2. נתונות הפונקציות

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \quad \text{ג.} \quad f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} + 7x \quad \text{ב.} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 5x & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{א.}$$

מצא את גבול הפונקציות ובדוק את רציפותם בנקודות $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3$.

3. גזור את הפונקציות הבאות

$$y = 2 \left(\arcsin \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \right)^2 \quad \text{ג.} \quad \sin^2 x + \cos^2 y = \lg(xy) \quad \text{ב.} \quad x^3 + y^2 x = \sin y \quad \text{א.}$$

4. א. מצא את הנגזרת של הפונקציה $y = \sin^2 x$ לפי הגדרת הנגזרת.

ב. נתונה הפונקציה $x^2 + y^2 = 1$ ומשוואת המשיק שלה $2y - x = b$

מצא את נקודת ההשקה ואת b .

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 1.8

חומר עזר: דף נוסחאות מצורף ומחשב כיס פשוט (ללא גרפיקה).

1. א. פתור את המשוואה $z^4 + i = 0$ ושרטט את הפתרונות במישור המרוכב.

ב. חשב $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{x}{\cot x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right]$

2. מצא תחום הגדרה, חתוך צירים, מכסימום ומינימום, נקודת פתול, גבול ב- $\pm\infty$, גבול ב- 0^+ , 0^- של

הפונקציה $y = \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x}$ כאשר $a > 0$ שרטט גרף איכותי של הפונקציה.

3. א. גזור את הפונקציות הבאות

$$\sin^2 y + x \cos^2 x = y \quad y = \ln \sqrt{\frac{1+tgx}{1-tgx}}$$

ב. חלקיק נע ע"פ המשוואות $y = 5\sqrt{3} - 5t^2$, $x = 5t$

(i) מצא את הזווית שבה החלקיק חוזר ל- $y = 0$.

(ii) מצא את הקואורדינטות הגובה המכסימלי של החלקיק.

פתור בעזרת שמוש בנגזרות.

4. א. חשב $3.01^{3.01}$ באמצעות דפרנציאל (ללא מחשב).

ב. בדוק רציפות הפונקציות הבאות בנקודות $x = 1$ $x = 2$ נמק!

$$y = \frac{x-1}{|x-1|} \quad (ii) \quad y = \begin{cases} \frac{x-2}{x^2-4} & x \neq 2 \\ \frac{1}{4} & x = 2 \end{cases} \quad (i)$$

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 1.9

1. א. חשב את שרשי המשוואה $x^3 + 8 = 0$ ותאר את הפתרונות במשור המורכב.

ב. נתונה הפונקציה $y = \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 2}$

מהו גבול הפונקציה בנקודה $x = -2$? האם הפונקציה רציפה בנקודה זו? נמק!

2. א. מצא את הנגזרת של הפונקציה $y = \cos^2 x$ לפי הנגזרה הנגזרת.

ב. חשב את הנגזרות הבאים:

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\csc \theta - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x - 15}{12 + 2x^3}$$

3. גזור את הפונקציות הבאות

א. $y = \arctg(\sin^3(x^2 + 1))$

ב. $\cos^2 x + \lg^2 y = \sin(xy)$

ג. $y = e^{2 \ln \sqrt{\frac{x^3 - 12}{x^2 - 4}}}$

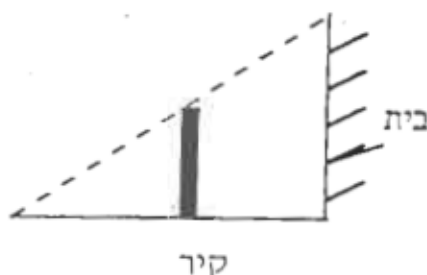
ד. $y = x^{\sin x}$

4. א. תאר גרפית את הפונקציה בעזרת נקודות קיצוניות.

הנח $a > 0, b > 0$ $y = \frac{x-a}{(x-b)^2}$

ב. קיר בגובה 8 ניצב במרחק $3\frac{3}{8}$ מ' מבית.

מהו ארכו המינמלי של סולם שיגיע מהקרקע לבית כך שהוא נשען ע"י הקיר (ראה איור).



בהצלחה!

סססססס לפסזסססס

סססס 1.10

1. ססס ססס ססססס סססס:

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin a\varphi}{\sin b\varphi} \quad \text{א.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3} \quad \text{ב.}$$

2. סססס סססססס:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x + 1, & x > 1 \\ \ln x - 1, & x \leq 1 \end{cases} \quad \text{ג.} \quad f(x) = \begin{cases} x + 6, & x > 3 \\ x^2, & x \leq 3 \end{cases} \quad \text{ד.} \quad f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} \quad \text{ה.}$$

ססס ססס סססססס ססססס וססס ססס ססססס סססססס $x = 3, x = 2, x = 1$.

3. ססס ססס סססססס ססססס $(y'(x))$:

$$y = x^n e^{\sin x} \quad \text{א.} \quad y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2 + 1)}{(x - 1)^2}} \quad \text{ב.} \quad \cos(xy) = x \quad \text{ד.} \quad x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \quad \text{ג.}$$

4. א. ססס סססס סססססס $z^4 + 16i = 0$ וסרסס ססס סססססס ססססס.

ב. סססס סססססס R , ססססס סססס ססססס T . ססס AB סססס ססססס.

סן סססססס A ו- B סססססס ססססס, סס שססס סססס $ABCD$. סס סססס ססססס
סן ססס סססס AB ססס סססס ססססס, סס סססס סססס $ABCD$ ססס סססססס!

סססססס!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 1.11

1. ענה/י על השאלות הבאות:

א. מצאי כל שורשי המשוואה: $z^3 - 27i = 0$

ב. לבדוק האם פונקציה $f(x) = \frac{9x+1}{3\sqrt{x}-1}$ היא אלגברית

2. חשבי את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$ ב. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{1-x} \right)^x$

3. לבדוק את רציפות וגבול הפונקציות הבאות בנקודות $x=3, x=2, x=1$:

א. $y = \frac{x-2}{2x^3 - 5x^2 + x + 2}$ ב. $y = 1 - \frac{|x|}{x}$

4. מצאי את הנגזרות $(y'(x))$:

א. $y = \ln^2(x^{\sinh x} + 1)$ ב. $y = \cos^2 y + x \sin^2 x$

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 1.12

1. ענה/י על השאלות הבאות:

א. מצא/י כל שורשי המשוואה: $z^4 + \sqrt{i}z^2 - 6i = 0$ במסגרת המספרים המרוכבים.ב. האם פונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}} + \sqrt[3]{x^2}$ היא אלגברית! הוכח את טענתך!2. נתונה פונקציה: $y = \frac{\cos^2 x - 1}{x^{3/2} \sqrt{\sin x}}$ א. האם היא רציפה ב- $x = 0$;ב. חשבי גבול ימני ושמאלי ב- $x \rightarrow 0$;ג. מהי גבול הפונקציה ב- $x = 0$;ד. חשבי את הנגזרת של $y = \cos^2 x$ על פי הגדרת הנגזרת.

3. חשבי את הנגזרת של הפונקציות:

א. $y = \arctan^2(1 + \sqrt{x})$;ב. $y = \sin^2(\arcsin x^3)$;ג. $y = (\ln x)^{2x+3}$;ד. $\sin^2 y = (\ln xy) + 2x^5$;4. מצא/י תחום הגדרה, חיתוך צירים, מכסימום ומינימום, נקודות פיתול וגבולות ב- $\pm \infty$ וב- 0 של הפונקציה: $y = \frac{a}{x} - \frac{a^3}{x^3}$

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 1.13

חומר עזר: דף נוסחאות ומחשב כיס ללא גרפיקה

1. א. חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 ax - 1}{x^2} \quad \text{I.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad \text{II.}$$

ב. חשב גבול ובדוק רציפות הפונקציה $y = |x|$ ופונקצית הנגזרת שלה בנקודות $x = 0$ ו- $x = 1$.

2. א. גזור את הפונקציות הבאות:

$$y = \arcsin^3 \left[e^{\frac{1}{2} \ln(1 - \cos^2 \sqrt{x})} \right] \quad \text{I.} \quad y^3 \sin x + \arctg(xy) = x \quad \text{II.}$$

ב. חלקיק נע ע"פ המשוואות $x = 3t$ ו- $y = 8t - 2t^2$ מצא את הזווית שבה חוזר החלקיק ל- $y = 0$ ומהו קצב שינוי הזווית עם הזמן בנקודה זו.

3. א. חשב את הנגזרת של הפונקציה $y = a^x$ לפי הגדרת הנגזרת. העזר בנוסחה $e^u = 1 + u$ כאשר $u \rightarrow 0$.ב. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $y = a^x$ בנקודה $x = 1$.4. מצאי תחום הגדרה, מכסימום ומינימום, והאר באופן איכותי את הפונקציה $y = \frac{1}{(x-a)(x-b)}$ כאשר $a > b > 0$.

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 2.1

1. א. מצא את התחום ההגדרה, נקודות החיתוך עם הצירים, נקודות מכסימום ומינימום

$$y = \frac{a}{x^2} - \frac{a^2}{x^3} \quad a > 0$$

ופתול של הפונקציה:

ב. תאר גרפית את הפונקציה.

2. א. חשב את הדיפרנציאל של הפונקציה: $y = e^{\arctg \sqrt{x^2-1}}$

ב. נתון מלבן שארכו פי 5 מרחבו בכמה אחוזים יגדל השטח אם נגדיל כל אחת מצלעותיו ב- 1%.

3. חשב:

$$\text{א. } \int \frac{x^3}{x^3+8} dx \quad \text{ב. } \int \frac{x^3}{(2+6x)^{3/2}} dx$$

4. חשב:

$$\text{א. } \int x \lg^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) dx \quad \text{ב. } \int \frac{d\theta}{\cos \theta + 17 - \sin \theta}$$

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 2.2

1. פתור את האינטגרלים הבאים:

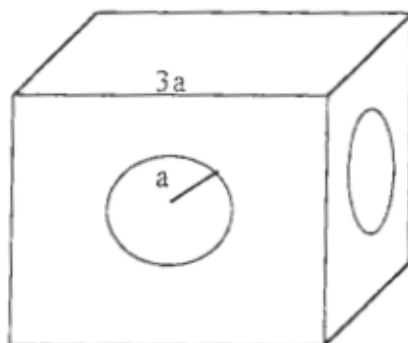
א. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$

ב. $\int \frac{dx}{a - \cos x} \quad a > 1$

ג. $\int \frac{dx}{1 + \lg x}$

2. מצא שטח פני הגוף הנוצר ע"י סבוב $p^2 = a^2 \cos 2\theta$ סביב ציר x.3. בקוביה שצלעה $3a$ קדחו חורים גליליים שציריהם מאונכים זה לזה דרך מרכזי הפאות.

רדיוס הגלילים a. מהו נפח הגוף הנותר?



בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 2.3

1. חשב את המסה של גוף המוגבל על ידי המשטח:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = z \quad \text{והמישורים } z = 1 \text{ ו- } z = 4$$

אם לפי יחידות המשואות האלה, הצפיפות היא 5 פעמים המרחק ממישור $x - y$.

נתון: משואת אליפסה שציריה $2a$ ו- $2b$ היא:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ושטחה של אליפסה זו היא } \pi ab.$$

2. מצא את אורך העקומה $\rho = a \cos^4 \frac{\theta}{4}$.

3. פתור את האנטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int \sqrt{\lg x} dx \quad \text{ב. } \int \frac{x dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$$

$$\text{ג. } \int (\arcsin x)^2 dx \quad \text{ד. } \int \frac{x}{x^3 + 4} dx$$

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 2.4

1. נזור :

א. $y = \sin^3(\operatorname{arctg}(x^2 + 1))$

ב. $y = \ln \sqrt{\frac{1-x^3}{1+x^3}}$

ג. $x^2 y^3 - 2xe^y - \ln y = 1$

2. מצא תחום הגדרה, חתוך צירים, מקסימום ומינימום גבול ב- $\pm \infty$ וב- $0^-, 0^+$ של הפונקציה

$$y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$$
 שרטט גרף איכותי של הפונקציה.

3. א. חשב $\ln(e^2 + 0.1)$.ב. פתור את האנטגרל $\int \cos^5 x dx$.

ג.
$$\int \left[\frac{(2-x)^3}{\sin \frac{\pi}{6}} + \frac{2}{(1-2x)^2} + \frac{1}{3x} \right] dx$$

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 2.5

1. חשב את האנטגרלים:

$$\text{א. } \int \frac{(2x+1)dx}{x^2+4x+5} \quad \text{ב. } \int \frac{(\cos^3 x - \cos x)dx}{\sqrt{1-\sin^3 x}}$$

2. חשב:

$$\text{א. } \int x \ln(x^4-1)dx \quad \text{ב. } \int \frac{\sin \theta d\theta}{\cos^3 \theta (1-\tan^2 \theta)^{3/2}}$$

3. חשב האנטגרלים המסוימים:

$$\text{א. } \int_0^{5/2} \sqrt{e^x-1}dx \quad \text{ב. } \int_{-2}^2 \frac{dx}{(x-1)^4}$$

4. בדוק התכנסות האנטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+(x-1)^{2/3}}dx \quad \text{ב. } \int_0^\infty \frac{2x+5}{\sqrt{x}(1+x)}dx$$

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 2.6

משך הבחינה שעהיים.

1. מצא את אורך הקשת $r = a\theta$ מהראשית עד סוף הסיבוב הראשון.2. מצא את השטח שבתוך העקומה $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$
(עבור לקואורדינטות פולריות)

3. פתור את האנטגרל:

א.
$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{1 + \sin x}$$

ב.
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx$$

4. פתח לטור מקלורן את הפונקציה $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ והערך לפי הטור את $\ln(1 + \sqrt{2})$.

רמז: $\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}}$

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 2.7

1. א. חשב $\arcsin(0.502)$.ב. חשב $\lg\left(\frac{\pi}{4.01}\right)$.

ג. חשב השגיאה היחסית בשטח עגול אם השגיאה ברדיוסו 2%.

2. חשב את האינטגרלים הבאים (במידה שהם קיימים).

א.
$$\int \frac{e^{-x} dx}{e^{-2x} + e^{-x} - 6}$$

ב.
$$\int x^3 \ln(x^2 - 6x + 9)^2 dx$$

3. חשב את האנטגרלים המסוימים הבאים (במידה שהם קיימים).

ג.
$$\int_0^4 \frac{dx}{x^2 - 4x + 4}$$

ב.
$$\int_{-\infty}^0 e^{2x} \cos 4x dx$$

א.
$$\int_1^2 \frac{dx}{(x^2 - 2x + 5)^{3/2}}$$

4. א. בדוק האם האנטגרלים הבאים מתכנסים? (נמק!)

II.
$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$$

I.
$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x+2}}{2x^3 + 5x^2 + \sqrt{x}} dx$$

IV.
$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{(x-1)^{1/2}(x-2)^3}$$

III.
$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^3 + \cos^2 x} dx$$

ב. נתון $\int_0^{\infty} e^{-x} \cos \alpha x = \frac{1}{1+\alpha^2}$ חשב $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} \sin \frac{\pi}{4} x dx$

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 2.8

1. א. חשב $\frac{dz}{d\varphi}$ כאשר נתון $z = \cosh \frac{y}{x}$ $y = e^\varphi$ $x = \varphi^2$.

ב. חשב בעזרת דיפרנציאל בקרוב את $\ln(e + 0.01)$.

ג. חשב השגיאה היחסית בשטח עגול אם השגיאה ברדיוסו 2%.

2. חשב את האינטגרלים הבאים:

ג. $\int_0^\infty \frac{x^2 + 1}{7x^3 + \cos^2 x} dx$

ב. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}}$

א. $\int d\alpha^2 \ln(x-1)$

3. בדוק האם האנטגרלים הבאים מתכנסים או מתבדרים

ג. $\int_0^\infty \frac{1 - \cos(x^2)}{x^3} dx$

ב. $\int_0^\infty \frac{e^{-x} \sin(x^3)}{x^3} dx$

א. $\int_0^\infty \frac{dx}{(x-1)^{2/3} + (x-1)^{3/2}}$

4. א. חשב את השטח המוגבל ע"י הפרבולות $y = x^2$ $y^2 = x$.

ב. מצא את הקף השטח.

ג. מהו נפח גוף הסיבוב הנוצר ע"י סיבוב הפונקציה סביב ציר y.

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 2.9

הוראות: חובה לפתור תרגילים 1,2,3, אחד מתרגילים 4,5, ושני תרגילים מתוך 6,7,8.

1. חשב: א. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$ ב. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2}$

2. א. מצא את שלושת האברים הראשונים בפיתוח טיילור של הפונקציה $\sin(1+x)^{1/2}$ סביב $x = 0$.

ב. תאר איך ניתן למצוא את יתר האברים (ללא ביצוע חישוב).

ג. מהו רדיוס ההתכנסות של הטור?

3. עבור dx, dy נתונים חשב את השינוי ב- $z = \tan(x^2 - y^2)^{1/2}$.

4. חשב את האנטגרל $\int_0^1 dx \frac{\tan^{-1} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

5. מצא את השטח מתחת לקו $y(x) = (x^2 + 1)^{-1/2}$ בין $x = -\infty$ ל- $x = +\infty$.

6. עבור אלו ערכים של x הטור הבא מתכנס: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2}$?

7. עבור אלו ערכים של הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(\log n)^2}$ מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, ומתבדר?

8. קבע אם הטור הבא מתבדר או מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh n - 1}{n}$ $\left(\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)$

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 2.10

1. פונקצית גמה $\Gamma(\mu)$ מוגדרת לכל μ על ידי $\Gamma(\mu) = \int_0^{\infty} dx x^{\mu-1} e^{-x}$

כאשר μ מספר טבעי n מקבלים $\Gamma(n) = (n-1)!$.

א. חשב את $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ ואת $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$.

ב. חשב $\int_0^{\infty} dx x^{19} e^{-x^2}$

נתון: $\int_0^{\infty} dx e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

2. חשב את המסה של גוף המוגבל על ידי המשטח:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = z \quad \text{והמישורים } z=1 \text{ ו- } z=4$$

אם לפי יחידות המשוואות האלה, הצפיפות היא 5 פעמים המרחק ממישור $x-y$.

נתון: משואת אליפסה שציריה $2a$ ו- $2b$ היא:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ושטח של אליפסה זו היא } \pi ab.$$

3. פתור את האנטגרלים הלא מסוימים הבאים:

א. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx$ ב. $\int \frac{x dx}{x^6 + 1}$ ג. $\int \sqrt{1 + \sin x} dx$

ד. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$ ה. $\int \frac{x^2 dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 2.11

1. פתור את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^m}{x^n} dx$, m, n שלמים חיוביים ו- $n > 1$.

ב. $\int \frac{dx}{\sinh x}$. ג. $\int \frac{dx}{e^{3x} - 4e^x}$.

ד. $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$. ה. $\int \frac{8x^3 dx}{\sqrt{4x^2 + 5}}$.

2. חשב את המסה של גוף המוגבל ע"י המשטח: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} = 1$

אשר צפיפותו בנקודה P היא פרופורציונלית הכוחה לשורש מרחק הנקודה P ממשור $x - y$.

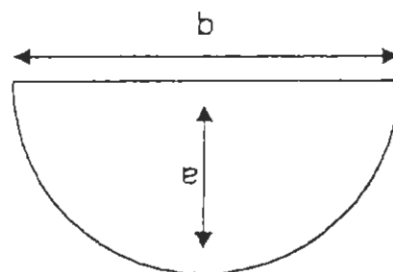
רמז: משואת אליפסה שמרכזה בראשית היא $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. שטחה: πab .

כאשר $2a$ ו- $2b$ הם צירי האליפסה.

3. הלחץ p בעומק D מתחת לפני נוזל נתון ע"י $p = \rho g D$ כאשר g - התאוצה כתוצאה מכח המשיכה ו- ρ

הוא צפיפות הנוזל. הכוח F הפועל על שטח A כתוצאה מלחץ זה הוא: $F = pA$. כאשר p הוא אחיד.

חתך של אבוס הוא פרבולה כמוראה באיור:



בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 2.12

1. א. מצא את התחום ההגדרה, נקודת החיתוך עם הצירים, נקודות מכסימום ומינימום

$$y = \frac{a}{x^2} - \frac{a^2}{x^3} \quad a > 0$$

ופתול של הפונקציה:

ב. תאר גרפית את הפונקציה.

2. בין כל המשולשים שווי השוקיים בעלי אותו היקף איזהו בעל השטח המכסימלי?

3. א. חשב את הדיפרנציאל של הפונקציה: $y = e^{\arctg \sqrt{x^2-1}}$

ב. נתון מלבן שארכו פי 3 מרחבו בכמה אחוזים יגדל השטח אם נגדיל כל אחת מצלעותיו ב- 1%.

4. פתור את האנטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx \quad \text{ב. } \int \frac{dx}{x^2 - 2x}$$

5. פתור את האנטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int \sin x \cos x e^{\sin^2 x} dx \quad \text{ב. } \int \frac{\ln^3 x}{x} dx$$

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 2.13

חשבי את האינטגרלים הלא מסוימים:

א. $\int \frac{dx}{(x^2 + 4x + 8)^{3/2}}$

ב. $\int \cos^4 x dx$

ג. $\int \sin^3 x e^{-\cos x} dx$

ד. $\int \frac{dx}{x^3 - 1}$

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 2.14

1. חשבי את הגדלים הבאים בעזרת הדיפרנציאלים:

א. $\ln(x + \sqrt{1-x^2})$ כאשר $x = 0.01$

ב. $\ln \cos 1^\circ$

2. חשבי את האינטגרלים הלא מסוימים הבאים:

א. $\int \frac{3x^2 - 11x + 11}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} dx$

ב. $\int \sin 2x e^{\sin x} dx$

3. חשבי את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$

ב. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos \varphi d\varphi}{6 - 5 \sin \varphi + \sin^2 \varphi}$

4. א. חשבי את האינטגרל הבא: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

ב. מצאי את השטח המוגבל על ידי קשת אחת של העקומה: $x = a(t - \sin t)$,

$y = a(1 - \cos t)$, והציר x.

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 2.15

1. חשבי את הגדלים הבאים בעזרת הדיפרנציאלים:

א. $\exp \sinh 0.1$

ב. מהו השינוי בנפח כדור שרדיוסו 1 מ' כאשר שטח פניו גדל ב- 0.1 מ².

2. חשבי את האינטגרלים הלא מסוימים הבאים:

א. $\int \frac{2(x^2 + 5x - 2)}{x^3 + 3x^2 - x - 3} dx$

ב. $\int \sin 2x e^{\cos x} dx$

3. חשבי את האינטגרלים הלא מסוימים הבאים:

א. $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx$ ב. $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}$

4. מצאי את גובהו של גליל בעל שטח מעטפת (ללא בסיסים) הגדול ביותר הנמצא בתוך כדור בעל רדיוס R.

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 2.16

1. א. חשבי את דיפרנציאל של הפונקציה: $y^3x - \sin(xy) + 12x = 0$ בנקודה $y = 0, x = 0$.ב. נתון $\sqrt[3]{1024} = 4$. חשבי בעזרת דיפרנציאלים $\sqrt[3]{1023}$.

2. חשבי את האינטגרלים הלא מסויימים הבאים:

א.
$$\int \frac{x dx}{\sqrt{3+6x-2x^2}}$$

ב.
$$\int x^2 \arctan x dx$$

3. חשבי את האינטגרלים הבאים:

א.
$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

ב.
$$\int_0^{\infty} \frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x} dx \quad (\alpha > -1)$$

4. א. חשבי בעזרת אינטגרלים את השטח החסום בין האליפסה $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$ לבין המעגל $x^2 + y^2 = 9$.

ב. בדוק האם האינטגרלים הבאים מתכנסים או מתבדרים ונמק!

I.
$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{2x+7}}{x^2+5x} dx$$

II.
$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$$

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 2.17

משך הבחינה: שעותיים

חומר עזר: דף נוסחאות מצורף ומחשב כיס ללא גרפיקה.

1. א. חשב בעזרת דיפרנציאלים (ללא מחשב) את הערך של $\arctan 0.98$.ב. חשב את הדיפרנציאל dy של המונקציה: $x^3y + \arctan(xy) - 6x = 0$ בנקודה: $x = 1, y = 1$.

2. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int \arctan(x^3 - 3x + 2) dx \quad \text{ב. } \int \frac{x dx}{\sqrt{7 - 6x - x^2}}$$

3. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. (I) } \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x dx}{\cos^2 x + 1} \quad \text{(II) נתון: } \int_0^{\infty} \frac{e^{-qx}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{q}} \quad (\text{עבור } q > 0) \quad \text{חשב } \int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-qx} dx$$

ב. חשב את הנפח הנוצר מסיבוב השטח המוגבל ע"י הפרבולה $y = x^2 + 3$ והישר $y = 5$, סביב הישר $y = 4$.

4. בדוק האם האינטגרלים הבאים מתכנסים או מתבדרים! נמק:

$$\text{א. } \int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{2x^4 + x^3} dx \quad \text{ב. } \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4 - 1}} \quad \text{ג. } \int_2^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{(x-2)^{5/2}(x-3)^3}$$

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 3.1

1. א. בדוק התכנסות הטורים: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n^2}$

ב. בדוק התכנסות הטור: $\frac{2}{3!} + \frac{2 \cdot 4}{5!} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{7!} + \dots$

ג. מצא תחום התכנסות (בתנאי ובהחלט) של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2 - 3x + 2)^n}{n^{1/2}}$

2. א. פתח לטור את המונקציה $y = \arctan(\cos x)$ סביב הנקודה $x = \frac{\pi}{2}$ עד חזקה

חמישית ב- $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

ב. חשב את האינטגרל $\int_0^{0.1} x \cos \sqrt{x} dx$ בדיוק של 0.1%.

3. א. נתון $x = re^{\theta} + 3r^2$, $y = 2\theta^3 - 4e^{\theta}$ חשב $\frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial x}{\partial r}$

ב. נתונה המשוואה $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 5 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 6 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

הצב $t = y + 3x$ ו- $s = y + 2x$ והוכח שהמשוואה המתקבלת היא $\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} = 0$

4. א. פתח את הפונקציה $\sinh(x+y)$ סביב $(0,0)$.

ב. מה אחוז השגיאה בפונקציה $f = x^2 y^3$ כאשר השגיאה ב- x היא 1% וב- y היא 2%.

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 3.2

1. בדוק התכנסות הטורים הבאים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{n} \quad \text{ד.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^3 n}{n(\ln^5 n + 1)} \quad \text{ג.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)! 2^n} \quad \text{ב.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 5}{n^2 + \sqrt{n} + 1} \quad \text{א.}$$

$$2. \text{ א. מצא תחום התכנסות (בתנאי ובהחלט) של הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{2} \right)^n$$

ב. פתח לטור את הפונקציה $\arctan \sqrt{x}$ סביב $x = 0$ מהו תחום ההתכנסות?ג. פתח לטור את הפונקציה $y = \ln^2 x$ סביב $x = 1$ מהו תחום ההתכנסות?

$$3. \text{ א. נתון } \int_1^{\infty} \frac{e^{-\mu x}}{\sqrt{x-1}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} e^{-\mu} \quad \text{חשב } \int_1^{\infty} \frac{x^2 e^{-\mu x}}{\sqrt{x-1}} dx$$

$$\text{ב. חשב את האינטגרל } \int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \quad \text{בדיוק של } 1\%.$$

$$\text{ג. חשב } \left(\frac{i+1}{\sqrt{2}} \right)^i, \quad \text{בטא כסכום של ממשי ודמיוני.}$$

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 3.3

1. בדוק התכנסות הטורים הבאים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{n} \quad \text{ד.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^3 n}{n(\ln^3 n + 1)} \quad \text{ג.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)! 2^n} \quad \text{ב.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 5}{n^2 + \sqrt{n} + 1} \quad \text{א.}$$

$$2. \text{ א. מצא תחום התכנסות (בהחלט ובתנאי) של הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{2} \right)^n$$

$$\text{ב. נתון הטור } \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \text{ חשב ע"פ הנתון את הטור המייצג את הפונקציה } y = \arctg x$$

$$\text{ג. פתח לטור מקלורן את הפונקציה } y = \cos(x^2)$$

3. בדוק האם מתכנסים או מתבדרים האינטגרלים הבאים:

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^3 + \ln^2 x} \quad \text{ג.} \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^{2/3} + (x-1)^{2/3}} \quad \text{ב.} \quad \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^3} dx \quad \text{א.}$$

$$4. \text{ א. חשב את האינטגרל } \int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \text{ בדיוק של } 1\%.$$

$$\text{ב. מהו אחוז השגיאה בפונקציה } f = x^2 y^3 \text{ כאשר אחוז השגיאה ב- } x \text{ הוא } 1\% \text{ וב- } y \text{ הוא } 2\%.$$

$$\text{ג. חשב } \left(\frac{i+1}{\sqrt{2}} \right)^i$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \dots$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad \text{דפרנציאל שלם:}$$

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 3.4

1. א. גזור את הפונקציה $f(x) = \log(\cosh(1-x^2)^{1/2})$.
- ב. נתונה הפונקציה $3xz - \log(y+z) = (x^2+y^2)^{1/2}$. מצא $\frac{\partial z}{\partial y}$ ו- $\frac{\partial z}{\partial x}$.
- ג. פתח לטור טיילור את הפונקציה $\arccos(\sinh x)$ סביב $x=0$ עד וכולל אברים מסדר שלישי ב- x .

$$2. \text{ א. חשב } \int_0^\infty dx \frac{e^{-ax}}{\sqrt{1+e^{-2ax}}} \quad (a > 0)$$

$$\text{ ב. } \int d\alpha^2 \sin(x-1)$$

$$3. \text{ חשב את האנטגרל הבא: } \iiint_D dx dy dz \frac{y^2}{x^2+y^2} e^{-\frac{z(x^2+y^2)^{1/2}}{R^2}}$$

כאשר D הוא החלק $x, y > 0$ של גליל עם רדיוס R בין שני המישורים $z=0, z=H$.

$$4. \text{ פתור את המשוואה הדיפרנציאלית: } \frac{d^2 y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 2x + \cos x$$

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 3.5

1. א. גזור את הפונקציה : $f(x) = \log(\cosh(1-x^2)^{1/2})$

ב. נתונה הפונקציה $3xz - \log(y+z) = (x^2+y^2)^{1/3}$. מצא : $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$

ג. פתח לטור טיילור את הפונקציה $\arccos(\sinh x)$ סביב $x = 0$ עד וכולל אברים מסדר שלישי ב- x .

2. א. חשב $\int_0^{\infty} dx \frac{e^{-ax}}{\sqrt{1+e^{-2ax}}} \quad (a > 0)$

ב. $\int dx x^2 \sin(x-1)$

3. חשב את האינטגרל הבא : $\iiint_D dx dy dz \frac{y^2}{x^2+y^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)^{1/2}}{R^2}}$

כאשר D הוא החלק $x, y > 0$ של גליל עם רדיוס R בין שני המישורים $z = 0, z = H$.

4. פתור את המשוואה הדיפרנציאלית : $\frac{d^2 y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 2x + \cos x$

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 3.6

1. בדוק התכנסות או התבדרות של האנטגרלים הבאים:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^{2/3} + (x-1)^{3/2}}; \quad \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x^2}{x^3} dx; \quad \int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^3 + \ln^2 x}; \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \sin x^3}{x^3} dx$$

2. חשב: $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x^2}$.ג. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$.ב. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x^2}\right)^{x^2}$.א.

3. חשב: $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\arctg \alpha x^{1/2}}{x^{1/2}} dx$.א. רמז: האנטגרל על α יש לבצע לפי חלקים.

ב. נתון: $\int_0^1 x^{a-1} dx = \frac{1}{a}$. הוכח: $\int_0^1 x^{a-1} (\ln x)^k dx = (-1)^k \frac{k!}{a^{k+1}}$

4. בדוק התכנסות הטורים הבאים:

א. $\sum_1^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$ כאשר $a \neq e$.ב. $\sum_0^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/2}$

ג. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln pn}$.ד. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 n\pi$.ה. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[n^3(n+1)]^{1/3}}$

5. א. פתח $e^{\frac{\sin x}{x}}$ בחזקות של x עד חזקה 5 ומצא את רדיוס ההתכנסות.

ב. נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-1)^n}{\sqrt{n}}$. בדוק מתי הטור מתכנס בתנאית בהחלט ומתי הוא מתבדר.

ג. פתח את $x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 3x - 3$ לחזקות של $x-1$.

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 3.7

1. א. בדוק התכנסות הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n^2}$

ב. בדוק התכנסות הטור $\frac{2}{3!} + \frac{2 \cdot 4}{5!} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{7!} + \dots$

ג. מצא תחום התכנסות (בתנאי ובהחלט) של הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2 - 3x + 2)^n}{n^{1/2}}$

2. א. פתח לטור את הפונקציה $y = \arctg(\cos x)$ סביב הנקודה $x = \frac{\pi}{2}$ עד חזקה

חמישית ב- $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

ב. חשב את האנטגרל $\int_0^{0.1} x \cos \sqrt{x} dx$ בדיוק של 0.1%.

3. נתונה המשוואה: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 5 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 6 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. הצב $s = y + 2x$ ו- $t = y + 3x$.

והוכח שהמשוואה המתקבלת היא $\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} = 0$

4. א. פתח את הפונקציה $\sinh(x + y)$ סביב $(0, 0)$.

ב. מה אחוז השגיאה בפונקציה $f = x^2 y^3$ כאשר השגיאה ב- x היא 1% וב- y היא 2%.

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 3.8

1. חשב $\frac{dz}{d\varphi}$ כאשר נתון $x = \varphi^2$ $y = e^\varphi$ $z = \cosh \frac{y}{x}$.

2. פתח את הפונקציה $z = x^2y + 3y - 2$ לחזקות של $x - 1$, $y + 2$ בהסתמך על משפט טיילור בלבד.

3. חשב $\iint_R (x^2 + y^2)^{3/2} dx dy$ כאשר R הוא התחום החסום במישור xy ע"י $x^2 + y^2 = 1$ $x^2 + y^2 = 9$.

4. חשב את האנטגרל $\iiint_R z dx dy dz$ כאשר התחום R הוא ברביע הראשון מוגבל

ע"י המישורים $z = 0$, $y = 0$, $x = y = 2$ $2y + x = 6$ והגליל $y^2 + z^2 = 9$.

5. נתונה המטריצה $\begin{pmatrix} 2 - ia & 2d + ib \\ 5e - ib & c + ia \end{pmatrix}$ כאשר a, b, c, d ו- e מס' ממשיים.

מהם התנאים על a, b, c, d ו- e כדי שהמטריצה תהיה הרמיטית.

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 3.9

1. בדוק התכנסות הטורים:

$$א. \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\ln^2 m}{m(\ln^6 m + 1)}$$

$$ב. \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \ln^3 m}{m}$$

ג. מצא את הרדיוס ההתכנסות של הטור:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(m!)^3 x^m}{(2m)! 2^m}$$

2. א. פתור את האנטגרל $\int_0^1 e^{-x^3} dx$ בדיוק של 0.1%.

$$ב. \text{חשב } \sin\left(\frac{\pi}{2} + i \ln 2\right)$$

3. א. נתונה הפונקציה: $z^3 y = x^3 y^2 + x \sin(yz)$. חשב $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$.ב. נתונה הפונקציה $z = x^2 + \sin^3 y$ כאשר $x^2 + \sin^2 x = \cos^2 y + y^2$.חשב את $\frac{dz}{dx}$ כפונקציה של x, y .4. א. פתח לטור את הפונקציה $z = \operatorname{arctg} \sqrt{xy}$ סביב הנקודה $x=0, y=0$ עד חזקה שניה ב- x וב- y .ב. נתונה המשוואה: $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = x + y$.נתון: $x = t + u, y = t - u$, העבר את המשוואה למשתנים t ו- u .

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 3.10

1. בדוק התכנסות הטורים הבאים:

$$\text{א. } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}n^2 + 1}{2n + n^2 + 5} \quad \text{ב. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^4 n}{n(\ln^5 n + 1)} \quad \text{ג. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 3^n}{(2n)!} \quad \text{ד. } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}}$$

$$2. \text{א. מצא תחום התכנסות (בתנאי ובהחלט) של הטור } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x^2 - 4}{3} \right)^n$$

$$\text{ב. פתח לטור את הפונקציה } \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ ומצא בעזרת טור זה את הטור המייצג את}$$

$$\text{הפונקציה } y = \arcsin x$$

$$\text{ג. חשב את האינטגרל } \int_0^1 \ln(1+x^3) dx \text{ בדיוק של } 1\%$$

$$3. \text{א. נתון: } \int_1^{\infty} e^{-x} \cos \alpha x dx = \frac{1}{1+\alpha^2} \quad \text{חשב: } \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} \sin \frac{\pi}{4} x dx$$

$$\text{ב. חשב את הביטויים } \cos i, \left(\frac{i-1}{\sqrt{2}} \right)^i$$

$$\text{ג. חשב } \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x)^{\ln x}$$

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 3.11

1. חשבי את האינטגרל המסויים: $\int_0^{\pi/4} \tan x dx$

2. חשבי את השטח המוגבל על ידי האליפסה: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$

3. בדוק את ההתכנסות האינטגרלים הבאים:

א. $\int_1^{\infty} \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{9x^4 + 2x^3 - 4}} dx$

ב. $\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^3} dx$

4. בדוק את ההתכנסות הטורים הבאים:

א. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^4 - 1}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{a^n}$

5. נתונה הפונקציה $f(x) = (1-x)^{-n}$. פתח אותה לטור מקלורן.

6. העזרי בפיתוח לטור על מנת לחשב את האינטגרל: $\int_0^a \cos^2(x^2) dx$

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 3.12

1. בדוק האם האינטגרלים הבאים מתכנסים. נמק את תשובותך!

$$\text{א. } \int_0^1 \frac{dx}{\sin^2 x} \quad \text{ב. } \int_1^\infty \frac{x dx}{(3x^3 + 2x^2 - 3)^{2/3}} \quad \text{ג. } \int_0^\infty \frac{dx}{2x^2 + 3\sqrt{x}}$$

$$2. \text{א. נתון } \int_0^\infty \frac{1 - \cos ax}{x^2} dx = \frac{\pi a}{2}, \text{ חשב } \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

$$\text{ב. נתון } \sum_{k=0}^\infty (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}, \text{ חשב את סכום הטור } \sum_{k=0}^\infty (-1)^k (k+1)x^k.$$

3. בדוק מהו תחום ההתכנסות (בהחלט ובתנאי) של הטורים:

$$\text{א. } \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{x^2 - 4}{3} \right)^n \quad \text{ב. } \frac{2 \cdot 4}{1!} x + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3!} x^2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{5!} x^3 + \dots$$

4. בדוק ההתכנסות של טורים הבאים:

$$\text{א. } \sum_{n=1}^\infty \frac{n^{2/3} + 7}{n^2 + 2\sqrt{n} - 1} \quad \text{ב. } \sum_{n=1}^\infty \frac{2^n (n+1)!}{(2n)!}$$

$$\text{ג. } \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n} \ln^5 n \quad \text{ד. } \sum_{n=1}^\infty \frac{\tanh n - 1}{n}$$

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 3.13

1. א. חשבי את האינטגרל המסוים: $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$

ב. חשבי את השטח המוגבל על ידי האליפסה: $x = a \cos t$ $y = b \sin t$

2. בדוקי את ההתכנסות האינטגרלים הבאים:

א. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^{-x})}$

ב. $\int_0^1 \frac{\sin(\sqrt{x})}{x^{3/2}} dx$

3. בדוקי את ההתכנסות בהחלט ובתנאי של הטורים הבאים:

א. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln^3 n}$

ב. $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \dots$

4. א. פתחי לטור חזקות את הפונקציה $y = \sin x$ סביב $x = \pi$.ב. פתחי לטור חזקות, $y = \exp(\arctan x)$ סביב $x = 0$ עד חזקה שלישית ב- x .

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 3.14

1. בדוק התכנסות בהחלט ובתנאי של הטורים:

$$א. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} \quad ב. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$ג. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n} \quad ד. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3/4} + 3}{2n^2 + n - 1}$$

2. א. מהו תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$ ב. מצא/י סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 3. א. נתון $z = x^2 + y^2$, $s = y \sin x$, $t = x \sin y$. חשבו $\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial s}$ ב. מצא/י נקודות קיצוניות של הפונקציה $z = \cos x + \cos y + \cos(x+y)$ אם $0 \leq x, y \leq \frac{\pi}{2}$ 4. א. פתח/י את הפונקציה $z = \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}$ לטור חזקות ב- x ו- y עד לאברים הרבועיים.ב. חשבו/י את האינטגרל: $\int_0^y \int_{y/c}^y \frac{y^2 dx dy}{x^2 + y^2}$

בהצלחה!

ב"ה
י"ב אייר תשנ"ח
8 במאי, 1998

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 3.15

1. בדוק התכנסות בהחלט ובתנאי של הטורים הבאים:

$$א. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 7}{n^{5/3} + n - 1} \quad ב. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$ג. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1 + \ln^2 n} \quad ד. \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \dots$$

2. א. חשב את האינטגרל המסוים הבא בעזרת טור אינסופי $\int_0^1 e^{-x^2} dx$.

$$ב. מצא את רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{\sqrt{n+1} \cdot 2^n}$.$$

$$ג. מצא את הפונקציה המתארת את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ וחשב את $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$.$$

3. א. פתח לטור את הפונקציה: $z = \sin(xy)$ סביב $x = \pi, y = 0$.עד לחזקות ריבועיות: $(x - \pi)^2$ ו- y^2 .ב. נתונה הפונקציה $z = x^3 + x \ln y$ וקיים $x + \sin y = \cos t, \ln x + y = \sin t$.

$$\text{חשב: } \frac{dz}{dt}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial x}{\partial t}$$

4. א. חשב את האינטגרל $\iint_A e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ כאשר A הוא פנים המעגל $x^2 + y^2 = R^2$.ב. חשב את מסתו של כדור $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ וצפיפותו שווה ל- $|z|$.

בהצלחה!

ב"ה

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 4.1

1. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$א. \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^3 + y^2 x) dy dx$$

$$ב. \int_0^{\pi/2} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-z^2}} (16 - \rho^2)^{1/2} \rho z d\rho dz d\theta$$

$$2. א. חשב מפת כדור שרדיוסו R אם צפיפות מסתו פרופורציונלית ל- $\frac{x^2 e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$$

ב. מצא את מומנט ההתמדה של הכדור הנ"ל ביחס לציר Z.

$$3. חשב את החסום בין הגלילים $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$ ובתוך הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.$$

$$4. חשב $\iint_R e^{-7/3 x} dx dy$ כאשר R הוא תחום המישור xy החסום ע"י הקווים $y = 2x + 4$, $y = 2x - 1$,$$

$$y = \frac{1}{4}x - 2, y = \frac{1}{4}x + 3. \text{ העזר בטרנס: } u = y - 2x, v = y - \frac{1}{4}x$$

$$5. חשב $\iiint_{(v)} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz$ כאשר (v) הוא הנפח של חלק הכדור (הקטן) בין המישור $z = a$$$

$$\text{לכדור } x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$$

רמז: כתוב את משוואת המישור $z = a$ בקואורדינטות כדוריות באמצעות ρ , a ו- ϕ .

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 4.2
(כולל פתרון)

1. פתורי בעיות הבאות:

א. נתונה פונקציה: $z = \cos(xy)$ כאשר $y^3 - 2xy + xy^2 = 3$. חשבי את $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{\partial z}{\partial y}$.ב. נתונה המשוואה: $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = x + y$. העבירי אותה למשתנים t ו- s כאשר $x = t + s$ ו- $y = t - s$.

2. פתחי לטור חזקות את הפונקציה:

א. $z = \exp(xy^2)$ סביב הנקודה: $y = 0, x = 0$.ב. $z = \sinh(x - y)$ סביב הנקודה $y = 0, x = 1$.

3. חשבי:

א. את האינטגרל $\iint_D \exp[-(x^2 + y^2)^2] (x^2 + y^2) dx dy$ כאשר D הוא החצי העליון של המישור $y > 0$.ב. את הקואורדינטות של מרכז הכובד של רבע של אליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ בהנחה שצפיפות היא 1.

4. מצאי:

א. $\iiint_T xyz dx dy dz$ כאשר T הוא נפח של המקבילון המוגבל ע"י המישורים: $z = 8, z = 5, y = 4, y = 2, x = 1, x = 0$.ב. $\iiint_V \frac{dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2}$ כאשר V הוא נפח הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

בהצלחה!

ב"ה
כ"ה תמוז, תשנ"ב
4 ביולי, 1994

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 4.2

פתרון

1. א.

$$\frac{dy}{dx} \rightarrow 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} - 2\left(y + x \frac{dy}{dx}\right) + y^2 + x \cdot 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 - 2x + 2xy) = 2y - y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - y^2}{3y^2 - 2x + 2xy}$$

ניתן לראות את y כמשתנה התלוי ב- x :

$$z(x, y); y(x)$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dy} = -x \sin(xy) - y \sin(xy) \cdot \frac{3y^2 - 2x + 2xy}{2y - y^2} \rightarrow \frac{dz}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad \text{עפ"י}$$

$$\frac{dz}{dy} = -\sin(xy) \left(x + \frac{3y^2 - 2x + 2xy}{2 - y} \right) =$$

$$\frac{dz}{dy} = -\sin(xy) \cdot \left(\frac{2x - xy + 3y^2 - 2x + 2xy}{2 - y} \right) = -\sin(xy) \cdot \frac{3y^2 + xy}{2 - y}$$

$$\frac{dz}{dy} = -\sin(xy) \frac{3y^2 + xy}{2 - y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x \sin(xy) \quad \text{בהתעלם מכל ש- } y \text{ תלוי ב- } x$$

ב.

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = x + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y}$$

$$x = t + s; \quad y = t - s$$

$$t = x - s = x + y - t$$

$$t = \frac{x + y}{2} = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$$

$$s = x - t = x - \frac{x + y}{2} = \frac{x - y}{2} = \frac{x}{2} - \frac{y}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$$

$$s = \frac{x}{2} - \frac{y}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial s} \right) = t + s + t - s$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2t$$

2. א.

$$z = e^{xy^2}$$

$$z|_{(0,0)} = 1$$

$$z_x|_{0,0} = y^2 e^{xy^2}|_{0,0} = 0$$

$$z_y|_{0,0} = 2xy e^{xy^2}|_{0,0} = 0$$

$$z_{xx}|_{0,0} = y^4 e^{xy^2}|_{0,0} = 0$$

$$z_{xy}|_{0,0} = 2ye^{xy^2}|_{0,0} + y^2 \cdot 2xye^{xy^2}|_{0,0} = 0$$

$$z_{yy}|_{0,0} = 2x[e^{xy^2} + y \cdot 2xye^{xy^2}]|_{0,0} = 0$$

$$z_{xxx}|_{0,0} = y^6 e^{xy^2}|_{0,0} = 0$$

$$z_{xxy}|_{0,0} = 4y^3 e^{xy^2}|_{0,0} + y^4 \cdot 2xye^{xy^2}|_{0,0} = 0$$

$$z_{xyy}|_{0,0} = 2[e^{xy^2} + y \cdot 2xye^{xy^2}]|_{0,0} + 2x[3y^2 e^{xy^2} + y^3 \cdot 2xye^{xy^2}]|_{0,0} = 2$$

$$z_{yyy}|_{0,0} = 2x \cdot 2xye^{xy^2}|_{0,0} + 4x^2[2ye^{xy^2} + y^2 \cdot 2xye^{xy^2}]|_{0,0} = 0$$

$$z = e^{xy^2} = 1 + \frac{1}{3!} \cdot 2 \cdot 3 \cdot xy^2 + \dots = 1 + xy^2 + \dots$$

כנראה ניתן לפתח את e^{xy^2} לפי e^* [כאשר סביב הנקודה $(0,0)$]

$$e^{xy^2} = 1 + xy^2 + \frac{1}{2}(xy^2)^2 + \frac{1}{3!}(xy^2)^3 + \dots$$

אך פיתוח מסוג זה לא נלמד בכיתה.

.2

$$z = \sinh(x - y)$$

$$z_{(1,0)} = \frac{e + \frac{1}{e}}{2}$$

$$z_x|_{1,0} = \cosh(x - y)|_{1,0} = \frac{e - \frac{1}{e}}{2}$$

$$z_y|_{1,0} = -\cosh(x - y)|_{1,0} = -\frac{e - \frac{1}{e}}{2}$$

$$z_{xx}|_{1,0} = \sinh(x - y)|_{1,0} = \frac{e + \frac{1}{e}}{2}$$

$$z_{xy}|_{1,0} = \sinh(x - y)|_{1,0} = -\frac{e + \frac{1}{e}}{2}$$

$$z_{yy}|_{1,0} = -\sinh(x - y)|_{1,0} = -\frac{e + \frac{1}{e}}{2}$$

$$z_{xxx}|_{1,0} = \frac{e - \frac{1}{e}}{2}$$

$$z_{xyy}|_{1,0} = -\frac{e - \frac{1}{e}}{2}$$

$$z_{xxy}|_{1,0} = -\frac{e - \frac{1}{e}}{2}$$

$$z_{xyx}|_{1,0} = \frac{e - \frac{1}{e}}{2}$$

$$\begin{aligned} \sinh(x - y) &= \frac{e + \frac{1}{e}}{2} + \frac{e - \frac{1}{e}}{2}(x - 1) - \frac{e - \frac{1}{e}}{2}y + \frac{1}{2!} \left[\frac{e + \frac{1}{e}}{2}(x - 1)^2 - 2 \cdot \frac{e + \frac{1}{e}}{2}(x - 1)y + \frac{e + \frac{1}{e}}{2}y^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{3!} \left[\frac{e - \frac{1}{e}}{2}(x - 1)^3 - 3 \frac{e - \frac{1}{e}}{2}(x - 1)^2 y + 3 \frac{e - \frac{1}{e}}{2}(x - 1)y^2 - \frac{e - \frac{1}{e}}{2}y^3 \right] + \dots \end{aligned}$$

.3

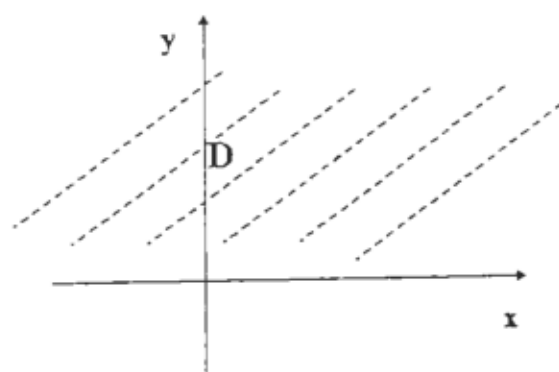
$$\iint_D e^{-(x^2 + y^2)^2} (x^2 + y^2) dx dy$$

$$\int_0^\pi \int_0^\infty e^{-r^4} \cdot r^2 r dr d\theta = \int_0^\pi \int_0^\infty e^{-r^4} \cdot r^3 dr d\theta =$$

$$u = r^4$$

$$du = 4r^3 dr$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^\pi \int_0^\infty e^{-u} \cdot du d\theta = \frac{1}{4} \int_0^\pi \left[-e^{-u} \right]_0^\infty d\theta = \frac{1}{4} \int_0^\pi d\theta = \frac{\pi}{4}$$



ב.

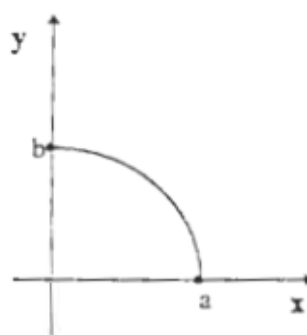
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$M = \int_0^b \int_0^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} dx dy = a \int_0^b \sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}} dy =$$

$$M = \frac{a}{b} \int_0^b \sqrt{b^2 - y^2} dy = \frac{a}{b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \cos \theta \cdot b \cos \theta d\theta =$$

$$M = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta =$$

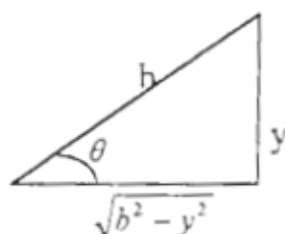
$$M = \frac{ab}{2} \left[\frac{\pi}{2} + 0 \right] = \frac{ab\pi}{4}$$



$$y = b \sin \theta$$

$$dy = b \cos \theta d\theta$$

$$\sqrt{b^2 - y^2} = b \cos \theta$$



$$\bar{x} = \int_0^b \int_0^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} x dx dy = \frac{a}{b} \int_0^b \sqrt{b^2 - y^2} \cdot y dy = -\frac{a}{2b} \int_{b^2}^0 \sqrt{u} du = -\frac{a}{2b} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_{b^2}^0 = \frac{ab^2}{3}$$

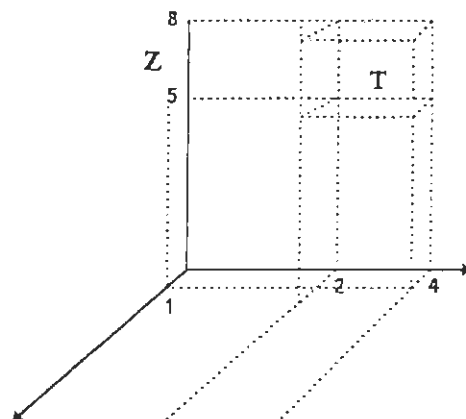
$$u = b^2 - y^2$$

$$du = -2y dy$$

$$M_{\bar{z}} = \frac{\left(\frac{ab^2}{3}\right)}{\left(\frac{ab\pi}{4}\right)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{b}{\pi}$$

$$\bar{y} = \int_0^b \int_0^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} y dx dy = \frac{a^2}{2} \int_0^b \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \frac{a^2}{2} \left[y - \frac{y^3}{3b^2} \right]_0^b = \frac{a^2}{2} \left[b - \frac{b}{3} \right] = \frac{a^2 b}{3}$$

$$M_{\bar{y}} = \frac{\left(\frac{a^2 b}{3}\right)}{\left(\frac{ab\pi}{4}\right)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{a}{\pi}$$



4. א.

$$\iiint_T xyz \, dx \, dy \, dz$$

$$\int_5^8 \int_2^4 \int_1^4 xyz \, dx \, dy \, dz =$$

$$\int_5^8 \int_2^4 \left. \frac{x^2 y z}{2} \right|_1^4 dy \, dz = \int_5^8 \int_2^4 \frac{yz}{2} dy \, dz =$$

$$\frac{1}{4} \int_5^8 y^2 z \Big|_2^4 dz = \frac{1}{4} \int_5^8 (16 - 4) z dz = 3 \int_5^8 z dz = 3 \left. \frac{z^2}{2} \right|_5^8 = \frac{3}{2} [64 - 25] = \frac{117}{2}$$

$$\iiint_V \frac{dx \, dy \, dz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

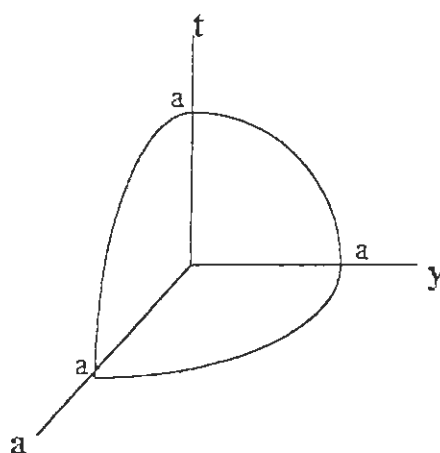
$$dx \, dy \, dz \rightarrow \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

$$8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \frac{\rho^2 \sin \phi}{\rho^2} d\rho \, d\phi \, d\theta =$$

$$8a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \, d\phi \, d\theta =$$

$$8a \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos \phi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta =$$

$$8a \cdot \frac{\pi}{2} = 4\pi a$$



2.

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 4.3

1. פתורי בעיות הבאות:

א. נתון $z = \frac{1}{4}\sqrt{12-x^2-y^2}$ ו- $\sin y + y = \ln x + x$. חשבי את $\frac{dz}{dx}$;

ב. נתונה הפונקציה: $z = \frac{1}{3}x^3 + 2y^2x - 9x - \frac{2}{3}y^3 + 12$. מצאי נקודות קיצוניות.

2. פתורי בעיות הבאות:

א. נתונה המשוואה: $\frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial t} = s + t$. העבירי אותה למשתנים s ו- t כאשר $t = x + y$;

$$s = x - y - 1$$

ב. חשבי $\iint_A \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ כאשר A הוא כל המישור מחוץ למעגל $x^2 + y^2 = 1$.

3. פתורי בעיות הבאות:

א. פתחי לטור פורייה את הפונקציה המחזורית הבאה:

$$y = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ 1/2 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

ב. חשבי את העזרת הכיוונית של הפונקציה $\phi = y^2x + x + xy$ בנקודה $(1, 0, -1)$

$$\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

4. חשבי:

$$\iiint_V e^{-(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} dxdydz$$

א. האינטגרל V הוא הנפח התחום ב- $0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty, 0 \leq z < \infty$;ב. הנפח הכלוא בתוך הגליל $x^2 + y^2 = 9$ ובין המישורים $z = x$ ו- $z = 10$.

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 4.4

1. פתורי בעיות הבאות:

א. נתון: $\frac{z}{x} = F\left(\frac{y}{x}\right)$. הראה/י ש- $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$ לכל פונקציה F גזירה.ב. נתונה הפונקציה: $z = \varphi(y + ax) + \psi(y - ax)$. הוכח ש- $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ לכל פונקציות φ ו- ψ גזירות.

2. פתורי בעיות הבאות:

א. מצא/י נקודות קיצוניות לפונקציה: $z = x^3 y^2 (a - x - y)$.ב. פתח/י לטור פורייה בקטע $[-\pi, \pi]$ את הפונקציה $y = x^2$.

3. חשבי את:

א. האינטגרל: $\iint_A \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy$ כאשר A היא פנים המעגל $x^2 + y^2 = a^2$.ב. נפח הגוף המוגבל על ידי קליפה כדורית $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ומשטח מוגדר על ידי $x^2 + y^2 = 3z$.

4. חשבי את:

א. האינטגרל $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{x}$ כאשר $\vec{F} = (x - z)\vec{i} + (1 - xy)\vec{j} + y\vec{k}$ ו- C הם המסלולים הבאים (I) קו ישיר מ- $(0,0,0)$ ל- $(1,1,1)$ (II) הקו $z = t^2, y = t, x = t^3$ בין $(0,0,0)$ ל- $(1,1,1)$;ב. $\int_A (x^2 + xy^2) dx + (x^2 y + 3y^2) dy$ כאשר $A(-1,0)$ ו- $B\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ הם נקודות על מעגל $x^2 + y^2 = 1$.

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 4.5

1. בדוקי את ההתכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים:

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x^2}{x^3} dx \quad \text{ב.}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^{2/3} + (x-1)^{3/2}} \quad \text{א.}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \sin x^3}{x^3} dx \quad \text{ד.}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^3 + \ln^2 x} \quad \text{ג.}$$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2 + 1)}$$

2. חשבי את האינטגרל הכפול:

3. חשבי את מסתו של חרוט אינסופי שצפיפותו e^{-z^3} ושמשוואתו $z^2 = x^2 + y^2$.4. מצאי את הנפח בין המשטח $z = x + y$ לבין חלק המישור $z = 0$ הנחתך על ידי שני הקווים $y = x^2$ ו- $x^2 + y = 1$.

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 4.6

(כולל פתרון)

1. מצא את ...

א. השטח המוגבל על ידי למניסקאטה $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.

ב. הנפח הנחתך על ידי הגליל $x^2 + y^2 = Rx$ מכדור $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

2. חשב את ...

א. האינטגרל $\iiint dx dy dz$ אם תחום האינטגרציה מוגבל על ידי מישורים $z = 0, y = 0, x = 0$

ו- $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

ב. הנפח מוגבל על ידי משטח $x^2 + y^2 + z^2 = az$ בעזרת אינטגרלים והסבר את תשובותך.

3. חשב את ...

א. טור פורייה של פונקציה $f(x) = |x|$ על קטע $-\pi \leq x \leq \pi$.

ב. סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} / (2n-1)$ בעזרת פיתוח לטור פורייה פונקציה $f(x) = x$ על קטע $-\pi < x \leq \pi$.

4. חשב את ...

א. הנגזרת של הפונקציה $\varphi = 3xy^2 + 2y^3z - x^2z$ בכיוון $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

ב. הכיוון בו הנגזרת של הפונקציה הנייל היא מכסימלית ואת גודלה בכיוון זה.

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 4.6

פתרון

1. א. בקואורדינטות פולריות:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$r^2 = 2a^2 r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta \Rightarrow r = a\sqrt{2} \sqrt{\cos 2\theta}$$

$$8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{a\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\theta}} r dr d\theta = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} a^2 \cdot 2 \cos 2\theta d\theta = 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta =$$

$$= 8a^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 4a^2 \sin \frac{\pi}{2} = 4a^2$$

השטח המוגבל על ידי המניסקאות שווה $4a^2$.

ב.

$$x^2 + y^2 = Rx$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

בקואורדינטות גליליות:

$$r^2 = Rr \cos \theta \Rightarrow r = R \cos \theta$$

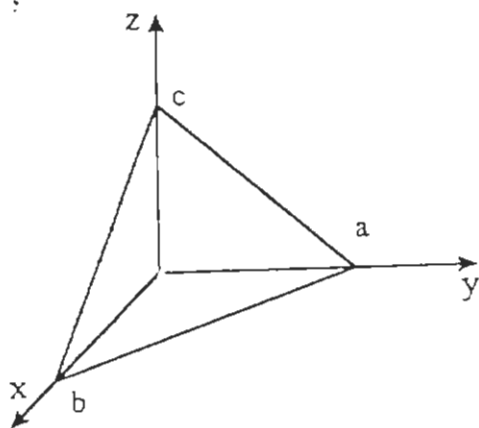
$$r^2 + z^2 \leq R^2$$

$$4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{R \cos \theta} \int_0^{\sqrt{R^2 - r^2}} r dz dr d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{R \cos \theta} r \sqrt{R^2 - r^2} dr d\theta =$$

$$= -\frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{R \cos \theta} d\theta = -\frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((R^2 - R^2 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}} - R^3) d\theta =$$

$$= -\frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3 [(1 - \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}} - 1] d\theta = -\frac{4}{3} R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 - 1) d\theta =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{4}{3}R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(1 - \cos^2 \theta) \sin \theta - 1] d\theta = -\frac{4}{3}R^3 \left(-\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta - \theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= -\frac{4}{3}R^3 \left(-\frac{\pi}{2} + 1 - \frac{1}{3} \right) = \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9} \right) R^3
 \end{aligned}$$



$$2. \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$$\int_0^a \int_0^{b-\frac{bx}{a}} \int_0^{c-\frac{cx}{a}-\frac{cy}{b}} dz dy dx$$

$$z = \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) c$$

$$y = \left(1 - \frac{x}{a} \right) b$$

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{b-\frac{bx}{a}} \left(c - \frac{cx}{a} - \frac{cy}{b} \right) dy = cy - \frac{cxy}{a} - \frac{cy^2}{2b} \Big|_0^{b-\frac{bx}{a}} = \\
 &= c \left(b - \frac{bx}{a} \right) - \frac{cx}{a} \left(b - \frac{bx}{a} \right) - \frac{c}{2b} \left(b - \frac{bx}{a} \right)^2 = \\
 &= cb - \frac{cbx}{a} - \frac{cbx}{a} + \frac{cbx^2}{a^2} - \frac{c}{2b} \left(b^2 - \frac{2b^2x}{a} + \frac{b^2x^2}{a^2} \right) \\
 &\int_0^a \left(cb - \frac{2cbx}{a} + \frac{cbx^2}{a^2} - \frac{cb}{2} + \frac{2cbx}{2a} - \frac{cbx^2}{2a^2} \right) dx = \\
 &= cbx - \frac{2cb}{a} \frac{x^2}{2} + \frac{cb}{a^2} \frac{x^3}{3} - \frac{cbx}{2} + \frac{cb}{a} \frac{x^2}{2} - \frac{cb}{2a^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \\
 &= cba - cba + \frac{cba}{3} - \frac{cba}{2} + \frac{cba}{2} - \frac{cba}{6} = \frac{cba}{6}
 \end{aligned}$$

ניתן לראות שזו פריזמה מכיוון שזה יוצא כמו 3/2 שטח בסיסי גובה

$$\frac{a \cdot b}{2} \cdot \frac{c}{3} = \frac{abc}{6}$$

3. מעבר לקואורדינטות כדוריות:

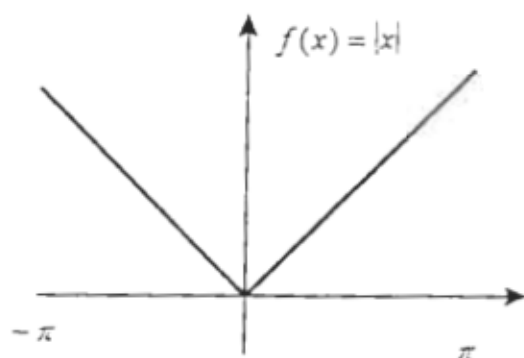
$$x^2 + y^2 + z^2 = az$$

$$\rho^2 = a \cdot \rho \cos \varphi$$

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} \rho^2 \sin \varphi d\rho = \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{a^3 \cos^3 \varphi \sin \varphi}{3} = \left\{ u = \cos \varphi \right. \\
 &\quad \left. du = -\sin \varphi d\varphi \right\} = \\
 &= \frac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^0 -u^3 du = \frac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \left(-\frac{u^4}{4} \right) \Big|_1^0 = \frac{a^3}{3 \cdot 4} \cdot 2\pi = \frac{\pi a^3}{3 \cdot 2}
 \end{aligned}$$

תוצאה זו היא נפח של כדור ברדיוס $\frac{a}{2}$ ואופן המשוואה הנ"ל היא משוואת כדור ברדיוס $\frac{a}{2}$

שמרכזו בנקודה $(0, 0, \frac{a}{2})$.



3. א. זו פונקציה זוגית קלאסית

$$|x| = |-x|$$

ולכן היא תתבטא רק ע"י $b_n = 0$ $\cos nx$ שהוא זוגי.

כדי להמנע מפעולות על $|x|$

הפכתי פונקציה זו ל- $f = -x$

כאשר x שלילי, $f = x$ כאשר x חיובי.

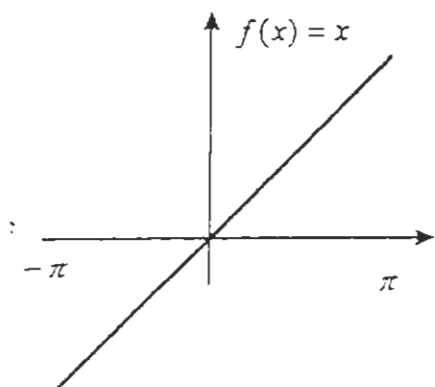
$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -x dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = -\frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \\
 &= -\frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi^2}{2} \right) + \frac{1}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi
 \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -x \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \quad \cos nx dx = dv \\ du = dx \quad \frac{1}{n} \sin nx = v \end{array} \right\}$$

$$-\frac{1}{\pi n} \sin nx \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{1}{n} \sin nx dx = -\frac{1}{\pi n^2} \cos nx \Big|_{-\pi}^0 = -\frac{1}{\pi n^2} (\cos 0 - \cos(-n\pi)) = -\frac{1}{\pi n^2} (1 - (-1)^n)$$

$$-\frac{1}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{1}{\pi n} (\cos(n\pi) - \cos 0) = -\frac{1}{\pi n} (1 - (-1)^n)$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) \cos(nx)$$



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}$$

זו פונקציה אי זוגית ולכן מבוטאת ע"י $\sin$
בלבד שהוא אי זוגי. $a_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx$$

מכיוון שהפונקציה לא כוללת את $(-\pi)$
כתבתי שהגבול שואף ל- $(-\pi)$.

$$u = x \quad \sin nx dx = dv$$

$$du = dx \quad -\frac{1}{n} \cos nx = v$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = -\frac{1}{\pi n} (\pi \cos(\pi n) + \pi \cos(-\pi n)) =$$

$$= \frac{-2 \cos(\pi n)}{n} = \frac{-2(-1)^n}{n}$$

$$: x = \frac{\pi}{2} \text{ כאשר}$$

$$f(x) = x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(-1)^n}{n} \sin nx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

הערכים של $\sin$:

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 1, 0, -1, 0, \dots \quad n = 1, 2$$

הסינוס מתאפס כל איבר שני וגם הופך סימן

$$-2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots\right) (-1)^{n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}$$

זוה בדיוק הטור המבוקש.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)} = \frac{\pi}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

4. א.

$$\varphi = 3xy^2 + 2y^3z - x^2z$$

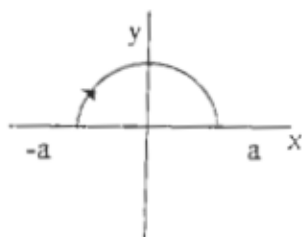
$$\nabla \varphi = (3y^2 - 2xz)\vec{i} + (6xy + 6y^2z)\vec{j} + (2y^3 - x^2)\vec{k}$$

$$\frac{d\varphi}{ds} \Big|_{i=2j=2k} = \nabla \varphi \frac{(i, 2j, -2k)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{1}{3} (3y^2 - 2xz + 12xy + 12y^2z - 4y^3 + 2x^2)$$

ב. הכוון בו הנגזרת היא מכסימלית הוא כיוון הגרדיאנט כפי שכתוב למעלה.
גודל הנגזרת המכסימלית:

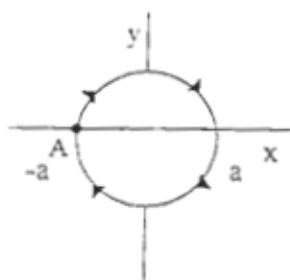
$$|\nabla \varphi| = \sqrt{(3y^2 - 2xz)^2 + (6xy + 6y^2z)^2 + (2y^3 - x^2)^2}$$

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 4.7
(כולל פתרון)

1. א. חשב את העבודה שנעשית ע"י הכח $\vec{F} = y^2\vec{i} + xy\vec{j}$ לאורך מסלול חצי מעגל עליון של: $x^2 + y^2 = a^2$ מ- $x = -a$ ל- $x = a$. (ראה איור).

ב. אם הכח הוא $\vec{F} = y^2\vec{i} + 2xy\vec{j}$ מה תהיה העבודה לאורך המסלול הנ"ל? מה תהיה העבודה לאורך כל המעגל, מנקודה A חזרה ל-A? (ראה איור).



2. א. חשב את טור פורייה המיצג את הפונקציה:

$$y_1 = \begin{cases} |x| & -1 < x < 1 \\ 1 & -2 < x < -1, \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

ב. בעזרת א' חשב את טור פורייה של הפונקציה $y = y_1 + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi x}{2} + 2 \cos \frac{\pi x}{2}$

3. א. פתור את המשוואה: $y' + \frac{y}{x} = \frac{x^2}{y^3}$

ב. קצב הגידול בריכוז של אוכלוסיה $\frac{d\rho}{dt}$ פרופורציונלי ל- $\rho(1-\rho)$.

כשנה מסוימת ($t=0$) כאשר הריכוז היה $\rho = 0.3$ קצב הגידול היה 0.1. חשב כעבור כמה שנים יהיה ריכוז האוכלוסיה $\rho = 0.53$.

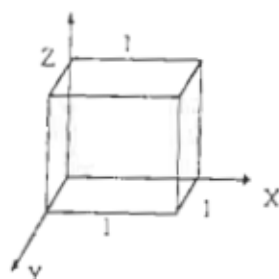
4. א. נתון נוזל בעל צפיפות ρ שיש לו מהירות נקודתית $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

I. חשב את כמות הנוזל העובר דרך יחידת שטח ליחידת זמן על משטח

$$\vec{u} = y^2\vec{i} - x\vec{j}$$

II. חשב את כמות הנוזל נטו היוצאת ביחידת זמן מקובייה

הנמצאת ב- $x > 0, y > 0, z > 0$. (ראה איור).



ב. פתור את המשוואה $\frac{dy}{dx} + \frac{\sin y + x^2}{x \cos y + 2y} = 0$

בהצלחה!

ב"ה

26 ביוני, 1998

ב' תמוז, תשנ"ח

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 4.7

פתרון

$$1. \quad w = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int y^2 dx + xy dy = \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx - \int_{-a}^a x^2 dx = \frac{2}{3} a^3 \quad \text{א.}$$

$$2. \quad w_1 = \int_{-(a,0)}^{(a,0)} y^2 dx + 2xy dy = 0 \quad \text{ב.}$$

כי $y=0$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} : w_2 = 0 \quad \text{עבודה משמרת}$$

2. א.

$$b_n = 0 \quad a_0 = \frac{3}{2}$$

$$a_n = \frac{4}{n^2 \pi^2} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right)$$

$$y_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{a_0}{2}$$

ב.

$$b_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = -\frac{4}{n^2 \pi^2} + 2$$

3. א.

$$y^3 y' + \frac{y^4}{x} = x^2$$

$$s = y^4 \quad \text{הצבה:}$$

$$y^4 = \frac{4x^3}{7} + \frac{c}{x^4}$$

ב.

$$\frac{\rho}{1-\rho} = Ae^{0.476t} \Rightarrow t=0 \quad \rho=0.3 \Rightarrow A=0.428$$

$$t = 2.03 \text{ שנים}$$

4. א.

$$\vec{V} = \rho \vec{v}$$

$$\vec{V} \cdot \vec{v} = \rho \vec{u} \cdot \vec{n} = \frac{xy^2 - xy}{\sqrt{y^4 + x^2}}$$

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{V} dv = \oiint_S \vec{V} \cdot d\vec{s}$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 2$$

ב. משוואה מדויקת, פתרון:

$$x \sin y + \frac{1}{3} x^3 + y^2 = \text{const}$$

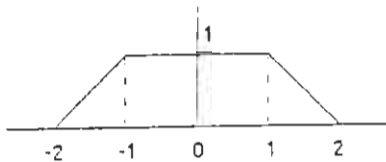
מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 5.1

1. פתח לטור פורייה את פוי הגל הטרפזי שבאיור

א. באמצעות פוי טריגונומטריות.

ב. באמצעות טור מרוכב.



2. נתון המשטח: $T = x^2 y z^2 - x y + z = 1$

א. מצא מישור משיק למשטח דרך הנקודה $(-1, 1, 1)$.

ב. מצא את משוואת אנך למשטח דרך הנקודה $(2, 0, 1)$.

3. א. מצא מישור שעובר דרך $P(3, 0, -1)$ ומאונך לקו חתוך המישורים $3x - 3y + 4z = 5$, $x + 2y - 3z = 6$.

ב. מצא את המרחק בין הקווים $x = \frac{y-2}{3} = z$, $x = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$.

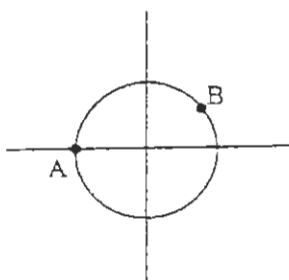
4. א. חשב $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{F}$ כאשר $\vec{F} = (x-z)\vec{i} + (1-xy)\vec{j} + y\vec{k}$ ו- C הם המסלולים הבאים:

I. קו ישר מ- $(0, 0, 0)$ ל- $(1, 1, 1)$.

II. הקו $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ בין $(0, 0, 0)$ ל- $(1, 1, 1)$.

ב. חשב $\int_A^B (2x + xy^2)dx + (x^2 y + y^3)dy$ כאשר $A(-1, 0)$ ו- $B(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

הן נקודות על מעגל $x^2 + y^2 = 1$ (ראה איור).



בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 5.2

פתור את המשוואות הדיפרנציאליות הבאות:

$$1. (x^2 - 1)dy = (e^x - 2xy)dx$$

$$2. (t + 2s)dt + 2(t + 4s)ds = 0$$

$$3. \text{מצא פתרון פרטי של המשוואה הבאה העובר דרך } (1,1) : y'x = y \ln y - y \ln x + y$$

$$4. \text{פתור: } (4x^3y^3 - 2xy)dx + (3x^4y^2 - x^2)dy = 0$$

$$5. \text{פתור: } -3 + y - x \frac{dy}{dx} = 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 5 \frac{dy}{dx}$$

$$6. \text{פתור: } \frac{d^2y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 3y = e^x + \sin x$$

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 5.3

פתור את המשוואות הדיפרנציאליות הבאות:

$$1. \quad \frac{ds}{dt} = \frac{2s+t-1}{s-t+2}$$

$$2. \quad (x^2 - 1)dy = (e^x - 2xy)dx$$

$$3. \quad y'x = y \ln y - y \ln x + y$$

$$4. \quad (4x^3y^3 - 2xy)dx + (3x^4y^2 - x^2)dy = 0$$

$$5. \quad -3 + y - x \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3\frac{dy}{dx}$$

$$6. \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = e^x + \sin x$$

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 5.4

1. חשב מסת כדור שרדיוסו R אם צפיפות מסתו שווה ל- $\frac{x^2 e - (x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$

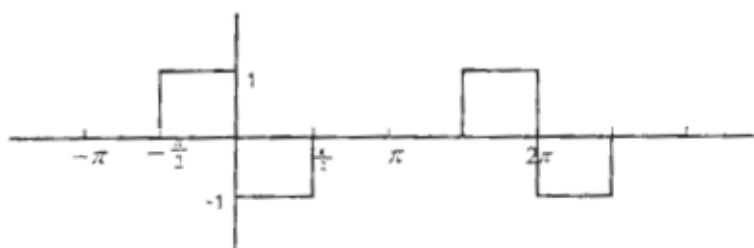
2. פתור את המשוואה הדיפרנציאלית: $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x+3y-2}$

3. פתור את המשוואה: $xy^2 \ln x dy + (y^3 - \ln x) dx = 0$

4. פתור את המשוואה: $(4x^2 y^3 - 2y) dx + (3x^3 y^2 - x) dy = 0$

5. פתור את המשוואה: $\frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 3y = e^x + \sin x$

6. פתח לטור פורייה את הפונקציה:



בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 5.5

1. א. מצא פתרון פרטי של המשוואה $(x - \sqrt{xy})dy - ydx = 0$ המקיים תנאי התחלה $x = 4, y = 1$.

ב. פתור את המשוואה: $(y')^3 + xy' - y = 0$

2. פתור את המשוואות הבאות:

א. $\frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = y \ln x - 1$

ב. $xe^{x+y} dx + e^{2y-x} dy = 0$

3. פתור את המשוואות:

א. $\frac{d^3 y}{dx^3} - 4 \frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} - 2y = e^{3x} + x$

ב. $\frac{1}{y} \frac{d^2 y}{dx^2} = e^y \frac{dy}{dx}$

4. א. פתור את המשוואה: $(y + y \ln x)dx + \left(x \ln x + \frac{\ln y}{y}\right)dy = 0$

ב. נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור 2π כאשר נתון מחזור אחד בין $-\pi$ עד π

באופן הבא: $f(x) = x^2 \quad -\pi < x < \pi$

I. תאר גרפית מספר מחזורים של הפונקציה.

II. פתח את הפי' לטור פורייה בפונקציות טריגונומטריות.

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 5.6

פתור את המשוואות הדיפרנציאליות הבאות:

$$1. \frac{ds}{dt} = \frac{2s+t-1}{s-t+2}$$

$$2. (x^2 - 1)dy = (e^x - 2xy)dx$$

$$3. \text{מצא פתרון פרטי של המשוואה הבאה העובר דרך } (1,1) : y'x = y \ln y - y \ln x + y$$

$$4. \text{פתור את המשוואה : } (y^2 - y) \cos x + y' = 0$$

$$5. \text{פתור : } -3 + y - x \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3\frac{dy}{dx}$$

$$6. \text{פתור : } \frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = e^x + \sin x$$

7. פתח לטור פורייה את הפונקציה המחזורית הבאה:



$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 2 & 1 < x < 2 \\ 1 & 2 < x < 3 \\ 0 & 3 < x < 4 \end{cases}$$

א. בעזרת פונקציה טריגונומטרית.

ב. בעזרת פונקציה אקספוננציאלית.

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 5.7

1. חשב את האינטגרל הכפול:
$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2 + 1)}$$

2. חשב את מסתו של חרוט אינסופי שצפיפותו e^{-z^3} ומשוואתו $z^2 = x^2 + y^2$.

3. מצא את הנפח בין המשטח $z = x + y$ לבין חלק המישור $z = 0$ הנחתך ע"י שני

הקווים $y = x^2$, $x^2 + y = 1$.

4. פתור את המשוואות הבאות:

א. $xy' - y^2 = 1$

ב. $x \ln x dy + (y - \ln x) dx = 0$

ג. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x + y^2}{\cos y - 2xy}$

ד. $y'' - 3y' + 2y = e^x + \sin x$

בהצלחה!

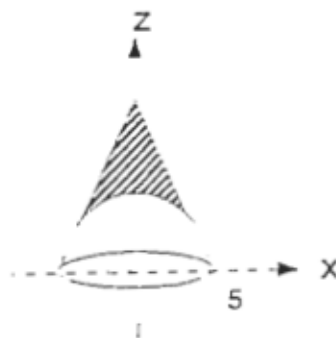
מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 5.8

1. א. חשב: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r^2 \sin\theta dr d\theta$

ב. החרוט שמשואתו $x^2 + y^2 = 5 - \frac{z}{2}$ חותך את הכדור שמשואתו $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

חשב את הנפח של קצה החרוט הבולט מתוך הכדור:

באיור המצורף ציר z מאונך לדף.

2. פתור את המשוואות הדיפרנציאליות הבאות:

א. $y dx + (2\sqrt{xy} - x) dy = 0$

ב. $y' = y \lg x + \cos x$

ג. $-(\cos y + y \cos x) dx = (\sin x - x \sin y) dy$

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מועד מיוחד

5.9

1. בדוק את ההתכנסות או ההתבדרות של האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^{2/3} + (x-1)^{3/2}} \quad \text{ב. } \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x^2}{x^3} dx$$

$$\text{ג. } \int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^3 + \ln^2 x} \quad \text{ד. } \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \sin x^3}{x^3} dx$$

$$2. \text{ חשבי את האינטגרל הכפול: } \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + y^2 + 1)}$$

$$3. \text{ חשבי את מסתו של חרוט אינסופי שצפיפותו } e^{-z^2} \text{ ושמשוואתו } z^2 = x^2 + y^2.$$

$$4. \text{ מצאי את הנפח בין המשטח } z = x + y \text{ לבין חלק המישור } z = 0 \text{ הנחתך על ידי שני הקווים } y = x^2 \text{ ו- } x^2 + y = 1.$$

בהצלחה!

מתמטיקה לפיזיקאים

מבחן 5.10

1. קבע את הסדר ואת המעלה של המשוואות הבאות:

$$\begin{aligned} \text{א. } \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{2dy}{dx} - 3y &= 4 \sin x - 2 \cos x \\ \text{ב. } \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 - 1 &= 0 \\ \text{ג. } (x-y)dx + xdy &= 0 \\ \text{ד. } \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x \frac{dy}{dx} - y &= 0 \end{aligned}$$

2. הראה כי:

$$\begin{aligned} \text{א. } y &= c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + \sin x \text{ פותר את 1a.} \\ \text{ב. } y &= \sin(x+c) \text{ פותר את 1b.} \\ \text{ג. } \frac{y}{x} &= -\ln kx + c \text{ פותר את 1c.} \\ \text{ד. } h(x^2 + y)^3 - (2x^3 + 3xy + c)^2 &= 0 \text{ פותר את 1d.} \end{aligned}$$

3. פתור את המשוואות הבאות בעזרת הפרדת משתנים:

$$\begin{aligned} \text{א. } du + utgvdv &= 0 \\ \text{ב. } (1-y^2)xdx + y(1+x^2)(1+y^2)dy &= 0 \\ \text{ג. } xe^{x+2y} + \frac{dy}{dx} &= 0 \end{aligned}$$

4. פתור את המשוואות ההומוגניות:

$$\begin{aligned} \text{א. } (x-y)ydx - x^2 dy &= 0 \\ \text{ב. } ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy &= 0 \\ \text{ג. } (hx^2 + 3xy + y^2)dx + (hy^2 + 3xy + x^2)dy &= 0 \end{aligned}$$

5. פתור את המשוואות הבאות ע"י מעבר למשוואות הומוגניות:

$$\begin{aligned} \text{א. } (2x - y + h)dy + (x - 2y + 5)dx &= 0 \\ \text{ב. } y' &= \frac{1-3x-3y}{1+x+y} \\ \text{ג. } y' &= \frac{x+2y+1}{2x+4y+3} \end{aligned}$$

בהצלחה!

1979' שלמה הבלין

מתמטיקה לפיזיקאים

ס י כ ו ם

סיכום

1. מספרים ממשיים: טבעיים, שלמים, רציונלים ואירציונליים.

2. מספרים מורכבים: צמוד, ערך מוחלט

$$Z_1 = R_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad Z_2 = R_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \quad 2\pi = 360^\circ \text{ רדיאנים}$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = R_1 \cdot R_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$Z_1/Z_2 = (R_1/R_2) [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$Z_1^n = R_1^n [\cos n\theta_1 + i \sin n\theta_1]$$

$$Z_1^{1/n} = R_1^{1/n} \left[\cos \frac{\theta_1 + 2\pi \cdot k}{n} + i \sin \frac{\theta_1 + 2\pi \cdot k}{n} \right] \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

3. פונקציות: תחום הגדרה, חד ערכית, ענף ראשי, פונקציות פולינומיליות, אלגבריות, טרנסצנדנטיות, פונקציות טריגונומטריות הפוכות.

4. גבול של סדרה: המספר a יקרא גבול של סדרה a_n אם לכל ε חיובי וקטן כרצוננו נוכל למצוא אבר

$$\text{בסדרה } a_n \text{ כך שלכל } n \geq m \text{ יתקיים אי השוויון } |a_n - a| < \varepsilon.$$

סדרה מתבדרת; סדרה שואפת ל- ∞ .

5. גבול של פונקציה: אם בכל סדרה בה $x \rightarrow a$ הפונקציה שואפת ל- b ($f(x) \rightarrow b$) יהיה גבול הפונקציה

$$\text{כאשר } x \rightarrow a \text{ כלומר: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

$$\text{אם: } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B \quad \text{II}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = kA \quad \text{I} \quad \text{אזי:}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad \text{IV}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B \quad \text{III}$$

פרט למקרים: $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞ , ∞^0 שאינם מוגדרים

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = A^n \quad \text{V}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

6. רציפות: רציפה בנקודה $x = 0$ אם ורק אם היא מוגדרת בנקודה a ויש לה גבול כאשר $x \rightarrow a$ וערך

הגבול שווה לערך הפונקציה בנקודה זו. כלומר $f(x)$ רציפה ב- $x = a$ אם ורק אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

7. נגזרות: הגדרה: $f'(x)$ - שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה x .חוקי גזירה:

$$[cf(x)]' = cf'(x) ; [f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$[f(x)/g(x)]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx}$$

נוסחת השרשרת:

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

פונקציות טריגונומטריות:

$$(\cos x)' = -\sin x \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\lg x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.718281828459....$$

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e \quad (\log_e x)' \equiv (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (e^x)' = e^x$$

9. דיפרנציאל: $dy = f'(x)dx$

10. אינטגרלים מידיים: $\int f(x)dx = F(x) + c$

וכן: $F'(x) = f(x)$

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$

8. $\int e^x dx = e^x + c$

2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$

9. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$

3. $\int \sin x dx = -\cos x + c$

10. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$

4. $\int \cos x dx = \sin x + c$

11. $\int \sinh x dx = \cosh x + c$

5. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$

12. $\int \cosh x dx = \sinh x + c$

6. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$

13. $\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x + c$

7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

14. $\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\coth x + c$

$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx$

חוקי אינטגרציה:

$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

11. שיטות אינטגרציה:

שיטת הצבה: משתמשים בשיטת הצבה כאשר: $\int F(\varphi(x))\varphi'(x)dx$

ו- F ניתן לבצע עליו אינטגרל מיידי.

מציבים: $\varphi(x) = u$

$\varphi'(x)dx = du$

ומקבלים: $\int F(u)du$

פונקציות היפרבוליות:

$$\sinh x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2} ; \cosh x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{tgh} x \equiv \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth x \equiv \frac{\cosh x}{\sinh x} ; \operatorname{sech} x \equiv \frac{1}{\cosh x} ; \operatorname{cosech} x \equiv \frac{1}{\sinh x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$(\sinh x)' = \cosh x ; (\cosh x)' = \sinh x$$

$$(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} ; (\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

8. מכסימום מינימום ונקודת פיתול:

בתחום בו $\frac{dy}{dx} > 0$ הפונקציה עולה

בתחום בו $\frac{dy}{dx} < 0$ הפונקציה יורדת

א. אם $f'(x_0) = 0$ ו- $f''(x_0) > 0$ לפונקציה מינימום ב- $x = x_0$

ב. אם $f'(x_0) = 0$ ו- $f''(x_0) < 0$ לפונקציה מכסימום ב- $x = x_0$

ג. אם $f'(x_0) = 0$ ו- $f''(x_0) = 0$ אזי:

לפונקציה	$\left. \frac{dy}{dx} \right _{x < x_0}$	$\left. \frac{dy}{dx} \right _{x > x_0}$
מינימום	-	+
מכסימום	+	-
נקודת פיתול	+	+
נקודת פיתול	-	-

ד. אם $f'(x_0) \neq 0$ ו- $f''(x_0) = 0$ תתכן לפונקציה נקודת פיתול ב- $x = x_0$.

9. דיפרנציאל: $dy = f'(x)dx$

10. אינטגרלים מידיים: $\int f(x)dx = F(x) + c$

אם: $F'(x) = f(x)$

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$

2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$

3. $\int \sin x dx = -\cos x + c$

4. $\int \cos x dx = \sin x + c$

5. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$

6. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$

7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

8. $\int e^x dx = e^x + c$

9. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$

10. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$

11. $\int \sinh x dx = \cosh x + c$

12. $\int \cosh x dx = \sinh x + c$

13. $\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x + c$

14. $\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\coth x + c$

$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx$

חוקי אינטגרציה:

$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

11. שיטות אינטגרציה:

שיטת הצבה: משתמשים בשיטת הצבה כאשר: $\int F(\varphi(x))\varphi'(x)dx$

ו- F ניתן לבצע עליו אינטגרל מידי.

מציבים: $\varphi(x) = u$

$\varphi'(x)dx = du$

ומקבלים: $\int F(u)du$

אינטגרציה לפי חלקים:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

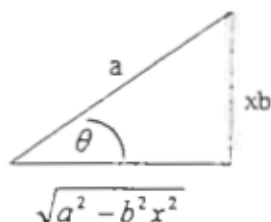
כללים:

א. החלק הנבחר כ- dv ניתן לבצע עליו אינטגרציה.

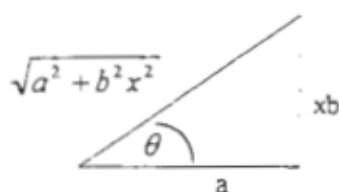
ב. $\int v du$ לא יהיה מסובך יותר מ- $\int u dv$.

הצבות טריגונומטריות:

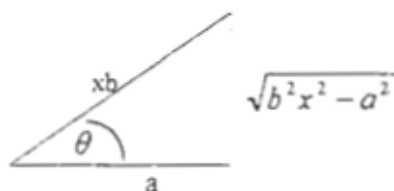
א. אם האנטגרנד מכיל $a^2 - b^2 x^2$ נציב $x = \frac{a}{b} \sin \theta$



ב. אם האנטגרנד מכיל $a^2 + b^2 x^2$ נציב $x = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \theta$



ג. אם האנטגרנד מכיל $b^2 x^2 - a^2$ נציב $x = \frac{a}{b} \sec \theta$



שברים חלקיים:

$$\frac{1}{(a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2)} = \frac{A}{a_1 x + b_1} + \frac{B}{a_2 x + b_2}$$

$$\frac{1}{(a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2)^2} = \frac{A}{a_1 x + b_1} + \frac{B}{a_2 x + b_2} + \frac{C}{(a_2 x + b_2)^2}$$

$$\frac{1}{(a_1 x^2 + b_1 x + c_1)(a_2 x + b_2)} = \frac{AX + B}{a_1 x^2 + b_1 x + c_1} + \frac{C}{a_2 x + b_2}$$

$$\frac{1}{(a_1 x^2 + b_1 x + c_1)^2 (a_2 x^2 + b_2 x + c_2)} = \frac{AX + B}{a_1 x^2 + b_1 x + c_1} + \frac{CX + D}{(a_1 x^2 + b_1 x + c_1)^2} + \frac{EX + F}{a_2 x^2 + b_2 x + c_2}$$

12. אנטגרל מסוים:

$$\int f(x) dx = F(x) + c \quad \text{אם:}$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{אזי האינטגרל המסוים:}$$

משמעות: השטח שבין הפוי $f(x)$ לציר x בין $x = a$ ל- $x = b$.

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad \text{נפח גוף סיבוב:}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad \text{אורך קשת:}$$

13. אנטגרלים לא אמיתיים:

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{נקרא אנטגרל לא אמיתי אם:}$$

א. לאנטגרל $f(x)$ נקודת אי רציפות אחת לפחות בתחום $a \leq x \leq b$.
או:

ב. לפחות אחד מקצוות האנטגרל הוא ∞ .

כלל: אם האנטגרל לא רציף בנקודה c הנמצאת בין a ו- b $a < c < b$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad \text{אזי צריך לבצע באופן הבא:}$$

כללים להתכנסות או התבדרות:

$$a \leq c \leq b \quad \int_a^b \frac{dx}{(x-c)^p} = \begin{cases} \text{מתכנס} & p < 1 \\ \text{מתבדר} & p \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_{0 < a}^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \text{מתבדר} & p \leq 1 \\ \text{מתכנס} & p > 1 \end{cases}$$

14. כלל לופיטל:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \text{אם:} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \text{ו-}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad \text{או:} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \quad \text{ו-}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{אזי:}$$

15. סדרים אינסופיים: $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$

הגדרה: אם: $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ הטור מתכנס ל- s , ואם $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ אינו קיים הטור מתבדר.

תנאי הכרחי להתכנסות: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

טור גאומטרי $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$ מתכנס עבור $|q| < 1$ ומתבדר לכל $|q| \geq 1$.

טור הרמוני $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר.

מבחן האינטגרל: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ מתכנס אם $\int_a^{\infty} f(x) dx$ מתכנס ($F(n) > 0$)

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ מתבדר אם $\int_a^{\infty} f(x) dx$ מתבדר

מבחן ההשוואה: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) מתכנס אם כל אבר בו (החל ממקום מסוים בטור) קטן או שווה לאבר

המתאים של טור חיובי מתכנס ידוע $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, כלומר $a_n \leq c_n$.

הטור מתבדר אם כל אבר בו (החל ממקום מסוים בטור) גדול או שווה מן האבר המתאים של

טור מתבדר ידוע $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$, כלומר $a_n \geq d_n$.

מבחן המנה: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ומתבדר אם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ($a_n > 0$ לכל n).

טור עם סימנים מתחלפים: $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ ($a_n > 0$)

משפט לייבניץ: הטור $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$, $a_n > 0$, מתכנס אם לכל n (החל ממקום מסוים בטור)

$$a_n > a_{n+1} \text{ ו- } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

התכנסות בהחלט:

הגדרה: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נקרא מתכנס בהחלט אם טור הערכים המוחלטים $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס

ו- $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתבדר הטור נקרא מתכנס בתנאי.

מבחן המנה להתכנסות בהחלט:

$$\text{הטור } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ מתכנס בהחלט אם } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \text{ ומתבדר אם } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1.$$

16. טורי חזקות:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{טור חזקות ב-} x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \quad \text{טור חזקות ב-} x - x_0$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n \quad \text{טור מקלורן:}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \quad \text{טור טיילור:}$$

17. פונקציות טריגונומטריות אקספוננציאליות והיפרבוליות (מספרים מרוכבים):

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad \text{ל-} z \text{ מרוכב:} \quad \text{הגדרה:}$$

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad \text{משפט אוילר:} \quad \text{מסקנות:}$$

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y$$

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

$$\sin iy = i \sinh y$$

$$\cos iy = \cosh y$$

18. נגזרות חלקיות: נתונה הפונקציה $z = f(x, y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} \equiv \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

19. דיפרנציאל שלם:

20. שימושים לנגזרת רגילה:

א. נתון: $z = f(x, y)$ $x = x(t)$ $y = y(t)$ אזי: $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$

ב. נתון: $z = f(x, y)$ $y = y(x)$ אזי: $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}$

21. נוסחת השרשרת במספר משתנים:

נתון: $z = f(x, y)$ $x = x(u, v)$ $y = y(u, v)$ אזי:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

22. נקודות קיצוניות בפונקציה של שני משתנים:

אם:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} = 0 \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} = 0 \quad \text{א.}$$

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{x_0, y_0} > 0 \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{x_0, y_0} < 0 \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{x_0, y_0} < 0 \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{x_0, y_0} > 0 \quad \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{x_0, y_0} > 0 \quad \text{ב.}$$

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{x_0, y_0} < 0$$

או להפך

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} < 0 \quad \text{ג.}$$

לפונקציה נקודת
אוכף ב- x_0, y_0

לפונקציה $z(x, y)$ יש מכסימום
בנקודה x_0, y_0

לפונקציה $z(x, y)$ יש מינימום
בנקודה x_0, y_0

23. טור חזקות בשני משתנים:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{x_0, y_0} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \bigg|_{x_0, y_0} (y - y_0) + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \bigg|_{x_0, y_0} (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \bigg|_{x_0, y_0} (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \bigg|_{x_0, y_0} (y - y_0)^2 \right] + \frac{1}{3!} [\dots] + \dots$$

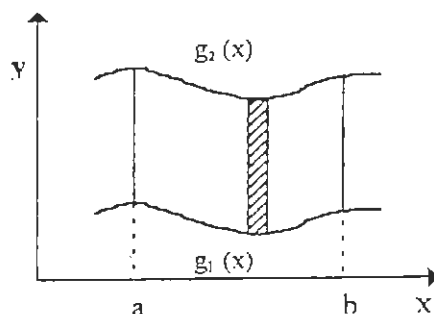
בכתיבה מקוצרת:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(x, y) \bigg|_{x_0, y_0}$$

24. אינטגרלים כפולים:

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx \equiv \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

הגדרה:



מבצעים האנטגרל הפנימי כאשר x נלקח כקבוע.
משמעות: האנטגרל הכפול הוא הנפח הכלוא בין הפונקציה $f(x, y)$ לבין חלק המישור xy המתואר באיור.

25. החלפת קואורדינטות (יעקוביאן):

$$\iint f(x, y) dx dy \rightarrow \iint f(u, v) J(u, v) du dv$$

$$\begin{array}{ll} x = x(u, v) & \text{אם} \\ y = y(u, v) & \text{אזי:} \end{array}$$

$$J \equiv \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

כאשר

עבור קורדינטות פולריות (קטביות)

$$\begin{array}{ll} x = r \cos \theta & \\ y = r \sin \theta & \end{array} \quad J(r, \theta) = r \quad \text{ואז:}$$

$$\iint f(x, y) dx dy \rightarrow \iint \bar{f}(r, \theta) r dr d\theta$$

26. אנטגרלים משולשים:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

$$dx dy dz \rightarrow r dr d\theta dz$$

קואורדינטות גליליות:

$$x = r \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = r \cos \varphi$$

:

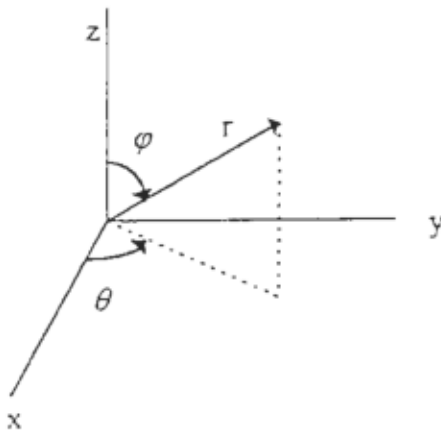
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

$$\varphi = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$dx dy dz \rightarrow r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi$$

קואורדינטות כדוריות:

27. משואות דיפרנציאליות:

סדר: סדר הנגזרת הגבוהה ביותר במשוואה.

מעלה: מעלת הנגזרת הגבוהה ביותר במשוואה.

משפט: פתרון כללי של משואה דיפרנציאלית מסדר n הוא פתרון המכיל n קבועים שרירותיים.28. הפרדת משתנים:

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x) dx \quad \text{אזי:}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(y)g(x) \quad \text{אם:}$$

29. משואה הומוגנית:

$$z = \frac{y}{x} \quad \text{מציבים:}$$

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

30. משוואה מהטיפוס:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$$

פותרים ע"י החלפת משתנים $x = \bar{x} + \alpha$ $y = \bar{y} + \beta$

$$\begin{aligned} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 &= 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

כאשר α ו- β מקיימים:

31. משוואת לינאריות: $\frac{dy}{dx} = P(x)y = Q(x)$

הפתרון הכללי: $y = e^{-I} \int Q(x)e^I dx + ce^{-I}$

כאשר: $I = \int P(x)dx$

32. משוואת ברנולי: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^k$

הצבה: $v = y^{1-k}$ מביאה למשוואה לינארית.

33. משוואת קלרו: $y = xy' + f(y')$

פתרון כללי:

$$y = cx + f(c)$$

34. משוואה מדויקת:

המשוואה: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ נקראת מדויקת אם ורק אם קיים $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

במקרה זה פותרים ע"י הנחה שהמשוואה דיפרנציאל שלם $d\mu = 0$ ו- $\frac{\partial \mu}{\partial x} = M$ ו- $\frac{\partial \mu}{\partial y} = N$ ו- $\mu = c$.

גורם אינטגרציה:

א. אם $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$ אזי ניתן להפוך המשוואה למדויקת ע"י כפל המשוואה

בגורם האינטגרציה - $e^{\int f(x)dx}$.

ב. אם $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = g(y)$ אזי ניתן להפוך המשוואה למדויקת ע"י כפל המשוואה

בגורם האינטגרציה - $e^{-\int g(y)dy}$.

35. משוואה לינארית מסדר שני - הומוגנית:

$$y'' + ay' + by = 0 \quad \text{מהסוג}$$

$$y = Ae^{\mu_1 x} + Be^{\mu_2 x}$$

$$y = Ae^{\mu_1 x} + Bxe^{\mu_1 x}$$

פתרון כללי ע"י הצבה $e^{\mu x}$ מקבלים:

אם $\mu_1 = \mu_2$ הפתרון הכללי:

36. משוואה לינארית מסדר שני - לא הומוגנית:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = f(x)$$

$$y = y_H + y_I$$

הפתרון הכללי:

כאשר: y_H פתרון כללי של ההומוגנית.

y_I פתרון פרטי כלשהו של האי הומוגנית.

נחוש טוב לפתרון פרטי של ההומוגנית; קומבינציה של הפוי $f(x)$ ושל כל הנגזרות שלה.

שיטת האינטגרציה:

$$(D^2 + aD + b)y = f(x) \quad D \equiv \frac{\partial}{\partial x}$$

$$(D - \alpha)(D - \beta)y = f(x)$$

פרוק לגורמים

$$u = (D - \beta)y \quad \text{II} \quad (D - \alpha)u = f(x) \quad \text{I}$$

פתרון I עבור u כמו משוואה לינארית מסדר ראשון ואח"כ פתרון II עבור y כמו משוואה לינארית מסדר ראשון.

37. משפט פורייה:

כל פונקציה מחזורית בעלת מחזור 2π ניתן לפתח לטור הבא:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

כאשר

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

38. הצורה המורכבת של טור פורייה:עבור מחזור של 2π

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

כאשר

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

עבור מחזור של $2l$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}$$

כאשר

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{\frac{-in\pi x}{l}} dx$$

דף נוסחאות/מתמטיקה לפיסיקאים

טריגונומטריה

1. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
3. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
5. $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$
7. $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
9. $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
11. $\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha \pm \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha \mp \beta}{2} \right)$
13. $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$
14. $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$
16. $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha)$
18. $\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$
19. $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$
21. $\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$
22. $1 - \tanh^2 \alpha = \operatorname{sech}^2 \alpha$
2. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
4. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
6. $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$
8. $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$
10. $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$
12. $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$
15. $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$
17. $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} (1 + \cos \alpha)$
20. $\sin^6 \alpha + \sin^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha$
23. $\coth^2 \alpha - 1 = \operatorname{sech}^2 \alpha$

אינטגרלים

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$
3. $\int a^x dx = a^x / \ln a + c$
5. $\int \sinh x dx = \cosh x + c$
7. $\int \operatorname{csch}^2 x dx = -\coth x + c$
9. $\int \tanh x dx = \ln \cosh x + c$
11. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
13. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$
15. $\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + c$
17. $\int \csc x dx = \ln |\tan \frac{x}{2}| + c$
19. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$
21. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$
23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2}) + c$
2. $\int x^{-1} dx = \ln x + c$
4. $\int e^x dx = e^x + c$
6. $\int \cosh x dx = \sinh x + c$
8. $\int \operatorname{sech}^2 x dx = \tanh x + c$
10. $\int \coth x dx = \ln |\sinh x| + c$
12. $\int \cos x dx = \sin x + c$
14. $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$
16. $\int \cot x dx = \ln |\sin x| + c$
18. $\int \sec x dx = \ln |\tan x + \sec x| + c$
20. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$
22. $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + c$
24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln (x + \sqrt{x^2 - a^2}) + c$

הצבות

1. $a^2 - b^2 x^2 \Rightarrow x = \frac{a}{b} \sin \theta$
2. $a^2 + b^2 x^2 \Rightarrow x = \frac{a}{b} \tan \theta$
3. $b^2 x^2 - a^2 \Rightarrow x = \frac{a}{b} \sec \theta$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$z = f(x, y)$$

דיפרנציאל שלם:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$$

תנאי הכרחי לנקודה קיצונית:

נוסחת השרשרת

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}, \quad z = f(x, y), \quad x = x(s, t), \quad y = y(s, t)$$

18.12.92

202

הקדמה: טריגונומטריה - חלק מהמכניקה

הקדמה: טריגונומטריה

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\tan(2\theta) = 2 \tan \theta / (1 - \tan^2 \theta)$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$$

$$\cos \alpha = \cos(360^\circ - \alpha)$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

הקדמה

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$(a^x)' = a^x \log_e a$$